HANDBUCH DER PHYSIK

UNTER REDAKTIONELLER MITWIRKUNG VON

R. GRAMMEL-STUTTGART · F. HENNING-BERLIN
H. KONEN-BONN · H. THIRRING-WIEN · F. TRENDELENBURG-BERL
W. WESTPHAL-BERLIN

HERAUSGEGEBEN VON

H. GEIGER UND KARL SCHEEL

BAND V

GRUNDLAGEN DER MECHANIK
MECHANIK DER PUNKTE UND STARREN KÖRPER



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

Basis of mechanics

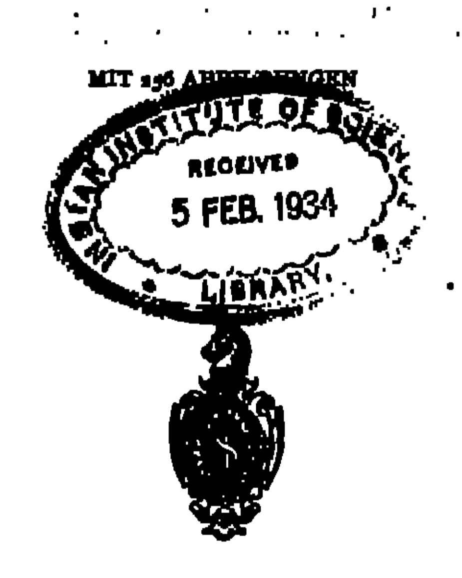
GRUNDLAGEN DER MECHAN
MECHANIK DER PUNKTE UND STARREN KÖRPER

BEARBEITET VON

H. ALT · C. B. BIEZENO · E. FUES · R. GRAMMEL
O. HALPERN · G. HAMEL · L. NORDHEIM · TH. PÖSCHL
M. WINKELMANN

REDIGIERT VON R. GRAMMEL

MIT 256 ABBILDUNGEN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel 1.

Die Axiome der Mechanik. Von Professor Dr. G. Hamel, Berlin

I. Einleitung
  1. Geschichtlicher Überblick und Literatur

II. Die klassische Mechanik
 a) Das Newtonsche Grundgesetz
  α) Formulierung der Axiome
   2. Die Axiome Ia bis If
  β) Definition der Begriffe und Einzelausführung
   3. Raum und Zeit
   4. Der statische Kraftbegriff
   5. Der kinetische Kraftbegriff
   6. Das Parallelogramm der Kräfte
   7. Allgemeine Axiome der Naturerkenntnis
   8. Die Masse
   9. Das Galileische Trägheitsgesetz
 b) Systemmechanik
  α) Aufbau der Mechanik aus der Kontinuitätshypothese
   10. Die Spannungsdyade und das Gegenwirkungsprinzip
   11. Das Boltzmannsche Axiom
   12. Der Energiesatz
   13. Die Unterscheidung der Systeme nach dem Charakter der Spannungsdyade. Erstens: Systeme ohne innere Arbeit
   14. Zweitens: Systeme mit innerer Arbeit
  β) Aufbau der Mechanik vom starren Körper aus
   15. Statik des einzelnen starren Körpers
   16. Statik von freien Systemen starrer Körper
   17. Statik beliebiger Systeme; Erstarrungsprinzip
   18. Statik gebundener Systeme starrer Körper
   19. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten
   20. Der Körper mit ausgezeichneter Mittellinie (Seil und Balken)
   21. Fortsetzung
   22. Das vollkommen biegsame und das steife Seil
   23. Ein anderer Aufbau der Stereostatik; das Hebelgesetz des Archimed
   24. Übergang zur Kinetik; das d'Alembertsche Prinzip
   25. Das d'Alembertsche Prinzip bei Ungleichheiten
  γ) Aufbau der Mechanik vom Punkt aus
   26. Axiome der Punktmechanik
  δ) Der Lagrangesche Aufbau der Mechanik
   27. Das Befreiungsprinzip
   28. Einzelfälle. Erstens: Der vollkommen biegsame unausdehnbare Fade
   29. Zweitens: Der unendlich dünne Draht
   30. Bemerkung über zweidimensionale Körper
   31. Drittens: Die ideale inkompressible Flüssigkeit
   32. Viertens: Der starre Körper und die allgemeinen Systeme
  ε) Energetischer Aufbau der Mechanik
   33. Das Hertzsche und Gaußsche Prinzip bei speziellen Systemen
   34. Das Gaußsche Prinzip bei allgemeinen …

Seite
III. Nichtklassische Mechaniken 35
37. Die logische Unabhängigkeit der Axiome 35
a) Der gruppentheoretische Aufbau des Newtonschen Grundgesetzes 35
38. Die drei Typen möglicher Mechaniken 35
39. Das Parallelogramm der Kräfte 36
40. Die Axiome der Kontinuität 37
41. Die Mechanik der speziellen Relativitätstheorie und die Newtonsche Mechanik 37
b) Nichtboltzmannsche Systemmechaniken 38
42. Der verallgemeinerte Momentensatz 38
c) Blick auf die Mechanik der Einsteinschen Relativitätstheorie 39
43. Das Gravitationsfeld 39
IV. Die Widerspruchslosigkeit der Axiome 40
44. Allgemeiner Überblick 40
45. Einzelausführung für die Stereomechanik 41

Kapitel 2.

Die Prinzipe der Dynamik. Von Dr. L. Nordheim, Göttingen 43
I. Einleitung 43
1. Geschichtliches und Literatur 43
2. Allgemeiner Überblick 44
II. Differentialprinzipe 45
a) Statik 45
3. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für freie Systeme 45
4. Holonome, nichtholonome, skleronome und rheonome Bedingungen . . 46
5. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für gebundene Systeme . . . 47
6. Die Bedeutung der Lagrangeschen Faktoren 49
7. Ungleichungen als Nebenbedingungen 49
b) Kinetik 51
8. Das d'Alembertsche Prinzip 51
9. Verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten; die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art 52
10. Systeme mit Kräften, die von den Geschwindigkeiten abhängen . . . 55
11. Verallgemeinerte Impulse; zyklische Koordinaten; Energiesatz 56
12. Hinzufügung von Nebenbedingungen bei den Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art 57
13. Die erweiterten Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art für Quasikoordinaten 58
14. Reibungs- und Stoßkräfte 61
15. Das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges 62
16. Eindeutigkeit der Prinzipe; singuläre Fälle 64
17. Das Hertzsche Prinzip der geradesten Bahn 66
18. Das Jourdainsche Prinzip 68
19. Die Appellschen Bewegungsgleichungen 69
20. Wirkliche und variierte Bewegung 72
21. Die Lagrangesche Zentralgleichung 75
III. Integralprinzipe 76
22. Das Hamiltonsche Prinzip 76
23. Variation der Zeit 79
24. Allgemeine Transformation des d'Alembertschen Prinzips 81
25. Allgemeinste Form des Hamiltonschen Prinzips und des Prinzips der kleinsten Wirkung 83
26. Das Jacobische Prinzip und das Hertzsche Prinzip 86
27. Ableitung der Bewegungsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip . 87

Kapitel 3.

Die Hamilton-Jacobische Theorie der Dynamik. Von Dr. L. Nordheim, Göttingen und Dr. E. Fues, Stuttgart 91
1. Allgemeine Fragestellung 91
2. Reduktion des Problems auf die kanonische Form 92

Seite

6. Die Bedingungen für kanonische Transformationen, ausgedrückt vermittels der Lagrangeschen und der Poisson-Jacobischen Klammersymbole . . . 104
7. Weitere Eigenschaften der Klammersymbole; die Sätze von Poisson und Lagrange . . . 106
8. Kontinuierliche Transformationsgruppen . . . 109
9. Die Bedeutung der Integrale der kanonischen Gleichungen . . . 112
10. Reduktion der Ordnung mit Hilfe bekannter Integrale . . . 115
11. Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Integralprinzipen . . . 117
12. Die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung . . . 119
13. Die einfachsten Fälle der Integration . . . 122
14. Der Unabhängigkeitssatz der Variationsrechnung; das Eikonal . . . 123
15. Anwendung auf die Mechanik; die Bedeutung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung . . . 127

Kapitel 4.

Störungsrechnung. Von Dr. E. Fues, Stuttgart. (Mit 4 Abbildungen.) . . . 131
I. Einleitung . . . 131
1. Die Bedeutung der Störungstheorie für die Physik . . . 131
II. Mehrfach periodische Bewegungen . . . 133
2. Die Bedeutung eindeutiger Integrale . . . 133
3. Die Sonderstellung der mehrfach periodischen Bewegungen . . . 135
4. Winkel- und Wirkungsvariable . . . 135
5. Periodische Bewegung bei einem Freiheitsgrad . . . 136
6. Separierbare mehrfach periodische Systeme . . . 139
7. Entartung der Bewegung . . . 141
8. Eigentliche, zufällige und Grenzentartung . . . 142
9. Die Keplerbewegung . . . 143
10. Definition der Winkel- und Wirkungsvariablen für allgemeine mehrfach periodische Systeme . . . 146
11. Die adiabatische Invarianz der Wirkungsvariablen . . . 148
III. Methoden der Störungsrechnung bei zeitunabhängiger Hamiltonscher Funktion 150
12. Vorbemerkung . . . 150
13. Der semikonvergente Charakter der Störungsrechnung . . . 151
14. Der willkürliche, mehrfach periodische Ansatz für die gestörte Bewegung 152
15. Entwicklung der Integrale nach Potenzen eines Parameters; intermediäre Bewegungen . . . 154
16. Poincarés Beweis für die Nichtexistenz eindeutiger Integrale . . . 155
17. Die Methode der säkularen Störungen . . . 157
18. Störung eines nicht entarteten Systems . . . 159
19. Störungen eines eigentlich entarteten Systems . . . 161
20. Störung eines zufällig entarteten Systems . . . 164
21. Beispiel zur Störung eines grenzentarteten Systems . . . 168
22. Störung bei Grenzentartung im allgemeinen Fall . . . 169
23. Eine Sonderlösung des gestörten grenzentarteten Systems . . . 172
24. Nebeneinanderbestehen verschiedener Entartungen . . . 173
25. Die Delaunaysche Methode . . . 173
IV. Störung durch zeitlich veränderliche Felder . . . 174
26. Nicht abgeschlossene Systeme . . . 174
27. Mehrfach periodische Zeitabhängigkeit der Störungsfunktion . . . 175
28. Unperiodische Zeitabhängigkeit der Störungsfunktion . . . 176

Kapitel 5.

Geometrie der Bewegungen. Von Professor Dr. H. Alt, Dresden. (Mit 74 Abbildungen.) 178
I. Einleitung . . . 178
1. Die Grundbegriffe der Bewegungslehre . . . 178
2. Relativität aller Bewegungen . . . 179
II. Die Bewegung des Punktes . . . 179
3. Die geradlinige Bewegung des Punktes . . . 179
4. Die krummlinige Bewegung des Punktes . . . 184
5. Zerlegung einer Bewegung in Seitenbewegungen . . . 184
6. Die

Seite

III. Die ebene Bewegung des starren Körpers 192
9. Die Grundlagen der ebenen Bewegung 192
10. Der Momentanpol und die Polkurven 193
11. Die Krümmung der Bahnkurven 195
12. Der Beschleunigungszustand der bewegten Ebene 199
13. Analytische Behandlung der ebenen Bewegung 203

IV. Die allgemeine Bewegung starrer Körper 207
14. Allgemeine Grundlagen der Bewegungen starrer Körper 207
15. Die Zusammensetzung von Elementarbewegungen starrer Körper . . . 209
16. Zusammensetzung von zwei Schiebungen 210
17. Zusammensetzung einer Drehung und einer Schiebung parallel der Drehachse 210
18. Zusammensetzung einer Drehung und einer Schiebung senkrecht zur Drehachse 211
19. Zusammensetzung einer Drehung mit einer beliebig gerichteten Schiebung 212
20. Zusammensetzung zweier Drehungen um sich schneidende Achsen . . 213
21. Zusammensetzung zweier Drehungen um parallele Achsen 215
22. Zusammensetzung zweier Drehungen um sich kreuzende Achsen . . . 216
23. Zusammensetzung zweier beliebiger Schraubungen 218
24. Die Relativbewegung eines Punktes gegen einen bewegten starren Körper 219
25. Relativbewegung eines Punktes gegen einen sich verschiebenden Körper 219
26. Relativbewegung eines Punktes gegen einen sich drehenden starren Körper 221
27. Anwendung auf das Kurbelschleifengetriebe 224
28. Die freie Bewegung starrer Körper 227
29. Die gebundene Bewegung starrer Körper 229

Kapitel 6.

Geometrie der Kräfte und Massen. Von Professor Ir. C. B. Biezeno, Delft. (Mit 48 Abbildungen.) 233

I. Geometrie der Kräfte 233
1. Kraft; Parallelogramm der Kräfte; Kräftepaar 233
2. Das Moment einer Kraft in bezug auf einen Punkt und in bezug auf eine Gerade 234
3. Die Arbeit einer Kraft 235
4. Reduktion des allgemeinen Kraftsystems; die Zentralachse 235
5. Fortsetzung 237
6. Das mit dem Kraftsystem verbundene Nullsystem 238
7. Fortsetzung 239
8. Die Lage eines Kraftkreuzes in Beziehung zur Zentralachse des Kraftsystems 240
9. Zerlegung einer Einzelkraft 241
10. Zerlegung eines allgemeinen Kraftsystems 243
11. Schraubentheorie; die Arbeit einer Kraftschraube 244
12. Die Resultierende zweier Kraftschrauben; das Zylindroid 245
13. Die Motorrechnung 247
14. Das Gleichgewicht eines Kraftsystems 250
15. Die Stabilität des Gleichgewichts 251
16. Das aus parallelen Kräften bestehende Kraftsystem; astatisches Gleichgewicht 252
17. Das astatische Gleichgewicht eines allgemeinen Kraftsystems 253

II. Geometrie der Massen 254
18. Lineare Momente 254
19. Magnetisches Massensystem; indifferentes Massensystem 255
20. Quadratische Momente 256
21. Polare Trägheitsmomente 256
22. Axiale und planare Trägheitsmomente 257
23. Beziehungen zwischen den quadratischen Momenten in bezug auf den Anfang, die Achsen und die Ebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems 258
24. Die Trägheitsfläche eines Punktes 259
25. Bedingung, daß eine Gerade für einen auf ihr liegenden Punkt O Hauptachse ist 261

Seite
28. Quadratisch gleichwertige Massensysteme . . . 264
29. Auswertung linearer und quadratischer Momente . . . 265
III. Graphostatik . . . 266
30. Ebenes Kraftsystem: zwei Kräfte . . . 266
31. Ebenes Kraftsystem: allgemeiner Fall; Gleichgewichtsbedingungen . . . 267
32. Ebenes Kraftsystem: allgemeiner Fall; Fortsetzung . . . 268
33. Beziehung zwischen zwei zu demselben Kraftsystem gehörigen Seilpolygonen . . . 268
34. Seilpolygone, welche gewissen Bedingungen unterworfen sind . . . 270
35. Anwendung auf das ebene Gelenkpolygon . . . 271
36. Zerlegung einer Kraft in zwei mit ihr in derselben Ebene liegende Komponenten . . . 271
37. Zerlegung einer Kraft in drei mit ihr in derselben Ebene liegende Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien . . . 272
38. Kräfte im Raum: Kräfte durch einen Punkt . . . 273
39. Kräfte im Raum: allgemeines Kraftsystem . . . 273
40. Graphische Bestimmung der Zentralachse eines räumlichen Kraftsystems nach Mohr . . . 274
41. Zerlegung von Kräften . . . 275
42. Die graphische Statik räumlicher Kraftsysteme nach Mayor . . . 275
43. Die graphische Statik räumlicher Systeme nach v. Mises . . . 276
IV. Anwendungen der Graphostatik . . . 277
a) Momente erster und zweiter Ordnung . . . 277
44. Das statische Moment einer Kraft in bezug auf einen Punkt . . . 277
45. Die Momentenfläche eines statisch bestimmten gewichtslosen Balkens; die Querkraftlinie . . . 278
46. Fortsetzung . . . 281
47. Die Momentenfläche eines Gerberträgers . . . 281
48. Bestimmung der größten Biegungsmomente bei bewegten Lasten . . . 282
49. Graphische Schwerpunktsbestimmung . . . 283
50. Graphische Ermittlung der Spannungs- und Stromverteilung bei Gleichstrom . . . 285
51. Momente zweiter Ordnung . . . 286
52. Konstruktion des Kernumfanges einer ebenen Figur . . . 287
53. Konstruktion der elastischen Linie eines statisch bestimmten Balkens . 288
54. Konstruktion der Übergangsmomente eines statisch unbestimmten Balkens 289
55. Bestimmung der Übergangsmomente eines federnd gestützten Balkens 292
56. Bestimmung der elastischen Linie eines über seine ganze Länge elastisch gestützten Trägers . . . 296
b) Fachwerke . . . 297
57. Definition des Fachwerkes und dessen kinematische und statische Bestimmtheit . . . 297
58. Die kinematische Bestimmtheit des Fachwerkes . . . 298
59. Die Struktur des Fachwerkes . . . 299
60. Die statische Bestimmtheit des Fachwerkes . . . 300
61. Bestimmung der Stabkräfte in einem Fachwerke . . . 301
62. Die Methode der Stabvertauschung . . . 302
63. Die kinematische Methode zur Stabkraftbestimmung . . . 302
64. Die Polygonalmethode; der Cremonaplan . . . 303
65. Bestimmung der Stabkräfte im Raumfachwerke . . . 304

Kapitel 7.

Kinetik der Massenpunkte. Von Professor Dr. R. Grammel, Stuttgart. (Mit 29 Abbildungen.) . . . 305
I. Einleitung . . . 305
1. Die Bedeutung der Punktdynamik und des Massenpunktes . . . 305
2. Die Bewegungsgleichungen . . . 306
II. Die freie Bewegung eines Massenpunktes . . . 308
3. Wurf und Fall ohne Luftwiderstand . . . 308
4. Wurf und Fall mit Luftwiderstand . . . 310
5. Die Zentralbewegung

Seite
8. Die Bewegung im allgemeinen Kraftfelde 318
9. Die Bewegung um zwei und mehr Kraftzentren 321
III. Die eingeschränkte Bewegung eines Massenpunktes. 323
10. Die Bewegung auf einer festen Kurve 323
11. Die erzwungene Bewegung; die harmonische Schwingung. 323
12. Das ebene punktförmige (mathematische) Pendel; Bewegungen auf Kurven im Schwerefeld 326
13. Die Bewegung auf einer bewegten Kurve 329
14. Die Bewegung auf einer festen Fläche 332
15. Die Bewegung auf einer Drehfläche; das punktförmige Raumpendel . 333
16. Die Bewegung auf einer bewegten Fläche 335
IV. Die Relativbewegung eines Massenpunktes auf der sich drehenden Erde . . . 335
17. Die Bewegung relativ zu einem bewegten Raum 335
18. Die Eötvössche Wage; der Schienendruck 336
19. Wurf und Fall 336
20. Das Foucaultsche und Bravaissche Pendel 338
V. Die Bewegung der Punktsysteme 340
21. Der Punkthaufen 340
22. Der abgeschlossene Punkthaufen 341
23. Der Isotomeograph 342
24. Das n-Körperproblem 342
25. Das Zweikörperproblem 343
26. Überblick über das Dreikörperproblem 346
27. Reduktion des ebenen Dreikörperproblems 346
28. Reduktion des allgemeinen Dreikörperproblems 349
29. Integration des Dreikörperproblems 351
30. Periodische Lösungen des Dreikörperproblems 353
31. Transformation des eingeschränkten Dreikörperproblems 355
32. Integration des eingeschränkten Dreikörperproblems 358
33. Periodische Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems 360
34. Das Vier- und Mehrkörperproblem 364
VI. Störung von Punktbahnen durch Stöße; Stabilität 365
35. Stoß auf einen Massenpunkt 365
36. Störung der Keplerbewegung durch Stöße 366
37. Die Stabilität der Bewegung der Massenpunkte 368
38. Die Stabilität der Lagrangeschen Punkte im Dreikörperproblem . . . 370

Kapitel 8.

Kinetik der starren Körper. Von Professor Dr. M. Winkelmann, Jena und Professor Dr. R. Grammel, Stuttgart. (Mit 44 Abbildungen.) 373
I. Einleitung 373
1. Die Bedeutung des starren Körpers 373
II. Impuls- und Energiesatz des starren Körpers 374
2. Der Impuls 374
3. Die Bewegungsenergie. 378
4. Der Impulssatz 379
5. Das Leistungsprinzip und der Energiesatz 381
III. Die ebene Bewegung des starren Körpers 383
6. Die kinetischen und kinetostatischen Gleichungen 383
7. Drehung um eine feste Achse 383
8. Das körperliche (physikalische) Pendel 384
9. Ebene Rollbewegungen 386
10. Ebene Gleitbewegungen 388
IV. Der kräftefreie Kreisel 390
11. Der Begriff des Kreisels; Kreiselinstrumente 390
12. Die Poinsot- und MacCullaghbewegung 392
13. Polbahn, Spurbahn und Schwungbahn 393
14. Der kräftefreie symmetrische Kreisel 397
15. Der kräftefreie Kugelkreisel 398
16. Analytische Darstellung der Bewegung 398

Seite

V. Der schwere symmetrische Kreisel 406
20. Die Integrale der Bewegung 406
21. Polbahn, Spurbahn und Schwungbahn 409
22. Homologe Kreisel 410
23. Die Bewegung der Kreiselspitze 410
24. Die Bewegung des aufrechten Kreisels 412
25. Die Bewegung des hängenden Kreisels 414
26. Die reguläre Präzession 414
27. Die Nachbarbewegungen der regulären Präzession 416
28. Die Störungen des lotrecht stehenden und hängenden Kreisels 417
29. Der schnelle Kreisel und die pseudoreguläre Präzession 418
30. Der Einfluß der Lagerung 422

VI. Weitere Bewegungen des starren Körpers 425
31. Der unsymmetrische schwere Kreisel 425
32. Kreisel in allgemeineren Kraftfeldern; Geschosse als Kreisel 428
33. Himmelskörper als Kreisel 429
34. Der Spielkreisel 431
35. Das rollende Rad 434
36. Die Billardkugel 437
37. Die allgemeine Roll- und Gleitbewegung des starren Körpers 438
38. Die vollständige Führungsbewegung des starren Körpers 440
39. Die vollständige Führungsbewegung des symmetrischen Kreisels 443
40. Der Kurvenkreisel 444

VII. Die Relativbewegung des starren Körpers auf der bewegten Erde 446
41. Die Bewegungsgleichungen in einem bewegten Bezugsystem 446
42. Das Gauß-Kamerlingh Onnessche Pendel 449
43. Der kräftefreie Kreisel 452
44. Der schwere Kreisel 453
45. Der geführte Kreisel 455

VIII. Systeme starrer Körper 459
46. Die Gelenkkette 459
47. Die unverzweigte Kugel- und Zylindergelenkkette 459
48. Die ebene Gelenkkette 462
49. Systeme mit kinetischer Bindung 463
50. Das ebene Doppel- und Mehrfachpendel 465
51. Die Routhsche Funktion 469
52. Zyklische Systeme; die Kelvin-Taitschen Gleichungen 472
53. Die Methode der kleinen Schwingungen 474
54. Die Stabilität der stätigen Bewegung 479
55. Gyroskopische Stabilisierung 481

Kapitel 9.

Technische Anwendungen der Stereomechanik. Von Professor Dr. Th. Pöschl, Prag. (Mit 60 Abbildungen.) 484

I. Reibung fester Körper 484
1. Die Arten der Reibung 484
2. Die Gleitreibungszahlen; Versuchsergebnisse 486
3. Rechnungsansätze und Anwendungen 489
4. Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze 493
5. Besondere Reibungserscheinungen 494
6. Physikalische Theorien der Reibung 496

II. Kinetostatik der Körperketten 497
7. Vorbemerkungen; Voraussetzungen 497
8. Ermittlung der Elementarreaktionen in einem Punkte eines starren Körpers nach dem d'Alembertschen Prinzip 498
9. Aufstellung der Bewegungsgleichungen in der Lagrangeschen Form . . 499
10. Bestimmung der Beschleunigungen und der Elementarreaktionen . . . 500
11. Spezifische Schnittreaktionen und absolute Reaktionen 501
12. Das Stabpendel 501
13. Bestimmung der Gelenkdrücke von zwangläufigen Getrieben; dynamische [illegible] . . . [illegible]

Seite
8. Die Bewegung im allgemeinen Kraftfelde . . . 318
9. Die Bewegung um zwei und mehr Kraftzentren . . . 321
III. Die eingeschränkte Bewegung eines Massenpunktes . . . 323
10. Die Bewegung auf einer festen Kurve . . . 323
11. Die erzwungene Bewegung; die harmonische Schwingung . . . 323
12. Das ebene punktförmige (mathematische) Pendel; Bewegungen auf Kurven im Schwerefeld . . . 326
13. Die Bewegung auf einer bewegten Kurve . . . 329
14. Die Bewegung auf einer festen Fläche . . . 332
15. Die Bewegung auf einer Drehfläche; das punktförmige Raumpendel . . . 333
16. Die Bewegung auf einer bewegten Fläche . . . 335
IV. Die Relativbewegung eines Massenpunktes auf der sich drehenden Erde . . . 335
17. Die Bewegung relativ zu einem bewegten Raum . . . 335
18. Die Eötvössche Wage; der Schienendruck . . . 336
19. Wurf und Fall . . . 336
20. Das Foucaultsche und Bravaissche Pendel . . . 338
V. Die Bewegung der Punktsysteme . . . 340
21. Der Punkthaufen . . . 340
22. Der abgeschlossene Punkthaufen . . . 341
23. Der Isotomeograph . . . 342
24. Das n-Körperproblem . . . 342
25. Das Zweikörperproblem . . . 343
26. Überblick über das Dreikörperproblem . . . 346
27. Reduktion des ebenen Dreikörperproblems . . . 346
28. Reduktion des allgemeinen Dreikörperproblems . . . 349
29. Integration des Dreikörperproblems . . . 351
30. Periodische Lösungen des Dreikörperproblems . . . 353
31. Transformation des eingeschränkten Dreikörperproblems . . . 355
32. Integration des eingeschränkten Dreikörperproblems . . . 358
33. Periodische Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems . . . 360
34. Das Vier- und Mehrkörperproblem . . . 364
VI. Störung von Punktbahnen durch Stöße; Stabilität . . . 365
35. Stoß auf einen Massenpunkt . . . 365
36. Störung der Keplerbewegung durch Stöße . . . 366
37. Die Stabilität der Bewegung der Massenpunkte . . . 368
38. Die Stabilität der Lagrangeschen Punkte im Dreikörperproblem . . . 370

Kapitel 8.

Kinetik der starren Körper. Von Professor Dr. M. Winkelmann, Jena und Professor Dr. R. Grammel, Stuttgart. (Mit 41 Abbildungen.) . . . 373
I. Einleitung . . . 373
1. Die Bedeutung des starren Körpers . . . 373
II. Impuls- und Energiesatz des starren Körpers . . . 374
2. Der Impuls . . . 374
3. Die Bewegungsenergie . . . 378
4. Der Impulssatz . . . 379
5. Das Leistungsprinzip und der Energiesatz . . . 381
III. Die ebene Bewegung des starren Körpers . . . 383
6. Die kinetischen und kinetostatischen Gleichungen . . . 383
7. Drehung um eine feste Achse . . . 383
8. Das körperliche (physikalische) Pendel . . . 384
9. Ebene Rollbewegungen . . . 386
10. Ebene Gleitbewegungen . . . 388
IV. Der kräftefreie Kreisel . . . 390
11. Der Begriff des Kreisels; Kreiselinstrumente . . . 390
12. Die Poinsot- und MacCullaghbewegung . . . 392
13. Polbahn, Spurbahn und Schwungbahn . . . 393
14. Der kräftefreie symmetrische Kreisel . . . 397
15. Der kräftefreie Kugelkreisel . . . 398
16. Analytische Darstellung der Bewegung . . . 398
17. Die Bewegung im Falle der trennenden Polbahn . . . 402
18. Konjugierte Poinsotbewegungen . . . 403
19. Der Einfluß der Reibung . . . 404

Seite

V. Der schwere symmetrische Kreisel 406
20. Die Integrale der Bewegung 406
21. Polbahn, Spurbahn und Schwungbahn 409
22. Homologe Kreisel 410
23. Die Bewegung der Kreiselspitze 410
24. Die Bewegung des aufrechten Kreisels 412
25. Die Bewegung des hängenden Kreisels 414
26. Die reguläre Präzession 414
27. Die Nachbarbewegungen der regulären Präzession 416
28. Die Störungen des lotrecht stehenden und hängenden Kreisels 417
29. Der schnelle Kreisel und die pseudoreguläre Präzession 418
30. Der Einfluß der Lagerung 422

VI. Weitere Bewegungen des starren Körpers 425
31. Der unsymmetrische schwere Kreisel 425
32. Kreisel in allgemeineren Kraftfeldern; Geschosse als Kreisel 428
33. Himmelskörper als Kreisel 429
34. Der Spielkreisel 431
35. Das rollende Rad 434
36. Die Billardkugel 437
37. Die allgemeine Roll- und Gleitbewegung des starren Körpers 438
38. Die vollständige Führungsbewegung des starren Körpers 440
39. Die vollständige Führungsbewegung des symmetrischen Kreisels 443
40. Der Kurvenkreisel 444

VII. Die Relativbewegung des starren Körpers auf der bewegten Erde 446
41. Die Bewegungsgleichungen in einem bewegten Bezugssystem 446
42. Das Gauß-Kamerlingh Onnessche Pendel 449
43. Der kräftefreie Kreisel 452
44. Der schwere Kreisel 453
45. Der geführte Kreisel 455

VIII. Systeme starrer Körper 459
46. Die Gelenkkette 459
47. Die unverzweigte Kugel- und Zylindergelenkkette 459
48. Die ebene Gelenkkette 462
49. Systeme mit kinetischer Bindung 463
50. Das ebene Doppel- und Mehrfachpendel 465
51. Die Routhsche Funktion 469
52. Zyklische Systeme; die Kelvin-Taitschen Gleichungen 472
53. Die Methode der kleinen Schwingungen 474
54. Die Stabilität der ständigen Bewegung 479
55. Gyroskopische Stabilisierung 481

Kapitel 9.

Technische Anwendungen der Starrkörpermechanik. Von Professor Dr. Th. Pöschl, Prag. (Mit 60 Abbildungen.) 484

I. Reibung fester Körper 484
1. Die Arten der Reibung 484
2. Die Gleitreibungszahlen; Versuchsergebnisse 486
3. Rechnungsansätze und Anwendungen 489
4. Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze 493
5. Besondere Reibungserscheinungen 494
6. Physikalische Theorien der Reibung 496

II. Kinetostatik der Körperketten 497
7. Vorbemerkungen; Voraussetzungen 497
8. Ermittlung der Elementarreaktionen in einem Punkte eines starren Körpers nach dem d'Alembertschen Prinzip 498
9. Aufstellung der Bewegungsgleichungen in der Lagrangeschen Form 499
10. Bestimmung der Beschleunigungen und der Elementarreaktionen 500
11. Spezifische Schnittreaktionen und absolute Reaktionen 501
12. Das Stabpendel 504
13. Bestimmung der Gelenkdrücke von zwangläufigen Getrieben; dynamische Kräftepläne 505
14. Bestimmung der Stabspannungen 506
15. Beanspruchung durch Schwingungen 507

Seite

III. Massenausgleich und Schwungradberechnung 512
16. Vorbemerkungen 512
17. Ausgleich bei Maschinen mit Kurbelgetrieben 513
18. Das Problem der Schwungradberechnung 517
19. Ältere Methoden 519
20. Neuere, dynamische Methoden 520
21. Dynamik veränderlicher Massen 522

IV. Regelung der Maschinen 523
22. Vorbemerkungen 523
23. Die Arten der Regler und der Regelungen 524
24. Grundbegriffe der Reglertheorie 525
25. Statische Behandlung der Regler 527
26. Dynamische Theorie der Regelung 528
27. Bemerkungen über die Regelung verschiedener Arten von Kraftmaschinen 533
28. Andere Regulierungsarten 534

V. Stabilität rotierender Wellen und kritische Drehzahlen 534
29. Vorbemerkungen 534
30. Die Gleichungen für eine beliebig besetzte Welle 535
31. Näherungsverfahren 536
32. Wellen mit ausgebreiteter Besetzung 538
33. Kritische Zustände zweiter Art 540
34. Stabilität 541

VI. Technische Anwendungen des Kreisels 543
35. Vorbemerkungen 543
36. Geradlaufapparate für Torpedos 544
37. Der Kompaßkreisel 545
38. Der Schlicksche Schiffskreisel 548
39. Die Einschienenbahn 550
40. Pendelkreisel 550
41. Gefährte Kreisel 551

VII. Dynamik des Zweirades 552
42. Vorbemerkungen 552
43. Der Reifen 553
44. Stabilität des Reifens 555
45. Allgemeine Bewegung des Reifens 556
46. Kinematische Kennzeichnung des Zweirades 556
47. Stabilität des Zweirades 558

VIII. Dynamik der Schienenfahrzeuge 559
48. Der Kraftbedarf 559
49. Schwingungen 560
50. Bremsen 562

IX. Dynamik des Schiffes 563
51. Die Schwimmstabilität 563
52. Schiffsschwingungen 565

X. Dynamik des Flugzeuges 566
53. Vorbemerkungen 566
54. Die Bewegungsgleichungen; einfache Lösungen 567
55. Die Längsstabilität; typische Flugzeugbewegungen 569
56. Die Seitenstabilität; Kreiselwirkung 571
57. Elastische Schwingungen der Flugzeugteile 572

XI. Registrierapparate 572
58. Allgemeine Theorie der Registrierapparate 572
59. Ältere Methoden und Apparate 574
60. Neuere Registrierapparate 575

Kapitel 10.

Relativitätsmechanik. Von Dr. O. Halpern, Wien. 578
I. Einleitung 578
1. Die Umgestaltung der Mechanik durch die Relativitätstheorie 578
2. Einteilung und Behandlungsart des Stoffes 579

Seite
II. Spezielle Relativitätstheorie 580
3. Kinematische Grundbegriffe 580
a) Dynamik des Massenpunktes 581
4. Die Minkowskischen Gleichungen 581
5. Diskussion der Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes 583
6. Ableitung der Bewegungsgleichungen aus dem Impulssatz 584
7. Verschiedene Formen der Bewegungsgleichungen 586
8. Bewegungsgleichungen mit der Eigenzeit als unabhängige Veränderliche 588
9. Die Hyperbelbewegung 588
b) Dynamik der Kontinua 589
10. Das Problem des starren Körpers 589
11. Der Energieimpulstensor 590
12. Die Trägheit der Energie 592
13. Diskussion der Eigenschaften des Energieimpulstensors; Transformationsformel und Spezialfälle 595
14. Das vollständige statische System; die relativen elastischen Spannungen 597
15. Die Trägheit der Energie und das Prinzip der kleinsten Wirkung . . 598
16. Die relativistische Hydrodynamik 599
III. Allgemeine Relativitätstheorie 600
17. Die Stellung der Mechanik in der allgemeinen Relativitätstheorie . . . 600
18. Die verwendeten Tensoren und Einheiten 601
19. Die Feldgleichungen der Gravitation 602
20. Die geodätische Linie und das neue Trägheitsgesetz der Mechanik . . 604
21. Verschiedene Formen der Bewegungsgleichungen des Massenpunktes . 606
22. Die inkompressible Flüssigkeitskugel 607
IV. Experimentelle Bestätigungen der Relativitätsmechanik 608
23. Vorbemerkung 608
a) Experimentelle Bestätigungen der speziellen Relativitätsmechanik 609
24. Der Versuch von Trouton und Noble 609
25. Die Bewegung des freien Elektrons im statischen elektromagnetischen Feld 610
26. Die Bewegung eines Elektrons um ein geladenes Zentrum 611
27. Die Lichtquantenmechanik der speziellen Relativitätstheorie 612
b) Experimentelle Bestätigungen der allgemeinen Relativitätsmechanik . . . 614
28. Die Theorie der Planetenbewegung 614
29. Die Lichtquantenmechanik der allgemeinen Relativitätstheorie 615

Sachverzeichnis 617

Allgemeine physikalische Konstanten

(September 1926)[1].

a) Mechanische Konstanten.

Gravitationskonstante	$6{,}6_6 \cdot 10^{-8}$ dyn · cm² · g⁻²
Normale Schwerebeschleunigung	$980{,}665$ cm · sec⁻²
Schwerebeschleunigung bei 45° Breite	$980{,}616$ cm · sec⁻²
1 Meterkilogramm (mkg)	$0{,}980665 \cdot 10^8$ erg
Normale Atmosphäre (atm)	$1{,}01325_0 \cdot 10^6$ dyn · cm⁻²
Technische Atmosphäre	$0{,}980665 \cdot 10^6$ dyn · cm⁻²
Maximale Dichte des Wassers bei 1 atm	$0{,}999973$ g · cm⁻³
Normales spezifisches Gewicht des Quecksilbers	$13{,}5955$

b) Thermische Konstanten.

Absolute Temperatur des Eispunktes	$273{,}2_0$°
Normales Litergewicht des Sauerstoffs	$1{,}42900$ g · l⁻¹
Normales Molvolumen idealer Gase	$22{,}414_1 \cdot 10^3$ cm³
Gaskonstante für ein Mol	$0{,}8205_4 \cdot 10^2$ cm³-atm · grad⁻¹
	$0{,}8313_6 \cdot 10^8$ erg · grad⁻¹
	$0{,}8309_9 \cdot 10^1$ int joule · grad⁻¹
	$1{,}985_8$ cal · grad⁻¹
Energieäquivalent der 15°-Kalorie (cal)	$4{,}184_2$ int joule
	$1{,}1623 \cdot 10^{-6}$ int k-watt-st
	$4{,}186_3 \cdot 10^7$ erg
	$4{,}268_5 \cdot 10^{-1}$ mkg

c) Elektrische Konstanten.

1 internationales Ampere (int amp)	$1{,}0000_0$ abs amp
1 internationales Ohm (int ohm)	$1{,}0005_0$ abs ohm
Elektrochemisches Äquivalent des Silbers	$1{,}11800 \cdot 10^{-3}$ g · int coul⁻¹
Faraday-Konstante für ein Mol und Valenz 1	$0{,}9649_4 \cdot 10^5$ int coul
Ionisier.-Energie/Ionisier.-Spannung	$0{,}9649_4 \cdot 10^5$ int joule · int volt⁻¹

d) Atom- und Elektronenkonstanten.

Atomgewicht des Sauerstoffs	$16{,}000$
Atomgewicht des Silbers	$107{,}88$
Loschmidtsche Zahl (für 1 Mol)	$6{,}06_1 \cdot 10^{23}$
Boltzmannsche Konstante k	$1{,}372 \cdot 10^{-16}$ erg · grad⁻¹
$^1/_{16}$ der Masse des Sauerstoffatoms	$1{,}650 \cdot 10^{-24}$ g
Elektrisches Elementarquantum e	$1{,}592 \cdot 10^{-19}$ int coul
	$4{,}77_4 \cdot 10^{-10}$ dyn$^{1/2}$ · cm
Spezifische Ladung des ruhenden Elektrons e/m	$1{,}76_9 \cdot 10^8$ int coul · g⁻¹
Masse des ruhenden Elektrons m	$9{,}02 \cdot 10^{-28}$ g
Geschwindigkeit von 1-Volt-Elektronen	$5{,}94_3 \cdot 10^7$ cm · sec⁻¹
Atomgewicht des Elektrons	$5{,}46 \cdot 10^{-4}$

e) Optische und Strahlungskonstanten.

Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)	$2{,}998_6 \cdot 10^{10}$ cm · sec⁻¹
Wellenlänge der roten Cd-Linie (1 atm, 15° C)	$6438{,}470_0 \cdot 10^{-8}$ cm
Rydbergsche Konstante für unendl. Kernmasse	$109737{,}1$ cm⁻¹
Sommerfeldsche Konstante der Feinstruktur	$0{,}729 \cdot 10^{-2}$
Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante σ	$5{,}7_2 \cdot 10^{-12}$ int watt · cm⁻² · grad⁻⁴
	$1{,}37_4 \cdot 10^{-12}$ cal · cm⁻² · sec⁻¹ · grad⁻⁴
Konstante des Wienschen Verschiebungsgesetzes	$0{,}288$ cm · grad
Wien-Plancksche Strahlungskonstante c_2	$1{,}43$ cm · grad

f) Quantenkonstanten.

Plancksches Wirkungsquantum h	$6{,}55 \cdot 10^{-27}$ erg · sec
Quantenkonstante für Frequenzen $\beta = h/k$	$4{,}77_3 \cdot 10^{-11}$ sec · grad
Durch 1-Volt-Elektronen angeregte Wellenlänge	$1{,}233 \cdot 10^{-4}$ cm
Radius der Normalbahn des H-Elektrons	$0{,}529 \cdot 10^{-8}$ cm

[1] Erläuterungen und Begründungen s. Bd. II d. Handb. Kap. 10, S. 487—518.

Kapitel 1.

Die Axiome der Mechanik.

Von

G. Hamel, Berlin.

Verwendete Bezeichnungen.

Vektoren durch deutsche Buchstaben: $\mathfrak{r}$ Ortsvektor; $\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{v}$ Geschwindigkeit; $\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{w}$ Beschleunigung; $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ inneres (skalares) Produkt; $[\mathfrak{r}\mathfrak{s}]$ äußeres (vektorielles) Produkt; $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$ Einheitsvektoren des natürlichen Koordinatensystems einer Raumkurve.

μ Massendichte, $d\mathfrak{k} = \mathfrak{s}\, dF$ Flächenkraft, $d\mathfrak{k} = \mathfrak{q}\, dV$ Volumkraft, $d\mathfrak{K} = \sum d\mathfrak{k}$ Summe der an einem Element angreifenden eingeprägten Kräfte, $d\mathfrak{R}$ Summe der Reaktionskräfte.

Dyaden (Tensoren zweiter Stufe, Affinoren) durch große griechische Buchstaben: Φ.

S Summation (Integration) über Raumteile V und Oberflächen O. $\int$ Integration nach der Zeit oder einer Länge.

I. Einleitung.

1. Geschichtlicher Überblick und Literatur. Die großen Jahrhunderte der Mathematik, das 17. und 18., haben auch die klassische Mechanik geschaffen. Galilei, Newton, Johann Bernoulli, d'Alembert, Euler und Lagrange führten sie zu einem Höhepunkt. Gauss, Hamilton, Jacobi und die Entdecker der nichtholonomen Systeme setzen die große Linie fort. Im übrigen bedeutet das 19. Jahrhundert Einzelarbeit, Zerfall in verschiedene Richtungen und damit vielfach Abschwächung der großen Gedanken und beginnende Kritik.

Diese Kritik — es seien vor allem die Namen Mach, Kirchhoff und Poincaré genannt — führte noch nicht zum neuen positiven Aufbau, zur axiomatischen Methode, die ja auch in der Geometrie erst von Pasch 1882 und von Hilbert 1899 grundsätzlich eingeführt wurde. Infolgedessen ist die axiomatische Methode in der Mechanik noch jünger. Natürlich haben sich, so wie in der Geometrie, auch die großen Schöpfer der vorkritischen Periode um die Grundlagen gekümmert, also Axiomatik getrieben. Aber es war nie das Streben zu einem rein logischen Aufbau maßgebend, derart, daß alle Annahmen klar ausgesprochen und ihre Abhängigkeit untersucht worden wäre. Da sie als Schöpfer einer neuen Wissenschaft vor allem für ihre Sache Glauben erwecken wollten, blieben die Quellen dieses Glaubens vielfach dunkel. Unbewußt flossen unbewiesene oder nicht deutlich formulierte Annahmen in die Überlegungen ein. D'Alembert glaubte ja selber sein Prinzip bewiesen zu haben, während wir heute dessen Unabhängigkeit dartun können.

In Einzelproblemen wurde die axiomatische Methode oft schon erstaunlich klar angewandt, z. B. von Daniel Bernoulli, d'Alembert u. a. zur Untersuchung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte. Die kritische Epoche des 19. Jahrhunderts war weit von einer systematischen Untersuchung im Sinne

der Hilbertschen Axiomatik entfernt. Sie brachte hier und da gute Ideen herbei, bedeutete stellenweise aber auch direkt einen Rückschritt. Wenn z. B. Mach behauptet, daß die Mechanik mit dem Newtonschen Gesetz erschöpft, und daß alles Weitere Durchführung sei, so liegt ein zweifelloser Irrtum vor. Und wenn Kirchhoff die Kraft als Produkt aus Masse und Beschleunigung definiert, so hätte, wenn man seine Definition wörtlich nähme, die Mechanik mit ihm als selbständige Wissenschaft aufgehört.

Die Axiomatik der Mechanik stammt also erst aus diesem Jahrhundert. Es sind infolgedessen nicht viele Arbeiten auf diesem Gebiet zu nennen. Die Lehrbücher sind fast ohne Ausnahme voraxiomatisch, ja vielfach vorkritisch, ohne die Höhe der Alten zu erreichen. Eine klar durchgearbeitete Axiomatik der Statik starrer Körper findet man bei Marcolongo[1]). Sonst kann ich leider in der Hauptsache nur meine eigenen Arbeiten nennen[2]) (künftig zitiert mit H. 1, H. 2, H. 3 und H. 4). Damit hängt zusammen, daß ich weiterhin überhaupt wenig Literatur zitieren werde. Hinsichtlich der älteren Literatur sei auf den Enzyklopädie-Artikel von Voss[3]) verwiesen.

Die Einsteinsche Relativitätstheorie hat natürlich auch die Mechanik grundlegend geändert. Da sie in diesem Werke eine ausführliche selbständige Darstellung findet, wird sie in diesem Aufsatz nur kurz gestreift (Ziff. 41 u. 43).

II. Die klassische Mechanik.

a) Das Newtonsche Grundgesetz.

α) Formulierung der Axiome.

2. Die Axiome Ia bis If. Die klassische Mechanik spricht von Bewegungen im euklidischen Raum. Ein Punkt P desselben werde in bezug auf einen als „ruhend" anzusehenden Punkt O durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ festgelegt; x, y, z seien seine rechtwinkligen Koordinaten. Betrachtet man zur „Zeit" t_0 einen Punkt P_0 mit dem Vektor $\mathfrak{r}_0$ und ordnet ihm zur „Zeit" t den Punkt P mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ zu, so sagen wir, der Punkt habe sich in der Zeit $t - t_0$ von P_0 nach P bewegt.

Unter allen diesen denkbaren Bewegungen gibt es ausgezeichnete, die wir als „materielle" bezeichnen; von ihnen handelt die Mechanik, und über sie sprechen wir folgende Axiome aus:

Axiom Ia: $\mathfrak{r}$ ist eine mindestens zweimal stückweise stetig differenzierbare Funktion der Zeit, $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ wird mit $\mathfrak{v}$ (Geschwindigkeit), $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ mit $\mathfrak{w}$ (Beschleunigung) bezeichnet.

Axiom Ib: Kommt bei der materiellen Bewegung der Raumteil V_0 in den Raumteil V, so ist die Beziehung beider im allgemeinen wechselweise eindeutig und abteilungsweise stetig differenzierbar. Nur in einzelnen zweidimensionalen Grenzflächen kann Unstetigkeit (Zerreißen, Zusammenstoßen) und daher auch Vieldeutigkeit bestehen (*Axiom der Undurchdringlichkeit und des eindeutigen Geschehens*).

---

[1]) R. Marcolongo, Theoretische Mechanik, deutsch von H. Timerding. Leipzig 1911.

[2]) G. Hamel, Math. Ann. Bd. 66, S. 350. 1909 (zit. H. 1); Jahresb. d. D. M.-V. Bd. 18, S. 357. 1909 (zit. H. 2); Lehrbuch der elementaren Mechanik. Leipzig, 1. Aufl. 1912, 2. Aufl. 1922 (zit. H. 3); Jahresb. d. D. M.-V. Bd. 25, S. 60. 1916 (zit. H. 4).

[3]) Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, S. 1.

Axiom Ic: Für jeden Raumteil V existiert ein Stieltjessches Integral[1])

$$m = \mathrm{S}\, dm \geqq 0.$$

Dieses Integral ist bei materieller Bewegung konstant und heißt die Masse des Körpers, der augenblicklich den Raumteil erfüllt. Demnach kann die Masse sowohl kontinuierlich als auch diskontinuierlich verteilt sein *(Axiom von der Erhaltung der Masse).*

Axiom Id: Den Massenelementen dm können ein oder mehrere, auch unendlich viele Vektoren $d\mathfrak{k}$ (Kräfte) zugeordnet sein, so daß für jeden Raumteil V

$$\mathfrak{K} = \mathrm{S}\sum d\mathfrak{k}$$

existiert. S ist ein Stieltjessches Integral über den Raumteil, $\sum$ bedeutet die Summation der $d\mathfrak{k}$ am einzelnen Volumelement dm.

Axiom Ie: Die Kräfte $d\mathfrak{k}$ sind durch ihre „Ursachen" bestimmt, d. h. durch Variable, welche den geometrischen und physikalischen Zustand der umgebenden Materie darstellen. Diese Abhängigkeit ist eindeutig und im allgemeinen stetig und differenzierbar.

Axiom If: Das Newtonsche Grundgesetz. Im Innern eines jeden nichtkonkaven Raumteils mit der Masse m gibt es einen Punkt, für dessen Beschleunigung $\mathfrak{w}$ das Gesetz Newtons gilt

$$m\mathfrak{w} = \mathfrak{K}.$$

Da $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta m} \mathrm{S}\, dm\, \mathfrak{w} = \mathfrak{w}$ existiert, so folgt aus *If*

*If** $$\mathfrak{w} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta m} \mathrm{S}\sum d\mathfrak{k}.$$

β) Definition der Begriffe und Einzelausführung.

3. Raum und Zeit. Nach der heutigen durch Hilbert endgültig ausgesprochenen Auffassung definieren die Axiome die Begriffe, soweit sie für eine mathematische Behandlung in Frage kommen. Die noch bestehende Freiheit in ihrer Realisierung dient dazu, den Begriffen solche physikalische Bedeutung zu geben, daß ein mit der Erfahrung übereinstimmendes Weltbild entsteht. Daraus ergibt sich erst die endgültige Bestimmtheit und Meßbarkeit der in Rede stehenden Größen. Zu diesen nicht zu Anfang, sondern erst am Ende zu definierenden und zu messenden Größen gehören auch Raum und Zeit.

An sich kann jeder euklidische Raum zugrunde gelegt und in ihm jeder Punkt O als ruhend aufgefaßt werden, jedes Koordinatensystem zur Festlegung der Richtungen dienen. Ebenso kann die Zeit t in mannigfaltiger Weise gewählt werden, nur müssen die gewählten t wechselseitig eindeutige, monotone, mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktionen für $-\infty < t < +\infty$ sein. Läßt man die Wahl zunächst frei, so hat man 7 Funktionen der Zeit unbestimmt. Diese werden nun in den $d\mathfrak{k}$ vorkommen als universelle Funktionen der Zeit und im allgemeinen dem Axiom *Ie* oder den Axiomen *A, B, C, D* (s. Ziff. 7) widersprechen. Die Behauptung geht also dahin, daß sich diese 7 Funktionen so bestimmen lassen, daß das Axiomensystem mit Einschluß von *Ie* erfüllt ist.

[1]) Es umfaßt Integrale über kontinuierliche Verteilungen wie auch Summen über diskrete Massenpunkte. Siehe etwa Riemann-Webers Differentialgleichungen der Physik, 7. Aufl., S. 32. Braunschweig 1925.

Die so bestimmte Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit heißt die absolute. Die Bestimmung ist eindeutig bis auf die sog. Galilei-Transformation

$$t' = \alpha t + \beta, \qquad (\alpha > 0)$$
$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{a} t + \mathfrak{b} + \Phi \mathfrak{r},$$

wo die Skalare α, β, die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und der Drehtensor (Versor) Φ konstant sind (Galileisches Relativitätsprinzip). Wir kennen also absoluten Raum und absolute Zeit erst aus einer vollendeten Mechanik, ebenso wie wir auch die Massen der Planeten erst aus der Theorie ihrer Bewegung bestimmen und nicht a priori messen können. Es liegt also kein Widerspruch dagegen vor, daß in der Beobachtung nur relative Bewegung und keine absolute meßbar ist. Nach Kant, dem man die volle Klärung verdankt, sind absoluter Raum und absolute Zeit transzendentale Anschauungen, während man sie früher für transzendentreal gehalten hatte. Nach Auffassung der Transzendentalphilosophie kann der Begriff der Ursache auf Raum und Zeit nicht angewendet werden, sondern nur auf ein Geschehen in Raum und Zeit. Die Einsteinsche Relativitätstheorie ist darin bekanntlich anderer Auffassung. Bei ihr sind Raum und Zeit wieder transzendentreal. Real, weil sie in den Kausalzusammenhang einbezogen sind: die Materie schafft die Raum- und Zeitmessung, diese wieder beeinflußt wesentlich die Bewegung. Transzendent, weil auch bei ihr Raum und Zeit nicht unmittelbar Objekte der Erfahrung (nicht materiell) sind.

Eine Überbrückung dieses Gegensatzes ist dann möglich, wenn man statt von Raum und Zeit von Raum- und Zeitmessung spricht. Diese als rein materiellen Vorgang in den Kausalzusammenhang einzubeziehen, widerspricht nicht der Transzendentalphilosophie. Raum und Zeit selbst würden dann auch in der Einsteinschen Theorie transzendentale Anschauungen sein, in denen sich die Naturvorgänge für uns abspielen.

4. **Der statische Kraftbegriff.** Um ihn aufzubauen, bedarf es des speziellen *Axioms der Schwerkraft:*

Axiom Ig: α) Unter den Kräften gibt es eine, die Schwere, für die $d\mathfrak{k} = dm\,\mathfrak{g}$ ist; β) $\mathfrak{g}$ hängt nur von der gesamten Massenverteilung ab, nach Newton ist im Punkt $\mathfrak{r}_1$

$$\mathfrak{g}_1 = \gamma \mathop{\mathrm{S}} \frac{dm}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}|^3} (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}),$$

wo die universelle Konstante γ von der gewählten Einheit der Masse abhängt.

Das Integral S ist über den ganzen Raum zu erstrecken.

Von *If* wird dann zunächst nur die erste Hälfte benutzt: im Gleichgewichtsfall (Statik) muß $\mathfrak{R} = \mathrm{S}\sum d\mathfrak{k} = 0$ sein. Kräfte sind also Vektoren, die mit der Schwere ins Gleichgewicht gesetzt werden können.

Der Übergang zur Kinetik wird dann gewöhnlich so formuliert: Ist $\mathrm{S}\sum d\mathfrak{k} \neq 0$, so tritt Bewegung ein und es gilt *If*. Diese Formulierung ist deshalb unzureichend, weil der Eindruck entstehen muß, als seien durch *Ig* und die erste Hälfte von *If* die Kräfte definiert, und als sei die zweite Hälfte dann ein Naturgesetz. So aufgefaßt wäre die Behauptung direkt falsch, da die Kräfte bei der Bewegung oft anders sind als in der Ruhe. Hängt man beispielsweise einen Körper vom Gewicht $G = mg$ an eine senkrecht herabhängende Feder und wartet Gleichgewicht ab, so muß die Feder eine nach oben gerichtete Kraft $Z = G$ ausüben, die bei kleinem G eine Funktion $Z(x)$ der Dehnung x der Feder, nämlich, annähernd dem x proportional, $Z = \lambda x$ ist. Wollte man nun sagen, daß bei einer Störung des Gleichgewichts durch Anstoß $m\frac{d^2x}{dt^2}$ gleich $G - \lambda x$

sei, so wäre das nur sehr roh richtig, also streng genommen falsch. Bei der Bewegung nämlich gibt die Feder wegen der Trägheit der eigenen Masse eine geringere Kraft als $-\lambda s$ an den Körper ab.

Immerhin kann man bei einem Aufbau des Newtonschen Grundgesetzes den stärkeren Nachdruck auf die Kräfteseite legen, das geschieht später in Ziff. 38 bis 41.

6. Der kinetische Kraftbegriff. Nach unserer Auffassung ist der physikalische Sinn von If folgender:

In bezug auf einen geeigneten Raum und eine geeignete Zeit sind alle Beschleunigungen $\mathfrak{w}$ zu beobachten und dann unter Zusammenfassung verwandter Erscheinungen in Klassen zu teilen (BACON: Dissecare naturam). Zu jeder Bewegungsklasse ist unter Elimination der der Einzelbewegung anhaftenden individuellen Konstanten ein gesetzmäßiger Ausdruck zu finden, der dem Axiom $I\varepsilon$ genügt, d. h. eine Funktion der geometrischen und physikalischen Variabeln des Punktes und seiner Umgebung ist (z. B. durch Übergang von dem Keplerschen Gesetz zu den Newtonschen Gravitationsgesetzen). Es ist Erfahrungstatsache, daß diese Elimination und Klassifikation durch Bildung der Beschleunigung gelingt. Durch Multiplikation mit dem geeignet gewählten konstanten dm entstehen die Kräfte $d\mathfrak{k}$, jede einer Klasse zugehörig. Die Zerlegung und Wiederzusammensetzung geschieht nach dem Parallelogrammgesetz der Kräfte, das in $I\delta$ enthalten ist. Die dm lassen sich so finden, daß, von dem Gravitationsgesetz Ig abgesehen, alle anderen Kräfte von dem dm unabhängig werden, so daß eine Beschleunigungsklasse (ein einzelnes Kraftgesetz) immer die entsprechenden Bewegungen verschiedener Massen umfaßt. Wir wollen dies noch formulieren als

Axiom $Ig\,\gamma$: In den anderen Kraftgesetzen außer dem Gravitationsgesetz kommt das dm des betrachteten Massenelements nicht vor.

Kraft ist also ein gesetzmäßiger Ausdruck für eine Klasse von Massenbeschleunigungen (H. 5).

Kraft ist demnach nicht, wie KIRCHHOFF behauptet, gleich Masse mal Beschleunigung.

Kraft gleich Ursache der Bewegung ist keine Definition, höchstens bei geeigneter Präzision des Wortes Ursache eine ungefähre Umschreibung von If.

Wahre Ursachen einer Bewegung sind andere physikalische oder materielle Erscheinungen. Durch den Kraftbegriff werden sie nur zu einzeln wirksamen Gruppen zusammengefaßt.

6. Das Parallelogramm der Kräfte. Danach ist klar, daß das Parallelogramm der Kräfte nichts mit der Zusammensetzung der Bewegungen zu tun hat. Es handelt sich ja nicht um die rein mathematische Zerlegung eines einzelnen Vektors $\mathfrak{w}$, sondern um die Zusammensetzung von Kraftgesetzen: „Peccant qui compositionem virium cum compositione motuum confundunt", sagt JOHANN BERNOULLI. Die Frage heißt: Gegeben sind geometrische und physikalische Daten, welche ein Kraftgesetz $d\mathfrak{k}_1$ bedingen, und solche, welche ein zweites Kraftgesetz $d\mathfrak{k}_2$ bedingen. Werden beide Gruppen von geometrischen und physikalischen Daten beobachtet, bedingen sie zusammen auch ein Kraftgesetz, und wie heißt es? Nicht einmal, daß sie eins bedingen, ist selbstverständlich und rein mathematisch beweisbar. Wir schälen deshalb aus $I\delta$ den folgenden Teil heraus:

Axiom $I\delta'$: Sind die Kraftgesetze $d\mathfrak{k}_1$, $d\mathfrak{k}_2$ ... durch ihre Ursachen alle an einem dm gegeben, so sind sie für die Bestimmung der Bewegung alle einer Kraft $d\mathfrak{K} = \sum d\mathfrak{k}$ gleichwertig.

Nun kann $I\,d'$ weiter zerlegt werden. Nach älteren Versuchen[1]) von DANIEL BERNOULLI, D'ALEMBERT und POISSON erledigte im wesentlichen DARBOUX das Problem, indem er folgenden Ersatz für $I\,d'$ zeigte:

$I\,d'\,\alpha$: Es gibt eine eindeutig bestimmte Resultante.

$I\,d'\,\beta$: Für die Zusammensetzung gilt das assoziative und das kommutative Gesetz.

$I\,d'\,\gamma$: Die Zusammensetzung ist invariant gegen die Orientierung im Raum.

$I\,d'\,\delta$: Gleichgerichtete Kräfte werden algebraisch addiert.

$I\,d'\,\varepsilon$: Die Zusammensetzung ist stetig.

SIACCI hat dann noch den Einfluß des Axioms untersucht:

$I\,d'\,\vartheta$: Die Zusammensetzung ist unabhängig vom Maßstab.

Nimmt man noch die Axiome hinzu:

$I\,d'\,\eta$: Die Zusammensetzungsformeln sind differenzierbar und

$I\,d'\,\iota$: $\mathfrak{k}+0=\mathfrak{k}$ und $0+\mathfrak{k}=\mathfrak{k}$,

so genügen bereits α, ε, ϑ, η, ι (H. 3)[2]).

7. **Allgemeine Axiome der Naturerkenntnis.** Die Axiome $I\,d'\,\alpha$ bis ι sind offenbar von sehr verschiedenem erkenntnistheoretischem Wert. $I\,d'\,\alpha$ macht überhaupt erst aus der Kraft einen selbständigen Begriff. Wäre α nicht erfüllt, so würde man den Kraftbegriff zu beseitigen haben. $I\,d'\,\varepsilon$ und ι sind heute noch weitgehend in der Physik angenommene Axiome allgemeinen Charakters wie $I\,a$ und b. $I\,d'\,\delta$ steht für sich; wenn die Größe der Kraft schon durch die linke Seite von $I\,f$ prinzipiell definiert ist, ist es ein selbständiges Axiom, das sehr plausibel, aber nicht selbstverständlich ist (vgl. hierzu Ziff. 39). Ganz anders stehen $I\,d'\,\beta, \gamma, \vartheta$ da. $I\,d'\,\beta$ sagt aus, daß die verschiedenen Kräfte, d. h. Ursachengruppen, keine Rangfolge haben, sondern gleichwertig und unabhängig nebeneinander stehen. $I\,d'\,\gamma$ ist eine Aussage über den Raum: er ist isotrop, d. h. er hat keine ausgezeichnete Richtung, ebenso nimmt man ihn als homogen an: er hat keine ausgezeichneten Stellen. Kommen ausgezeichnete Stellen oder Richtungen vor, so müssen sie durch Eigenschaften der Materie bedingt sein. Auch die Zeit gilt in gleichem Sinne als homogen. Es sind dies *allgemeine Axiome der Naturerkenntnis*:

Allgemeines Axiom A: Zeit und Raum sind homogen.

Allgemeines Axiom B: Der Raum ist isotrop.

$I\,d'\,\beta$ kann als ein Teil eines dritten allgemeinen Axioms aufgefaßt werden, des *Axioms C vom zureichenden Grunde:* Alles Geschehen muß seine erkennbare Ursache haben, durch die es eindeutig bestimmt ist.

Geschehen bedeutet in der Mechanik: Änderung der Bewegungsgröße $m\mathfrak{v}$ (Quantitas motus nach NEWTON). Die Ursachen aber verteilen sich auf Gruppen, deren jeder eine Kraft zugehört. Weiteres als diese Kräfte ist nicht maßgebend, insbesondere keinerlei Anordnung oder Gruppierung derselben. Symmetrien der Ursachengruppen bedingen also auch Symmetrien bei den Kräften, und diese müssen auch in den Bewegungsgesetzen zum Ausdruck kommen.

Nun noch ein Wort über $I\,d'\,\vartheta$. Nach $I\,f$ gibt es in der Mechanik drei unabhängig wählbare Maße, das Maß der Länge, das der Geschwindigkeit und das der Masse. Das Kraftmaß bleibt frei, solange es in der Welt keine ausgezeichnete Massenbeschleunigung gibt. Ist das der Fall, so ist $I\,d'\,\vartheta$ selbstverständlich. Daß es keine ausgezeichnete Länge gibt, hängt mit dem euklidischen Charakter

[1]) S. Enzykl. d. math. Wiss., Bd. IV, 1, Art. 1 (VOSS), Nr. 19.

[2]) Eine sehr gründliche Studie über diese Frage bei SCHIMMACK, Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition (Göttinger Dissert.), Halle 1903; eine historische Übersicht über die ältere Literatur außer bei VOSS noch in der Dissertation von ERNST GOHRKE, Die Zusammensetzung der Kräfte, Halle 1909.

des Raumes zusammen. Daß wir aber auch keiner ausgezeichneten Geschwindigkeit und keiner ausgezeichneten Masse einen Einfluß auf den prinzipiellen Aufbau der Mechanik zugestehen, ist keine selbstverständliche Annahme. In der Relativitätstheorie haben wir in der Tat eine ausgezeichnete Geschwindigkeit, die des Lichtes. Es gibt auch eine ausgezeichnete Masse, nämlich die astronomisch gemessene Masse Eins. Da sie aber erst festliegt, wenn über die Einheit der Länge und die Einheit der Geschwindigkeit bestimmt ist, so kann ihr keine bestimmte Wirkung zukommen, solange nicht etwa in einem nichteuklidischen Raum eine bestimmte Länge ausgezeichnet ist. Wir formulieren das

Allgemeine Axiom D: Es gibt keine ausgezeichnete Länge, keine ausgezeichnete Geschwindigkeit und keine ausgezeichnete Masse, welche für den Aufbau der klassischen Mechanik von Bedeutung sind.

8. Die Masse. Der Masse kommt an sich eine dreifache Bedeutung zu. Erstens erscheint sie in $I f$ auf der linken Seite als träge Masse. Dann aber erscheint sie in dem Newtonschen Gravitationsgesetz $I g$

$$d\mathfrak{k} = dm_1\,\mathfrak{g}_1 = dm_1\,\gamma\,\mathrm{S}\,dm\,\frac{\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}_1|^3}$$

zweimal, einmal als Faktor von $\mathfrak{g}_1$, als angezogene Masse (schwere Masse), dann in dem Integral S, das $\mathfrak{g}_1$ darstellt (anziehende Masse). Die Gleichheit von träger und schwerer Masse, d. h. die Unabhängigkeit der Gravitationsbeschleunigung von der Masse des beschleunigten Körpers kann als sehr genau erfüllt experimentell nachgewiesen werden und bildet auch noch ein wesentliches Fundament der Einsteinschen Mechanik. Die Gleichheit von schwerer und anziehender Masse ist experimentell sehr viel weniger genau nachzuweisen. Um diese Annahme zu stützen, nimmt man seit Newton das verallgemeinerte Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung hinzu, von dem später noch ausführlich die Rede sein wird (Ziff. 10 und 26). Danach sind die Kräfte, die zwei Massen aufeinander ausüben, einander gleich, und daraus ergibt sich dann die in Rede stehende Gleichheit oder wenigstens Proportionalität. Denn ist dm_1 die schwere Masse von 1, dm_2 die von 2, dM_1 die anziehende Masse von 1, dM_2 die von 2, so ist $dm_1\,dM_2 = dm_2\,dM_1$, also $\frac{dm_1}{dM_1} = \frac{dm_2}{dM_2}$ weder von 1 noch von 2 abhängig, also eine universelle Konstante. Die Masse, die zunächst als eine mathematische Hilfsgröße erscheint, kann durch einfache Versuchsreihen mit der Genauigkeit gemessen werden, die der Versuchsreihe anhaftet, etwa aus Schwingungsversuchen an einer Feder (s. H. 3). Die früher beliebten Auseinandersetzungen, ob man erst die Kraft und dann die Masse oder umgekehrt definieren müsse, sind bei der axiomatischen Methode hinfällig, nach der sich die Begriffe in ihrer logischen Abhängigkeit voneinander gegenseitig definieren[1]).

9. Das Galileische Trägheitsgesetz. Dieses ist in $I f$ enthalten. Wenn keine Kräfte wirken, so ist für jeden Raumteil $\mathrm{S}\,dm\,\mathfrak{w} = 0$, also jedes $\mathfrak{w} = 0$, also $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}t + \mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ konstant sind. Daß der Fall vielleicht nie exakt vorkommt, ist kein Einwand. Kein einziges Kraftgesetz wird je allein und genau vorhanden sein. Die vollständige Aussage ist eben $I f$, die auch so formuliert werden kann: Man hat Kraftgesetze $d\mathfrak{k}$ zu suchen, so daß, wenn $\mathfrak{w}$ die wirklich beobachtete Beschleunigung ist,

$$\left|\mathfrak{w} - \lim_{\Delta V \to 0}\frac{1}{\Delta m}\,\mathrm{S}\sum d\mathfrak{k}\right| < \varepsilon$$

[1]) Zu den Ausführungen dieser Ziffern. Enzykl. d. math. Wiss., Bd. V, 1, Art. 2 (Zemplén).

wird, wo ε die Genauigkeit der Beobachtung angibt. Über die apriorische Bedeutung des Trägheitsgesetzes werden wir noch später sprechen (Ziff. 38).

b) Systemmechanik.

α) Aufbau der Mechanik aus der Kontinuitätshypothese.

10. Die Spannungsdyade und das Gegenwirkungsprinzip. Wenn wir im folgenden von einem mit Materie erfüllten Raumstück V sprechen, so habe dieses stets abteilungsweise stetige Tangentialebene und also auch eine abteilungsweise stetige äußere Normale, die wir durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ gegeben denken. Bei wirklichen, nicht bloß gedachten Idealkörpern, herrsche sogar ausnahmslos Stetigkeit.

Axiom II 1a: Es ist $dm = \mu\, dV$, wo μ die Massendichte, eine endliche, abteilungsweise stetige Funktion des Ortes ist. (*Erste Kontinuitätshypothese.*)

Axiom II 1b: Die Kräfte $d\mathfrak{k}$ zerfallen in zwei Gruppen: räumlich verteilte und flächenhaft verteilte. Die räumlich verteilten sind von der Form $dV\mathfrak{q}$ (Beispiel *Ig*), wo die $\mathfrak{q}$ endliche, in Raum und Zeit abteilungsweise stetige Vektoren sind; die flächenhaft verteilten sind einem Flächenelement dF mit ausgezeichneter Außennormale $\mathfrak{n}$ zugeordnet: $d\mathfrak{k} = \mathfrak{s}_n\, dF$. Die $\mathfrak{s}_n$ sind ausnahmslos stetig und abteilungsweise stetig differenzierbare Funktionen des Ortes. (*Zweite Kontinuitätshypothese.*)

Das Axiom *If* muß jetzt bestimmter gefaßt werden:

Axiom If:*
$$\mu\mathfrak{w} = \sum \mathfrak{q} + \lim_{dV\to 0}\frac{1}{dV}\, \mathsf{S}\, \mathfrak{s}_n\, dF,$$

wo das Integral S über die Oberfläche des Volumens dV sich erstreckt. Aus diesem Axiom, insbesondere aus der Existenz des letzten Grenzwertes, folgen die Sätze:

Satz 1: Die $\mathfrak{s}_n$ sind homogene lineare Funktionen der Komponenten von $\mathfrak{n}$, d. h. sie sind das Produkt von $\mathfrak{n}$ mit einer Dyade (Tensor zweiter Stufe), dem Spannungstensor T

$$\mathfrak{s}_n = \mathsf{T}\,\mathfrak{n},$$

oder in Komponenten geschrieben[1])

$$X_n = X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z).$$

X, Y, Z bedeuten die Komponenten nach den Achsen, der Index gibt die ausgezeichnete Normale an.

In diesem Satz ist das Gegenwirkungsprinzip für die Spannungen enthalten:

Satz 1a: Am selben Ort und zur selben Zeit kehrt $\mathfrak{s}_n$ das Zeichen mit $\mathfrak{n}$ um. (Die Beweise sind bekannt, s. H. 1 und H. 5.)

Satz 2: Aus der Gleichung *If** wird

$$\mu\mathfrak{w} = \sum \mathfrak{q} + \nabla \mathsf{T},$$

oder in Komponenten geschrieben

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}.$$

(Explizite Form der Newtonschen Grundgleichung).

[1]) Hier und im folgenden ist von drei Gleichungen in kartesischen Koordinaten immer nur die erste geschrieben.

Satz 3 (Erster Fundamentalsatz der Mechanik: Schwerpunktssatz):

$$\int_V dm\,\mathfrak{w} = \int_V \sum \mathfrak{q}\,dV + \int_O \mathfrak{s}_n\,dF.$$

Die beiden ersten Integrale erstrecken sich über irgendeinen Volumteil V, das letzte über dessen Oberfläche O. Um ihn zu beweisen, braucht man nur die vorstehende Gleichung mit dV zu multiplizieren, über das Volumen zu integrieren und auf das letzte Glied den Gaußschen Satz anzuwenden.

Definition: Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Kräfte, die räumlich verteilten $\mathfrak{q}\,dV$ und die an der Oberfläche des betrachteten Raumteils angreifenden $\mathfrak{s}_n\,dF$ heißen für den Raumteil **äußere Kräfte**, im Gegensatz dazu die Spannungen $\mathfrak{s}\,dF$ im Inneren des Raumteils, die in der Gleichung nicht vorkommen, **innere Kräfte** (Spannungen). Da man den **Massenmittelpunkt** (fälschlich auch Schwerpunkt genannt) durch

$$\mathfrak{r}^* \int dm = \int \mathfrak{r}\,dm$$

definiert, so kann man den Satz schreiben (mit $m = \int dm$)

$$m\,\mathfrak{w}^* = \mathfrak{K}_a,$$

wo mit $\mathfrak{K}_a$ die Summe der äußeren Kräfte bezeichnet ist.

Da aus den Sätzen 1 und 3 wieder *I f** folgt, so sind mit den genannten Sätzen die wesentlichen Folgerungen der bisherigen Axiome erschöpft.

11. Das Boltzmannsche Axiom. *Axiom II 1c:* Die Spannungsdyade ist symmetrisch, d. h. sie ist ihrer konjugierten gleich. In Koordinaten:

$$X_y = Y_x, \qquad Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z.$$

Als Satz sind diese Gleichungen schon viel älter. Ihren axiomatischen Charakter erkannte zuerst BOLTZMANN[1]). **Aus diesem Axiom folgt:**

Satz 4 (Zweiter Fundamentalsatz der Mechanik: Momentensatz): Für jeden Raumteil ist

$$\int_V dm\,[\mathfrak{r}\mathfrak{w}] = \int_V dV\,[\mathfrak{r}\mathfrak{q}] + \int_O [\mathfrak{r}\mathfrak{s}_n]\,dF.$$

(Die Integrale sind wie im ersten Fundamentalsatz verstanden. Auch Beweis wie beim ersten Fundamentalsatz.)

Da die linke Seite gleich $\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{d}{dt}\int dm\,[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]$ ist, kann man den Satz so schreiben

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \mathfrak{M}_a,$$

in Worten: **Die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit des Drehimpulses $\mathfrak{D}$ ist gleich dem Moment $\mathfrak{M}_a$ der äußeren Kräfte.**

Da aus dem Satz 4 das *Axiom II 1c* zurückgewonnen werden kann, stellt er die volle Schlußfolgerung aus diesem Axiom dar.

Man kann Axiom *II 1c* so in zwei Teile zerlegen, daß man es erst nur für die **Statik** ausspricht (*II 1c'*), dann auch für die **Kinetik** (*II 1c''*). Das ist von gewisser Bedeutung (s. Ziff. 17 u. 24).

12. Der Energiesatz. **Satz 5** (Dritter Fundamentalsatz: Energiesatz): Es bezeichne $E = \frac{1}{2}\int_V dm\,\mathfrak{v}^2$ die kinetische Energie,

$$L_a = \int_V \mathfrak{q}\mathfrak{v}\,dV + \int_O \mathfrak{s}_n\mathfrak{v}\,dF$$

[1]) L. BOLTZMANN, Die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik. Populäre Schriften, 3. Aufl., S. 253—307. Leipzig 1925.

die Leistung der äußeren Kräfte, L_i die Leistung der inneren Spannungen, so ist

$$\frac{dE}{dt} = L_a + L_i[1]),$$

wo

$$L_i = -\underset{V}{\mathsf{S}} \mathsf{T}\Gamma dV = -\underset{V}{\mathsf{S}}\left\{X_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + X_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \cdots\right\} dV.$$

Die symmetrische Dyade Γ mit den 6 Komponenten

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

usw. heißt die $\mathfrak{v}$ entsprechende Deformationsdyade (v_x, v_y, v_z sind die drei Komponenten von $\mathfrak{v}$).

Allgemein gilt

Satz 6: Sei $\delta\mathfrak{r}$ irgendein stetig differenzierbarer Vektor mit den Komponenten ξ, η, ζ und Ψ die symmetrische Dyade mit den 6 Komponenten

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right).$$

usw., so gilt:

$$\underset{V}{\mathsf{S}}\, dm\,\mathfrak{w}\,\delta\mathfrak{r} = \underset{V}{\mathsf{S}}\, \mathfrak{k}\,\delta\mathfrak{r}\, dV + \underset{O}{\mathsf{S}}\, \mathfrak{s}_n\,\delta\mathfrak{r}\, dF - \underset{V}{\mathsf{S}}\, \mathsf{T}\Psi\, dV.$$

Satz 5 und Satz 6 folgen aus Satz 2 durch Multiplikation mit $\mathfrak{v}$ bzw. $\delta\mathfrak{r}$ und Integration über V unter Benutzung des Gaußschen Satzes, des Satzes 1 und des Axiomes von BOLTZMANN.

Umgekehrt folgen wegen der Willkür von $\delta\mathfrak{r}$ aus Satz 6 sowohl der erste Fundamentalsatz wie die Symmetrie der Spannungsdyade.

Satz 6 ist das Prinzip der virtuellen Arbeiten in der Mechanik der Kontinua.

Stellt man sich unter $\delta\mathfrak{r}$ eine willkürliche, bloß gedachte, differentielle Verschiebung vor (virtuelle Verschiebung) und setzt, was stets zulässig, aber nicht notwendig ist[2]), fest: $d\delta\mathfrak{r} = \delta d\mathfrak{r}$, ferner $\delta dt = 0$, $\delta t = 0$, so kann man die linke Seite von 6 umformen in

$$\frac{d}{dt}\mathsf{S}\, dm\,\mathfrak{v}\,\delta\mathfrak{r} - \delta E$$

und erhält die Lagrangesche Zentralgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathsf{S}\, dm\,\mathfrak{v}\,\delta\mathfrak{r} - \delta E = \delta A_a + \delta A_i \equiv \delta A,$$

indem man die beiden ersten Integrale als virtuelle Arbeit δA_a der äußeren Kräfte, das letzte Integral mit seinem Minuszeichen als virtuelle Arbeit der inneren Kräfte bezeichnet. δA ist die gesamte virtuelle Arbeit aller Kräfte. Dieses (Teil-) Prinzip der virtuellen Arbeiten enthält nicht mehr als die bisherigen Axiome[3]).

13. Die Unterscheidung der Systeme nach dem Charakter der Spannungsdyade. Erstens: Systeme ohne innere Arbeit. Die allgemeine Mechanik ist

---

[1]) Dies ist die Definition von L_i.

[2]) Darüber s. G. HAMEL, Math. Ann. Bd. 59, S. 416, 1904.

[3]) Zu dieser Ziffer vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 4, Art. 30 (HELLINGER).

damit fertig. Es sind weiter spezielle Systeme zu unterscheiden, je nach dem Charakter der Spannungsdyade. Wir suchen zuerst Systeme ohne virtuelle innere Arbeit, für die also stets

$$\mathsf{T}\Psi = 0$$

ist und also die Zentralgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{S}\, dm\, \mathfrak{v}\, \delta\mathfrak{r}) - \delta E = \delta A_a .$$

Nun kann die obige Gleichung (in Koordinaten geschrieben)

$$X_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + X_y\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \cdots = 0$$

erfüllt sein:

a) ohne daß eine Beziehung zwischen den sechs Spannungsgrößen $X_x \ldots$ vorgeschrieben wäre, d. h. für alle $X_x, X_y \ldots$; dann muß $\Psi = 0$ sein, woraus folgt

$$\delta\mathfrak{r} = \delta\mathfrak{c} + [\delta\mathfrak{d}(\mathfrak{r} - \mathfrak{c})],$$

wo $\mathfrak{c}$, $\delta\mathfrak{c}$, $\delta\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{r}$ unabhängige Vektoren sind. Das heißt, die virtuellen Verschiebungen des Körpers bestehen aus Translation und Drehung, der Körper ist starr (s. H. 1). Für ihn ist $\delta A_i = 0$, oder das Prinzip der virtuellen Arbeiten nimmt die obenstehende Form an:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{S}\, dm\, \mathfrak{v}\, \delta\mathfrak{r} - \delta E = \delta A_a .$$

Die Mechanik zeigt, daß diese Gleichung bzw. die gleichwertigen Fundamentalsätze genügen, um aus den äußeren Kräften die Bewegung des starren Körpers zu bestimmen.

b) Es kann eine linear homogene Beziehung zwischen den $X_x, X_y \ldots$ vorgeschrieben sein. Setzen wir den Körper als isotrop voraus, d. h. ohne ausgezeichnete Richtung, so folgt aus dem allgemeinen Axiom der Isotropie des Raumes und aus dem Prinzip des zureichenden Grundes (s. B und C in Ziff. 7), daß diese Beziehung invariant gegen Drehung sein muß. Da $X_x + Y_y + Z_z$ die einzige lineare Invariante von T ist, muß die Beziehung lauten

$$X_x + Y_y + Z_z = 0 .$$

Soll unter dieser Nebenbedingung stets $\mathsf{T}\Psi = 0$ sein, so muß

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

sein, während die drei anderen Komponenten von Ψ wieder Null sind. Es folgt (H. 1)

$$\delta\mathfrak{r} = \delta\mathfrak{c} + [\delta\mathfrak{d}(\mathfrak{r} - \mathfrak{c})] + \delta\lambda(\mathfrak{r} - \mathfrak{c}) - \delta\mathfrak{p}(\mathfrak{r} - \mathfrak{c})^2 + 2(\mathfrak{r} - \mathfrak{c}) \cdot \delta\mathfrak{p}(\mathfrak{r} - \mathfrak{c})$$

mit willkürlichen, konstanten

$$\mathfrak{c}, \quad \delta\mathfrak{c}, \quad \delta\mathfrak{d}, \quad \delta\lambda, \quad \mathfrak{p}, \quad \delta\mathfrak{p}.$$

Diese Bewegungen stellen die 10gliedrige Gruppe der konformen Transformationen des Raumes dar. Die physikalische Realisierung dieses Falles ist nicht bekannt.

c) Es können zwei lineare homogene Gleichungen zwischen den $X_x, Y_y \ldots$ vorgeschrieben sein. Aus denselben Gründen wie in b müssen sie heißen

$$X_x = Y_y = Z_z = -p ,$$

woraus von selbst $X_y = Y_z = Z_x = 0$ folgen. Für $\delta \mathfrak{r}$ folgt aus $\mathsf{T}\Psi = 0$

$$\operatorname{div} \delta \mathfrak{r} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

d. h. das System ist **inkompressibel** (Inkompressible Flüssigkeit). p heißt der Druck in der Flüssigkeit. Auch hier genügen die Gleichungen $I/$* zusammen mit der sog. **Kontinuitätsgleichung**

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

zur Bestimmung der Bewegung, wenn noch die nötigen Anfangs- und Randbedingungen gegeben sind (s. Ziff. 44).

d) Sind drei lineare homogene Gleichungen zwischen den $X_x \ldots$ vorgeschrieben, so heißen sie bei Isotropie

$$\mathsf{T} = 0,$$

so daß $\delta \mathfrak{r}$ beliebig bleibt. Es wäre dies ein System ohne jede innere Spannung, was nur idealisiert vorkommt (loser Punkthaufen).

Unnötig zu sagen, daß die beiden Fälle des starren Körpers und der inkompressiblen Flüssigkeit auch ideale Fälle darstellen, die in Wirklichkeit nie vorkommen, aber doch oft eine gute Annäherung darstellen. Das Einfache besteht darin, daß **man über die inneren Spannungen weiter nichts zu wissen braucht, um die Bewegung zu bestimmen.** Sie entarten zu mathematischen Hilfsgrößen, die man zu eliminieren sucht, was beim starren Körper durch die Fundamentalsätze geschieht. Wir werden solche Kräfte später allgemein als **Reaktionskräfte** bezeichnen (s. Ziff. 15).

14. Zweitens: Systeme mit innerer Arbeit. Bei diesen Systemen muß man, um die Bewegung bestimmen zu können, Genaueres über die Dyade T wissen. Sie hängt nach bisherigen Erfahrungen wesentlich von zwei weiteren Dyaden ab, einmal von der Geschwindigkeitsdyade Γ, welche die 6 Komponenten

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

usw. hat, und zweitens von derjenigen Deformationsdyade, welche die Gestaltsänderung eines differentiell kleinen Volumens um den betrachteten Punkt gegen einen normalen Zustand angibt. Ist dieser durch $\mathfrak{r}_0$ gegeben, also $\mathfrak{l} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$ die Verschiebung mit den Komponenten u, v, w, so hat diese Deformationsdyade die 6 Komponenten

$$e_x = 2\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$e_y = 2\frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

usw. [s. H. 5[1]].

Sie heiße $2\Delta(\mathfrak{l})$. Bei kleinen Verschiebungen pflegt man die quadratischen Glieder zu vernachlässigen. Wir schreiben sie dann $2\Delta'(\mathfrak{l})$.

---

[1]) Auch E. u. F. Cosserat, Théorie des corps déformables, S. 123ff.

a) **Bei vollkommen elastischen Systemen**, die auch nur Idealsysteme sind, ist T eine bloße Funktion von Δ bzw. Δ'. Außerdem nimmt man an, daß ein Potential existiere, d. h. daß

$$d V \mathsf{T} \Psi = d m \, \delta U_i(\Delta) = d m \frac{\partial U_i}{\partial \Delta} \delta \Delta (\mathfrak{l})$$

Dabei ist Ψ die Dyade von $\delta \mathfrak{r} = \delta \mathfrak{l}$. Wir schreiben sie ausführlich $\Psi(\delta \mathfrak{l})$.

Bei kleinen Verschiebungen ist nun mit konsequenter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung

$$\delta \Delta' (\mathfrak{l}) = \Psi (\delta \mathfrak{l})$$

und daher

$$\mathsf{T} = \mu \frac{\partial U_i}{\partial \Delta'} .$$

Nimmt man noch U_i homogen von der zweiten Ordnung, das Medium homogen und isotrop, so folgt, mit zwei Materialkonstanten $\varkappa \lambda$,

$$\mathsf{T} = \varkappa \Delta' + \lambda \operatorname{div} \mathfrak{l} \cdot \mathsf{I} ,$$

wo I die Identitätsdyade (den Idemfaktor) $\begin{matrix}100\\010\\001\end{matrix}$ bedeutet.

Bei endlichen Verschiebungen bestehen wesentlich kompliziertere Beziehungen [H. 5[1]].

Vollkommene Flüssigkeiten (auch ideale oder reibungsfreie genannt) sind dynamisch dadurch definiert, daß

$$X_x = Y_y = Z_z = -p \, (p > 0) ,$$
$$X_y = Y_z = Z_x = 0$$

ist. Es muß dann, bei Annahme von Isotropie

$$p = p (\mu)$$

sein (**Zustandsgleichung**). In dieser, wie in den obigen allgemeineren Beziehungen können noch andere physikalische Variable, z. B. die Temperatur oder die Entropie vorkommen.

b) **Bei Systemen, insbesondere Flüssigkeiten mit innerer Reibung** nimmt man an, daß die Spannungsdyade sich in zwei Teile teilt, der erste Teil T_1 entspricht den obigen evtl. modifizierten Annahmen, der zweite T_2 hängt linear von Γ ab. Bei Isotropie ergibt sich

$$\mathsf{T}_2 = \varkappa \Gamma + \lambda \operatorname{div} \mathfrak{v} \cdot \mathsf{I} .$$

$\varkappa$ und λ sind Materialkonstante, die vor allem der Bedingung zu unterwerfen sind, daß die Leistung von T_2 stets negativ ist (Dissipation, Energieverwandlung in Wärme).

c) **Bei allgemeinen Systemen, bei denen elastische Nachwirkung, Plastizität usw. zu berücksichtigen ist**, hat man anzunehmen, daß T von Γ, von $\Delta (t)$, aber auch noch von $\Delta (t - \tau)$ für alle $\tau > 0$ abhängt (Nachwirkung). Vielleicht auch von $\frac{d\Delta}{dt}$ usw. (JAUMANN). Für elastische Nachwirkung macht BOLTZMANN den Ansatz

$$\mathsf{T} = \int_0^\infty \mathfrak{g}^{(4)} (\tau) \, \Delta' (t - \tau) \, d\tau .$$

---

[1] S. auch Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 4, Art. 23 (MÜLLER-TIMPE).

Dieses $\mathfrak{E}^{(4)}$ wird allgemein ein linearer Operator (Tensor) vierter Stufe mit 36 Komponenten sein, der für $\tau = 0$ besonders groß ist, dann stark gegen Null abfällt[1]).

β) Aufbau der Mechanik vom starren Körper aus.

15. Statik des einzelnen starren Körpers. Wir beschäftigen uns mit dem Idealobjekt des einzelnen starren Körpers, der kinematisch dadurch definiert ist, daß er bei der Bewegung sich selbst kongruent bleibt. Für jede seiner Bewegungen gilt daher

$$\delta\mathfrak{r} = \delta\mathfrak{c} + [\delta\mathfrak{d}\,(\mathfrak{r} - \mathfrak{c})],$$

insbesondere

$$\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{c}} + [\dot{\mathfrak{d}}\,(\mathfrak{r} - \mathfrak{c})]$$

(Euler), wo $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{r}$ unabhängig sind. Zunächst wird die Statik allein betrachtet.

Definition 1: Bei jedem, bestimmten Bindungen unterworfenen System (z. B. einem starren Körper) zerfallen die Kräfte in zwei Arten:

erstens die Reaktionskräfte, deren Ursachen allein in den vorgeschriebenen Bindungen zu suchen sind, die also nur dazu da sind, diese Bindungen aufrechtzuerhalten;

zweitens die eingeprägten Kräfte, die mindestens teilweise durch andere Ursachen bedingt sind.

Die Summe der ersteren, die einem dm zugeordnet sind, heiße kurz $d\mathfrak{R}$, die Summe der letzteren $d\mathfrak{K}$, so daß Axiom *I f* die Gestalt annimmt

$$dm\,\mathfrak{w} = d\mathfrak{R} + d\mathfrak{K},$$

im Falle der Statik also (Ruhe des Körpers)

$$0 = d\mathfrak{R} + d\mathfrak{K}$$

(d'Alembertscher Ansatz).

Definition 2: Ein Kräftesystem heißt am starren Körper (ebenso bei irgendeinem System) einem anderen äquivalent oder gleichwertig, wenn es dem Körper von derselben Lage und derselben Geschwindigkeit aus dieselben Beschleunigungen erteilt. Es heißt äquivalent 0 oder im Gleichgewicht am System, wenn seine Wirkung dieselbe ist als ob gar keine eingeprägten Kräfte wirkten. Das System selbst heißt dagegen im Gleichgewicht, wenn es dauernd ruht.

Die Axiome *II 1a—c* werden jetzt nicht angenommen.

Axiom II 2a: Gehen die Angriffsgeraden mehrerer Kräfte an einem starren Körper durch einen Punkt, so sind sie zusammen einer Kraft gleichwertig, welche an diesem Punkt angreift und gleich der geometrischen Summe der Kräfte ist, unabhängig davon, ob noch andere Kräfte da sind oder nicht (vgl. *C* in Ziff. 7).

Dieses Axiom enthält den bekannten Verschiebungssatz: Man darf an einem starren Körper eine Kraft beliebig in ihrer Angriffslinie verschieben.

Nimmt man aus dem Kräfteparallelogrammsatz folgende Umkehrung hinzu: $d\mathfrak{K}$ ist äquivalent $\sum d\mathfrak{k}$, wenn $d\mathfrak{K} = \sum d\mathfrak{k}$ und alle Kräfte am selben Punkt angreifen, so folgt aus unserm Axiom der

Satz: Man kann die an einem starren Körper angreifenden Kräfte auf drei Einzelkräfte zurückführen, welche durch drei gegebene Punkte hindurchgehen (H. 3).

In bekannter Weise kann man dann diese drei Kräfte weiter reduzieren auf eine Kraft $\mathfrak{K}$, die in einem willkürlich gewählten Punkt *O* angreift und auf

[1]) Literatur in dem zitierten Enzyklopädieartikel von Hellinger.

ein Kräftepaar, d. h. zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte in verschiedenen, aber parallelen Angriffslinien. Es ist

$$\mathfrak{K} = \mathsf{S}\, d\mathfrak{K} \text{ die sog. Resultierende}$$

und, mit dem Vektor $\mathfrak{r}$ von O zum Angriffspunkt der Kraft,

$$\mathfrak{M} = \mathsf{S}\,[\mathfrak{r}\, d\mathfrak{K}] \text{ das Moment des Kräftepaars.}$$

Fundamentalsatz: Kräftesysteme mit gleichem $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ sind einander äquivalent.

Axiom II 8b: Sind $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{M}$ oder beide nicht 0, so ist das Kräftesystem sicher nicht äquivalent 0.

Satz: Mithin sind $\mathfrak{K} = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ hinreichende und notwendige Bedingungen des Gleichgewichts des Kräftesystems am einzelnen starren Körper.

Axiom II 8c: Sind $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ beide 0, so bleibt der Körper in Ruhe, wenn er in Ruhe war, andernfalls nicht.

Satz: Mithin sind $\mathfrak{K} = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$ auch hinreichende und notwendige Bedingungen für das Gleichgewicht des starren Körpers, vorausgesetzt daß der Körper zu Anfang in Ruhe war.

Diese Axiome *II 8* folgen natürlich aus den beiden Fundamentalsätzen in b, α (Ziff. 10, 11), wenn man noch weiß, daß beim einzelnen starren Körper die Reaktionskräfte mit den inneren Spannungen identisch sind, sind aber ohne die Axiome *II 1* in b, α von den Axiomen *I* unabhängig. Über diese Identität sprechen wir in der folgenden Nummer.

16. Statik von freien Systemen starrer Körper. Daß für den einzelnen starren Körper die inneren Kräfte zu Reaktionskräften werden, ist nach Ziff. 14 und 15 klar. Denn da Γ und Δ für den starren Körper ihre Bedeutung verlieren, büßen die inneren Spannungen des starren Körpers alle Ursachen ein bis auf die Bedingung des Starrseins. Wohl aber müssen wir noch ausdrücklich formulieren, daß beim einzelnen starren Körper die Reaktionskräfte auch nur die inneren Kräfte sind, d. h. die inneren flächenhaft verteilten Spannungen. Wir formulieren das allgemein so:

Axiom II 8d: Berühren sich zwei Körper oder Stücke von Körpern (sie brauchen nicht starr zu sein) längs einer Fläche, längs einer Kurve oder in einzelnen Punkten, so üben sie dort Kräfte aufeinander aus, welche allein dazu dienen, die Berührungsbedingung und evtl. weitere Bewegungseinschränkungen an der Berührungsstelle aufrechtzuerhalten (**Stützkräfte**); je nach den drei Fällen sind diese Kräfte flächenhaft verteilt (Spannungen $\mathfrak{s}\, dF$) oder linienhaft oder endlich. Die beiden letzten Fälle sind nur Idealfälle bei starren Körpern und kommen sonst nicht vor.

Axiom II 8e: Die Stützkräfte des vorigen Axioms erfüllen das Prinzip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Aus *II 8d* folgt, daß beim einzelnen starren Körper die Reaktionskräfte nur innere Kräfte sind, denn sie halten die Berührung längs eines gedachten Schnittes durch den Körper aufrecht und sind dann nach *II 8d* Spannungen an dieser Fläche.

Sind die Körper, die sich in einem Punkt berühren, starr, so macht dieser Idealfall eine weitere Annahme nötig, die in allgemeineren Fällen unnötig ist:

Axiom II 8f: Berühren sich zwei **starre** Körper in einem isolierten Punkt, so können sie dort auch noch endliche Momente aufeinander ausüben, die ebenfalls einander entgegengesetzt gleich sind.

Da wir stets ein Stück eines starren Körpers auch als einen solchen auffassen können, so folgt aus Axiom *II 8d* die Existenz der inneren Spannungen $\mathfrak{s}$

und weiterhin, daß diese $\mathfrak{s}$ allein den Zusammenhang aufrechterh
daß

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dV} = \frac{\partial \mathfrak{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{s}_z}{\partial z}.$$

Betrachten wir jetzt ein System starrer Körper, die sich irg seitig berühren, so gilt der

Satz: Für jedes System starrer Körper muß die Summe der ä und die Summe ihrer Momente Null sein, falls Gleichgewicht des des Kräftesystems herrschen soll. Äußere Kräfte sind dabei diejeni einzelnen starren Körper äußere sind, mit Ausnahme der Stützkrä momente (Axiom *II 9d* und *9f*), welche die starren Körper aufeina

Dieser Satz folgt ohne weiteres durch Addition von $\mathfrak{M}$ = für die einzelnen starren Körper unter Beachtung der Axiome

Umgekehrt, nimmt man diesen Satz als Axiom an, so folgen *I* soweit, als sie aussagen, daß für die gesamte Wirkung zweier T einander die Summe der Kräfte und die Summe der Momente g gleich sein muß.

17. Statik beliebiger Systeme; Erstarrungsprinzip. *Axio* jedes Teilsystem muß im Gleichgewichtsfall die Summe der ä und die Summe ihrer Momente Null sein, oder, anders ausgedrü das Gleichgewicht nicht, wenn man sich den Teil in der Lage, in findet, erstarrt denkt (hierin liegt die Bedeutung des starren K allgemeine Mechanik).

Wendet man dieses Axiom bei einem infinitesimal kleinen an, so folgt die Symmetrie der Spannungsdyade für den Fall der Ziff. 11), falls vorausgesetzt wird, daß das Kontinuitätsaxiom der auch für die räumlich verteilten Kräfte gilt oder diese Kräfte v stärkerer als der zweiten Ordnung in den Lineardimensionen elements klein sind.

Da wir die Unabhängigkeit dieses Axioms von den Axiom *II a, b* nachweisen werden (s. Ziff. 42), so folgt auch die Unab Erstarrungsprinzips.

18. Statik gebundener Systeme starrer Körper. Wir bind starrer Körper aus Ziff. 16 weiter, indem wir annehmen, daß ei starren Körpern ruhen oder in bestimmt gegebener Weise bewegt Körper wollen wir jetzt nicht zum System zurechnen, sondern al körper bezeichnen (z. B. eine Kugel rolle auf der Erde; die Erde w oder in bekannter Weise als bewegt angesehen und als starr). V Statik des starren Körpers auf die n Körper, die jetzt zum Syst an, so bekommen wir $2n$ vektorielle oder $6n$ skalare Gleichunge denken wir uns alle Reaktionskräfte eliminiert, d. h. nach de Ziff. 15 und 16 alle die Kräfte zwischen zwei sich berührenden K ihre Ursachen nur in den vorgeschriebenen Bewegungsbeschränku Wir erhalten so eine gewisse Anzahl von Gleichungen und Ungleich allgemein gehaltenen eingeprägten Kräften, die wir die allgeme gewichtsbedingungen der Kräfte am gegebenen System Sind sie erfüllt, so heißt das Kräftesystem am System im Glei Ungleichheiten entstehen aus Ungleichheiten für die Reaktionsk

Axiom II 9h: Berühren sich zwei Körper in einem Punkt, s drei Komponenten jeder Stützkraft so viele Reaktionskräfte, einschränkungen da sind.

Findet also kein Gleiten statt, so bestehen drei Bewegungseinschränkungen und die ganze Stützkraft ist Reaktionskraft (Normaldruck und Haftreibung). Ist aber Gleiten gestattet, so findet nur eine Bewegungseinschränkung statt (Nichteindringen des einen Körpers in den andern) und also ist auch nur eine Stützkomponente Reaktionskraft. Diese ist durch die einzige durch die Berührungsbedingung ausgezeichnete Richtung bestimmt, steht also senkrecht auf der gemeinsamen Tangentialebene (nach dem Axiom des zureichenden Grundes C in Ziff. 7); sie ist ein Druck.

Haftreibung und **Normaldruck** sind also **Reaktionskräfte**, die **Gleitreibung** dagegen ist eine **eingeprägte Kraft**, sie ist ja auch außer von der Berührungsbedingung noch von den physikalischen Eigenschaften der Körper abhängig. (Daß die Haftreibung durch eine physikalisch bedingte **Ungleichheit** eingeschränkt ist, kommt für die in Rede stehende Unterscheidung nicht in Betracht.)

Axiom II Bi: Analoges gilt für die Momente, die nach *II Bf* in isolierten Berührungspunkten starrer Körper auftreten können.

Ist bohren, d. h. drehen um die gemeinsame Normale ausgeschlossen, so wird die entsprechende Momentkomponente Reaktionsmoment. Ist rollen, d. h. drehen um jede in der Tangentialebene gelegene Achse ausgeschlossen, so werden die Momentkomponenten in der Tangentialebene Reaktionsmomente, andernfalls sind sie eingeprägte Momente.

19. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten. **Definition:** Es sei ein bestimmtes mechanisches System gegeben mit seiner kinematischen Konstitution, d. h. mit genauer Angabe etwaiger Bewegungseinschränkungen. Jedem Punkt werde ein infinitesimaler Vektor $\delta\mathfrak{r}$ zugeordnet, seine virtuelle Verschiebung. Diese sei zeitlos und mit der kinematischen Konstitution verträglich, sonst beliebig. Zeitlos heißt: die Stützflächen bleiben, wenn sie bewegt sind, da, wo sie augenblicklich sind, oder $\delta t = 0$ und $\delta dt = 0$. Vorausgesetzt sei hier volle Regularität: die sich berührenden Körperbegrenzungsflächen usw. besitzen ausnahmslos Tangentialebenen[1]).

Axiom II Bk: Bei allen möglichen virtuellen Verschiebungen ist $\mathsf{S}\, d\mathfrak{K}\, \delta\mathfrak{r} \leqq 0$ notwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung für die eingeprägten Kräfte.

Bemerkung 1. Sind nur umkehrbare Bindungen da oder befinden wir uns im Innern des zulässigen Bewegungsbereichs, so darf statt jedes $\delta\mathfrak{r}$ auch $-\delta\mathfrak{r}$ genommen werden, und infolgedessen heißt die Gleichgewichtsbedingung hier $\mathsf{S}\, d\mathfrak{K}\, \delta\mathfrak{r} = 0$ (Johann Bernoulli), das Kleinerzeichen gilt also nur für einseitige Bindungen.

Bemerkung 2. Das Prinzip ist für alle bis jetzt bekannten idealisierten Systeme mit Bindungen beweisbar (vgl. Ziff. 13). Für Systeme starrer Körper folgt es aus den Axiomen *II B* und *I* (Beweise teilweise in Appells Mécanique rationelle, vollständig bei H. 1), für inkompressible Flüssigkeiten kennen wir es schon (s. Ziff. 13). Der innere Druck p ist hier die Reaktionskraft. Da μ konstant ist, wird die Gleichung $p = p(\mu)$ gegenstandslos. Der Druck verliert seine Ursache. Das Prinzip gilt auch für unausdehnbare, biegsame oder nichtbiegsame Seile (vgl. darüber die folgende Ziffer).

Von solchen beweisbaren Fällen kann man zu allgemeineren Fällen durch das Axiom aufsteigen:

Axiom II Bk:* Systeme mit denselben virtuellen Verschiebungen sind statisch äquivalent. Dieses Axiom bildet den Kern der bekannten Flaschenzugbeweise Lagranges und anderer Beweise[2]).

[1]) Über nichtreguläre Fälle s. P. Stäckel, Bemerkungen zum Prinzip des kleinsten Zwanges, Sitzungsber. Heidelb. Akad. 1919.

[2]) S. Enzykl. d. math. Wiss., Bd. IV, 1, Art. 1 (Voss), Nr. 32.

Bemerkung 3. Auf eine fast paradox erscheinende Tatsache ist hier hinzuweisen. Nach Ziff. 16, Axiom *II 8d*, sind die Stützkräfte, die zwei Körper an einer gedachten oder wirklichen Trennungsfläche aufeinander ausüben, Reaktionskräfte, wenn keine relative Bewegung an der Trennungsfläche stattfindet. Es ist auch klar, daß diese Kräfte zusammen keine Arbeit leisten. Gleichwohl wäre es falsch, schließen zu wollen, daß nun alle inneren Spannungen eines Körpers Reaktionskräfte seien und also keine Arbeit leisten (s. Ziff. 13 u. 14). Diese innere Arbeit, dort mit dA_i bezeichnet, ist also bei nichtstarren Körpern sehr wohl zu beachten. Aber man braucht nun nicht noch besonders für eine einzelne innere wirkliche oder gedachte Trennungsfläche ein Arbeitsglied hinzuzufügen, wenn keine relative Bewegung stattfindet. Der Übergang von den einzelnen Trennungsflächen zur Gesamtheit der inneren Spannungen ist hinsichtlich der Arbeit also mit Vorsicht zu vollziehen. **Man kann die innere Arbeit nicht als Summe über die Arbeiten an allen denkbaren Trennungsflächen im Innern des Körpers definieren,** sondern man muß sie besonders definieren (s. Ziff. 12).

20. Der Körper mit ausgezeichneter Mittellinie (Seil und Balken). Die Einheitsvektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$ geben das begleitende Dreikant der Mittellinie. In einem Schnitt senkrecht zur Mittellinie reduzieren wir die Spannungen $\mathfrak{s}_t dF$ in bezug auf den Durchstoßpunkt mit der Mittellinie und bekommen so die resultierende Zugkraft $Z\mathfrak{t}$, die resultierende Schubkraft $S\mathfrak{n} + S'\mathfrak{b}$, das resultierende Torsionsmoment $M\mathfrak{t}$ und das resultierende Biegungsmoment $B\mathfrak{n} + B'\mathfrak{b}$.

Legen wir zwei Schnitte, welche auf der Mittellinie das Element ds abschneiden. Reduziert auf den Schnittpunkt O in der ersten Ebene, mögen die äußeren Kräfte des Körpers, die an dem Stück der Länge ds angreifen, die Resultierende $\mathfrak{g}\,ds$ und das Moment $\mathfrak{G}\,ds$ haben, dann gelten nach dem Erstarrungsprinzip die folgenden beiden Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{d}{ds}(Z\mathfrak{t} + S\mathfrak{n} + S'\mathfrak{b}) + \mathfrak{g} = 0,$$

$$\frac{d}{ds}(M\mathfrak{t} + B\mathfrak{n} + B'\mathfrak{b}) + S[\mathfrak{t}\mathfrak{n}] + S[\mathfrak{t}\mathfrak{b}] + \mathfrak{G} = 0.$$

Wegen

$$[\mathfrak{t}\mathfrak{n}] = \mathfrak{b}, \qquad [\mathfrak{t}\mathfrak{b}] = -\mathfrak{n},$$

ferner nach den Frenet-Serretschen Formeln (ϱ, ϱ' Krümmungs- und Torsionsradius)

$$\frac{d\mathfrak{t}}{ds} = \frac{1}{\varrho}\mathfrak{n}, \qquad \frac{d\mathfrak{b}}{ds} = \frac{1}{\varrho'}\mathfrak{n}, \qquad \frac{d\mathfrak{n}}{ds} = -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{t} - \frac{1}{\varrho'}\mathfrak{b}$$

nehmen die Grundformeln die Gestalt an

$$\mathfrak{t}\left(\frac{dZ}{ds} - \frac{S}{\varrho}\right) + \mathfrak{n}\left(\frac{dS}{ds} + \frac{1}{\varrho}Z + \frac{1}{\varrho'}S'\right) + \mathfrak{b}\left(\frac{dS'}{ds} - \frac{1}{\varrho'}S\right) + \mathfrak{g} = 0,$$

$$\mathfrak{t}\left(\frac{dM}{ds} - \frac{1}{\varrho}B\right) + \mathfrak{n}\left(\frac{dB}{ds} + \frac{1}{\varrho}M + \frac{1}{\varrho'}B' - S'\right) + \mathfrak{b}\left(\frac{dB'}{ds} - \frac{1}{\varrho'}B + S\right) + \mathfrak{G} = 0.$$

In Komponenten zerlegt, gibt das sechs Differentialgleichungen für Z, S, S', M, B, B', ϱ, ϱ'.

Das Seil heißt nun **unausdehnbar**, wenn die Länge der Mittellinie sich nicht ändern kann. Nach dem Axiom des zureichenden Grundes (*C* in Ziff. 7) wird dann Z eine Reaktionskraft. **Sie leistet in diesem Falle keine Arbeit.**

Beweis: Um die virtuelle Arbeit zu berechnen, haben wir die linke Seite der ersten Gleichung mit $\delta\mathfrak{r}\,ds$ und analog die zweite mit $\delta\mathfrak{b}\,ds$ zu multiplizieren, beide Gleichungen zu addieren und dann über die Länge der Mittellinie zu integrieren. Dabei bedeutet $\delta\mathfrak{b}$ eine virtuelle Drehung des Seilelementes um O. Wir nehmen an, daß sich bei einer Bewegung die Teile zwischen benachbarten Trennungsflächen wenigstens mit genügender Annäherung wie starre Körper bewegen[1]). Die Integrale

$$\int_0^l \mathfrak{g}\,\delta\mathfrak{r}\,ds \qquad \text{und} \qquad \int_0^l \mathfrak{G}\,\delta\mathfrak{b}\,ds$$

liefern Bestandteile für δA_a, die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte. Die anderen Integrale geben nach partieller Integration:

$$(Z\mathfrak{t}+S\mathfrak{n}+S'\mathfrak{b})\,\delta\mathfrak{r}+(M\mathfrak{t}+B\mathfrak{n}+B'\mathfrak{b})\,\delta\mathfrak{b}\Big|_0^l$$

$$-\int_0^l (Z\mathfrak{t}+S\mathfrak{n}+S'\mathfrak{b})\frac{d\,\delta\mathfrak{r}}{ds}\,ds-\int_0^l (M\mathfrak{t}+B\mathfrak{n}+B'\mathfrak{b})\frac{d\,\delta\mathfrak{b}}{ds}\,ds+\int_0^l (S\mathfrak{b}-S\mathfrak{n})\,\delta\mathfrak{b}\,ds;$$

Die vor den Integralen stehenden Ausdrücke bedeuten die virtuellen Arbeiten an den Enden des Seiles. Entweder verschwinden sie, wenn $\delta\mathfrak{r}=0$ bzw. $\delta\mathfrak{b}=0$ an den Enden sind, d. h. die Enden festgehalten bzw. eingespannt sind und deshalb dort die Z, S, S' bzw. M, B, B' Reaktionsgrößen werden. oder $\delta\mathfrak{r}$ und $\delta\mathfrak{b}$ sind nicht Null und dann sind die $Z \ldots M \ldots$ an den Enden eingeprägte Kraftgrößen, die in Rede stehenden Glieder sind der Arbeit δA_e der eingeprägten Kräfte zuzuzählen, wozu auch die Arbeiten der $\mathfrak{g}\,ds$ resp. $\mathfrak{G}\,ds$ gehören. Die drei übrigbleibenden Integrale bilden die innere Arbeit δA_i. Das hierin einzig vorkommende Glied mit der Zugspannung Z kann wegen $d\,\delta\mathfrak{r}=\delta\,d\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{t}\,ds=d\mathfrak{r}$ auch geschrieben werden

$$-\frac{1}{2}\int_0^l Z\,\frac{\delta\,d\mathfrak{r}^2}{ds}.$$

Es verschwindet also, wenn überall $\delta\,d\mathfrak{r}^2=0$ ist, d. h. das Seil unausdehnbar ist.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist auch hier bewiesen.

21. Fortsetzung. Von der ausgezeichneten Mittellinie wird angenommen, daß sie auch bei Bewegung stets aus denselben materiellen Punkten besteht.

Dann besteht das virtuelle $\delta\mathfrak{b}$ aus zwei Teilen $\delta\mathfrak{b}_1+\delta\mathfrak{b}_2$; der erste entsteht durch virtuelle Drehung des natürlichen Koordinatensystems, der zweite stellt die Drehung der Materie gegen dieses System dar. Da das Massenelement starr bleiben soll, müssen wegen der ersten Annahme die materiellen Punkte, die eine Ebene senkrecht zur ausgezeichneten Linie bilden, zu ihr senkrecht bleiben, so daß die ganze Ebene nur eine materielle Drehung in sich erleiden kann, d. h. es ist $\delta\mathfrak{b}_2=\delta\chi\mathfrak{t}$ (Drillung des Balkens oder Drahtes).

Unter dieser weiteren Annahme werden auch S und S' Reaktionskräfte, und zwar auch dann, wenn das Seil dehnbar ist. Die zugehörige Bewegung, ein Schub, findet nicht statt. S und S' leisten keine virtuelle Arbeit.

[1]) Alle Gleichungen sind stets exakt, nur die Bedeutung der folgenden für das Energieprinzip ist evtl. bloß eine angenäherte, doch um so genauere, je mehr man die Elemente als starr ansehen darf (sog. unendlich-dünne Drähte).

Beweis: In dem Ausdruck der Arbeit ist S mit $-\mathfrak{n}\, d\,\delta\mathfrak{r} + \mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{b}\, ds$ multipliziert. Dies ist gleich

$$-\mathfrak{n}\,\delta\, d\mathfrak{r} + \mathfrak{b}\,(\delta\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{t}\,\delta\chi)\, ds = -\mathfrak{n}\,\delta(\mathfrak{t}\, ds) + \mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{b}_1\, ds = -\mathfrak{n}\, ds\,\delta\mathfrak{t} + \mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{b}_1\, ds.$$

Nun ist aber

$$\delta\mathfrak{t} = [\delta\mathfrak{b}_1\mathfrak{t}],$$

also wird der Ausdruck

$$-\mathfrak{n}\, ds[\delta\mathfrak{b}_1\mathfrak{t}] + \mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{b}_1\, ds = ds(-\delta\mathfrak{b}_1[\mathfrak{t}\mathfrak{n}] + \mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{b}_1) = 0.$$

Genau so beweist man den Satz für S'.

Es bleibt also noch die innere Arbeit der Momente zu untersuchen:

$$-\int_0^l (M\mathfrak{t} + B\mathfrak{n} + B'\mathfrak{b})\, d\,\delta\mathfrak{b},$$

wo

$$\delta\mathfrak{b} = \delta\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{t}\,\delta\chi.$$

Aus Anschauung wie einfacher Rechnung findet man die drei Beziehungen

$$\mathfrak{t}\, d\,\delta\mathfrak{b}_1 = -ds\,\delta\frac{1}{q'} - \frac{1}{q'}\,\delta\, ds, \qquad \mathfrak{n}\, d\,\delta\mathfrak{b}_1 = 0, \qquad \mathfrak{b}\, d\,\delta\mathfrak{b}_1 = ds\,\delta\frac{1}{q} + \frac{1}{q}\,\delta\, ds.$$

Folglich wird die innere Arbeit der Momente

$$-\int_0^l M\, d\,\delta\chi - \int_0^l B\,\frac{1}{q}\,\delta\chi\cdot ds + \int_0^l M\left(ds\,\delta\frac{1}{q'} + \frac{1}{q'}\,\delta\, ds\right) - \int_0^l B'\left(ds\,\delta\frac{1}{q} + \frac{1}{q}\,\delta\, ds\right)$$

oder unter Einführung der Kontingenz- resp. Torsionswinkel $d\alpha$ und $d\beta$

$$= -\int_0^l M\,\delta\, d\chi - \int_0^l B\,\delta\chi\, d\alpha + \int_0^l M\,\delta\, d\beta - \int_0^l B'\,\delta\, d\alpha.$$

Führt man ein mit der Materie mitbewegtes System $\mathfrak{t}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, ein, das also gegen das System $\mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}$, durch den Winkel χ um die $\mathfrak{t}$-Achse gedreht ist, so hat man erstens die entsprechenden kleinen Drehungen

$$d\varkappa = \sin\chi\, d\alpha, \qquad d\lambda = \cos\chi\, d\alpha, \qquad d\mu = d\chi - d\beta \tag{1}$$

einzuführen ($d\alpha$ ist eine Drehung um die $\mathfrak{b}$-Achse, $-d\beta$ eine solche um die $\mathfrak{t}$-Achse), ferner die entsprechenden Momente

$$K = B\cos\chi + B'\sin\chi, \qquad L = B'\cos\chi - B\sin\chi, \qquad M. \tag{2}$$

Aus (1) folgen

$$\delta\, d\alpha = \delta\, d\varkappa\cos\chi - \delta\, d\lambda\sin\chi, \qquad d\alpha\,\delta\chi = -\delta\, d\varkappa\sin\chi - \delta\, d\lambda\cos\chi.$$

Daher bekommt man für die Arbeit der Momente den Ausdruck

$$-\int (K\,\delta\, d\varkappa + L\,\delta\, d\lambda + M\,\delta\, d\mu),$$

der wohlbekannt ist[1]).

Man kann ihn einfacher so ableiten: Nach den bekannten Übergangsformeln, die schon bei LAGRANGE stehen, ist

$$d\,\delta\mathfrak{b} = \delta\, d\mathfrak{b} + [d\mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{b}].$$

---

[1]) Z. B.: W. THOMSON und P. G. TAIT, Treatise on Natural Philosophy, Cambridge, Bd. II, Art. 594; E. u. F. COSSERAT, Théorie des corps déformables, S. 10ff.

Ferner ist, wenn δ' die relative Änderung zu dem im Körper festen System bedeutet, das selbst die Drehung $\delta\mathfrak{d}$ erleidet; nach den Regeln der Relativbewegung

$$\delta d\mathfrak{d} = \delta' d\mathfrak{d} + [\delta\mathfrak{d}\, d\mathfrak{d}]\,.$$

Also ist[1])

$$d\delta\mathfrak{d} = \delta' d\mathfrak{d}\,.$$

Dies ist aber, weil bei δ' die im Körper festen Achsen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{t}$ ungeändert bleiben, gleich

$$\mathfrak{x}\,\delta\, d\varkappa + \mathfrak{y}\,\delta\, d\lambda + \mathfrak{t}\,\delta(d\chi - d\beta)\,.$$

Damit folgt aus

$$-\int (M\,\mathfrak{t} + B\,\mathfrak{n} + B'\,\mathfrak{b})\, d\delta\mathfrak{d}$$

unmittelbar die obige Formel.

22. Das vollkommen biegsame und das steife Seil. Das vollkommen biegsame Seil ist durch $B = 0$, $B' = 0$ definiert. Wir wollen es auch noch unausdehnbar nehmen, dann sind Z, S, S' Reaktionskräfte. Gewöhnlich nimmt man das Seil auch noch vollkommen verdrehbar ($M = 0$) und ferner $\mathfrak{G} = 0$. Dann verlangen die drei letzten Gleichgewichtsbedingungen aus Ziff. 20. $S = 0$, $S' = 0$, und die drei ersten geben nach Elimination von Z zwei Gleichungen für ϱ und ϱ', d. h. für die Gestalt des Fadens.

Um das steife Seil zu behandeln, sind bis jetzt zwei Theorien aufgestellt worden:

Erste Theorie: Die Biegungssteifigkeit ist von der Art der Haft- bzw. Gleitreibung: Stückmlang finden überhaupt keine Verbiegungen statt, und B und B' sind Reaktionsmomente (entsprechend $\delta d\alpha = 0$, $\delta\chi = 0$), ebenso M. Das gilt jedoch nur bis zu gewissen Grenzen, z. B. $|B| < rZ$; werden diese Grenzen erreicht oder eine von ihnen, so tritt Verbiegung oder Verdrehung ein, und das Vorzeichen bestimmt sich so, daß die innere Arbeit negativ ist (H. 3).

Zweite Theorie: Die Biegungssteifigkeit ist von der Art der Reibung zäher Flüssigkeiten. Danach wird man bei ebener Bewegung setzen:

$$B' = \varkappa \frac{d}{dt}\frac{1}{\varrho}\,, \qquad \varkappa > 0,$$

wodurch die innere Leistung, die für sich negativ sein muß,

$$-\varkappa \int_0^l \left(\frac{d\frac{1}{\varrho}}{dt}\right)^2 ds$$

wird[2]).

23. Ein anderer Aufbau der Stereostatik; das Hebelgesetz des Archimedes[3]). Definition: Ein Hebel ist ein starrer Körper, der sich um eine feste Achse drehen und längs ihrer verschieben kann.

Axiom II 8l: α) Kräfte, welche die Achse schneiden und auf ihr senkrecht stehen, stören das Gleichgewicht nicht (Folge von Axiom C, Ziff. 7); β) Kräfte parallel der Achse sind im Gleichgewicht, wenn ihre Summe Null ist; γ) Kräfte,

---

[1]) Siehe PALATINI, Annali di mat. (3) Bd. 27. 1918. Eine ausführliche Darstellung des Gegenstandes erschien im Jahrgang 25 der Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges.

[2]) Genaueres s. G. HAMEL, ZS. f. angew. Math. u. Mech. 1927.

[3]) Vergleiche DUHEM, Les origines de la statique, insb. S. 10ff. Paris 1905.

die für sich im Gleichgewicht sind, kann man an jedem starren Körper hinzufügen oder fortlassen.

Infolge dieser Axiome braucht man nur noch Kräfte zu betrachten, die auf ihren Hebelarmen, d. h. den Loten von ihren Angriffspunkten auf die Achse, senkrecht stehen.

Axiom II 𝔄 δ: Zwei solche Kräfte $d\mathfrak{K}_1$, $d\mathfrak{K}_2$, die einander gleich sind, gleiche Hebelarme haben und entgegengesetzten Drehsinn, sind gleichwertig mit Null (auch dieses Axiom folgt aus dem Satz vom zureichenden Grunde Axiom *C*, Ziff. 7). *ε*) Umkehrung von *α*): Kräfte, welche im Gleichgewicht sind, sind einer einzigen Kraft äquivalent, welche die Achse schneidet und auf ihr senkrecht steht (äquivalent im Sinne des freien starren Körpers).

Wenn man Reibung nicht zu den eingeprägten Kräften rechnete, wäre dieses Axiom unrichtig.

Axiom II 𝔄 η: Das Erstarrungsprinzip: Das Gleichgewicht eines jeden starren Körpers wird durch Hinzufügen von Bindungen nicht gestört.

Daraus folgt: Zwei gleiche und gleichgerichtete Kräfte sind an jedem starren Körper einer einzigen Kraft gleichwertig, welche beiden parallel ist, doppelt so groß wie sie ist und mitten zwischen ihnen liegt. Beweis: Erst nehme man eine Drehachse an, welche diese Mittellinie senkrecht schneidet, dann sind die beiden Kräfte im Gleichgewicht und also einer Kraft gleichwertig, welche die Achse senkrecht schneidet. Damit liegt die Angriffslinie der Resultierenden fest. Ihre Größe bestimmt sich nach *β*, wenn man jetzt eine Drehachse parallel zu den gegebenen Kräften annimmt.

Indem man nun eine der beiden Kräfte des Axioms *δ* durch zwei Kräfte der halben Größe ersetzt, von denen die eine die Achse schneidet, die andere den doppelten Hebelarm besitzt, bekommt man ein Hebelgesetz für zwei Kräfte, die im Verhältnis 1:2 stehen.

Daraus wieder leitet man den Satz ab, daß jede Kraft zwei Parallelen gleichwertig ist, von denen die eine $1/3$, die andere $2/3$ beträgt, und deren Abstände sich wie 1:2 verhalten.

Indem man jetzt die eine Kraft des Axioms *δ* in zwei zerlegt, von denen die eine $2/3$ ausmacht und in der Achse angreift, die andere $1/3$ im dreifachen Abstand, bekommt man das Hebelgesetz für zwei Kräfte, die im Verhältnis 1:3 zueinander stehen.

So kann man fortfahren. Indem man mit beiden Kräften analog verfährt, erhält man das Hebelgesetz für rationale Verhältnisse.

Axiom II 𝔄 ϑ: Ein Grenzfall von Gleichgewichtslagen ist auch eine Gleichgewichtslage.

Aus diesem Stetigkeitsaxiom erhält man das allgemeine Hebelgesetz für irrationales Verhältnis der Kräfte.

Aus dem Hebelgesetz erhält man die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen eines freien starren Körpers, indem man nach dem Erstarrungsprinzip durch Einführung fester Drehachsen für alle Achsen die aus dem Hebelgesetz folgende Gleichgewichtsbedingung ableitet, die bekanntlich in ihrer Gesamtheit den Gleichgewichtsbedingungen des freien starren Körpers gleichwertig sind.

Bei Marcolongo[1]) befindet sich eine Axiomatik des starren Körpers, die dessen Statik zugleich mit dem Parallelogrammsatz begründet. Natürlich kann durch diese Zusammenziehung Einzelnes gespart werden, da in beiden Axiomengruppen einige gleiche Ideen auftreten. Man vergleiche auch die in Ziff. 6 zitierte Arbeit von Goerges.

[1]) R. Marcolongo, Theoretische Mechanik Bd. I, deutsch von H. Timerding. Leipzig 1911.

24. Übergang zur Kinetik; das d'Alembertsche Prinzip. Es sei irgendein idealisiertes System gegeben, d. h. ein System mit bestimmten Bedingungen, z. B. bestehend aus starren Körpern mit Stützflächen wie in Ziff. 18 oder eine inkompressible Flüssigkeit wie in Ziff. 13 oder ein unausdehnbarer vollkommen biegsamer Faden oder eine Kombination solcher Systeme.

Indem wir uns aus den Gleichgewichtsbedingungen die Reaktionskräfte eliminiert denken, bekommen wir, wie in Ziff. 18 ausgeführt, ein gewisses System von Gleichungen und Ungleichheiten für die allgemein zu denkenden eingeprägten Kräfte. Sind sie erfüllt, so sagen wir, das Kräftesystem halte sich an dem gegebenen System das Gleichgewicht. Von den Ungleichheitsbedingungen sehen wir hier zunächst ab; von ihnen soll in der nächsten Ziffer die Rede sein.

D'ALEMBERT gelang es nun, die Bewegungsgleichungen eines solchen Systems durch folgendes nach ihm benanntes Prinzip zu bestimmen:

Axiom II Bm: Bei der Bewegung ist das System der sog. verlorenen Kräfte $d\mathfrak{K} - dm\,\mathfrak{w}$ im vorstehenden Sinne im Gleichgewicht. (Bem.: Nach dem d'Alembertschen Ansatz sind die verlorenen Kräfte die negativen Reaktionen $-d\mathfrak{R}$).

Dieses Axiom ist entgegen der Annahme d'ALEMBERTS selber nicht aus den Axiomen *I 1* und *II 2 a—l* beweisbar, wohl aber auf folgendes zurückführbar (s. H. 3):

*Axiom II Bm**: Ist eine durch eingeprägte Kräfte $d\mathfrak{K}$ nach dem Gesetz $dm\,\mathfrak{w} = d\mathfrak{K}$ hervorgerufene Bewegung mit den Bedingungen verträglich, so tritt sie auch wirklich ein (Passivität der Reaktionskräfte; sie beeinflussen die Bedingungen nicht unnötig).

Der Unabhängigkeitsbeweis folgt später (Ziff. 42). Für den einzelnen freien Körper folgen daraus Schwerpunkts- und Momentensatz.

Diese Sätze folgen aber **nicht** für ganz beliebige Systeme, wenn die inneren Spannungen eingeprägte Kräfte sind, denn das d'Alembertsche Prinzip sagt nichts über eingeprägte Kräfte.

Daher folgt das Boltzmannsche Axiom *II 1c* aus dem d'Alembertschen nur für das Innere starrer Körper, nicht allgemein (erstes Mißverständnis des d'Alembertschen Prinzips). Andererseits ist das d'Alembertsche Prinzip nicht mit der Anwendung auf den einzelnen starren Körper erschöpft (zweites weit verbreitetes Mißverständnis) oder, was dasselbe ist, die Gleichgewichtsbedingungen heißen **nicht immer**: Summe der Kräfte und Summe der Momente der **eingeprägten** Kräfte = 0.

Noch viel weniger ist es auf das freie Punktsystem beschränkt, wo es mit dem Newtonschen Grundgesetz identisch, also trivial wird (drittes Mißverständnis). Es hat an sich auch nichts mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten zu tun (viertes Mißverständnis).

Wohl können die in Rede stehenden Gleichgewichtsbedingungen nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten in die Form $S\, d\mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{r} = 0$ gebracht werden. Daraus erhält man die von LAGRANGE vollzogene Vereinigung der beiden Prinzipien zu $S\,(dm\,\mathfrak{w} - d\mathfrak{K})\,\delta\mathfrak{r} = 0$ (nochmals: von Ungleichheiten wird hier zunächst abgesehen).

Der bisherige Aufbau der Mechanik über den starren Körper hin gibt also das Boltzmannsche Axiom nur in der Statik allgemein und in der Kinetik nur für das Innere starrer Körper. Für die Kinetik allgemeiner Systeme muß es besonders ausgesprochen werden.

Sowohl in seinen ersten Anfängen [bei JAKOB BERNOULLI und DE L'HOSPITAL[1]] als auch in manchen neueren Lehrbüchern findet sich ein Scheinbeweis

[1] Genaue Angaben bei HEUN, Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik, Göschen 1902, im geschichtlichen Anhang.

des d'Alembertschen Prinzips, der in Wahrheit das Prinzip auf die beiden folgenden Axiome zurückführt:

Axiom II $\mathfrak{B}m^{**}\,\alpha$) Jedes mechanische System bewegt sich gerade so, als ob seine Punkte einzeln an ein masseloses System (Gespenst) angeheftet wären, das denselben kinematischen Bedingungen unterworfen ist wie das System selbst. Für die Kraftwirkung zwischen Punkt und Gespenst gilt das Gegenwirkungsprinzip.

Axiom II $\mathfrak{B}m^{**}\,\beta$): Ein solches Gespenst genügt auch während der Bewegung den dynamischen Gesetzen der Statik.

Diese beiden Axiome tragen sogar noch weiter als das d'Alembertsche Prinzip, sie liefern das volle Boltzmannsche Axiom. Denn nach α gilt für jeden Massenpunkt

$$\mu\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{K}}{dV} + \frac{d\mathfrak{R}}{dV},$$

wo $d\mathfrak{R}$ die Reaktion von seiten des Gespenstes ist. Im Gespenst aber haben wir, nachdem dort die Spannungen eingeführt sind

$$-\frac{d\mathfrak{R}}{dV} + \frac{\partial \mathfrak{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{s}_z}{\partial z} = 0,$$

und aus dem Erstarrungsprinzip bekommen wir, weil ja die statischen Gesetze gelten sollen, die Symmetrie der Spannungsdyade (s. Ziff. 17).

25. Das d'Alembertsche Prinzip bei Ungleichheiten. Es ist oft behauptet worden, daß das D'ALEMBERTsche Prinzip bei Ungleichheiten (bei einseitigen Bindungen) nicht zum Ziele führe[1].

Man nehme etwa folgendes Beispiel: Ein Punkt (d. h. ein starrer Körper, von dessen Drehbewegungen wir absehen) ruhe auf einer ebenen Fläche $z = 0$. Erlaubt sei der Halbraum $z \geqq 0$. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z \leqq 0.$$

Mithin bekäme man bei vernünftiger Ausdehnung des d'Alembertschen Prinzips, wie sie FOURIER vollzogen hat

$$X - m\ddot{x} = 0, \qquad Y - m\ddot{y} = 0, \qquad Z - m\ddot{z} \leqq 0.$$

Klar ist, daß die letzte Ungleichheit das Geschehen nicht völlig bestimmt. Mit folgenden zwei Axiomen aber kommt man vollständig aus:

Axiom II $\mathfrak{B}m$: (d'Alembertsches Prinzip in der Fourierschen Erweiterung): Auch bei Berücksichtigung der Ungleichheiten gilt: die Differenz der eingeprägten Kräfte und der Massenbeschleunigungen ist im Gleichgewicht oder unter Heranziehung des Prinzips der virtuellen Arbeiten

$$\mathrm{S}\,(d\mathfrak{K} - dm\,\mathfrak{w})\,\delta\mathfrak{r} \leqq 0.$$

Axiom II $\mathfrak{B}n$: Bei Aufheben einer einseitigen Bindung sind die Reaktionskräfte stetige Funktionen der Zeit, oder anders ausgedrückt: die im Inneren des zulässigen Bereichs aus dem d'Alembertschen Prinzip folgenden Gleichungen sind auch für den Beginn des Loslösens vom Rande anzuwenden.

In dem obigen Beispiel liefert dieses Prinzip offenbar:

---

[1] Literatur und nähere Ausführungen bei P. STÄCKEL, Bemerkungen zum Prinzip des kleinsten Zwanges. Sitzungsber. Heidelb. Akad. 1919. Auch in dem in Ziff. 33 genannten Buche von BRILL.

a) beim Loslösen $Z - m\ddot{s} = 0$, weil diese Gleichung im Innern des Bereichs $s > 0$ gilt,

b) bei Nichtloslösen ($s = 0$) genügt wegen $\ddot{s} = 0$

$$Z - m\ddot{s} \leq 0 .$$

Man übersieht leicht, daß die Verhältnisse in allen Fällen ebenso liegen. Entweder bleibt eine Bindung aufrechterhalten, und dann genügt das d'Alembertsche Prinzip, oder die Bindung löst sich, und dann tritt das Stetigkeitsaxiom *II 3n* in Kraft.

Will man ohne Untersuchung der weiteren Bewegungen nur die Anfangsablösung bestimmen, so reicht dazu allerdings das nur für diesen Augenblick angewandte d'Alembertsche Prinzip nicht aus (s. hierzu auch die Ziff. 45).

γ) Aufbau der Mechanik vom Punkt aus.

26. Axiome der Punktmechanik. *Axiom II 3a:* Jedes mechanische System besteht aus einer endlichen Anzahl diskreter mathematischer Punkte, die je mit einer endlichen Masse m_i behaftet sind.

Aus dem Stieltjesschen Integral $S\, dm\, \mathfrak{w}$ wird also die endliche Summe

$$\sum_i m_i \mathfrak{w}_i .$$

Axiom II 3b: Ebenso sind die Kräfte als endliche Vektoren $\mathfrak{k}_{i,l}$ den Massenpunkten zugeordnet (sie greifen an ihnen an). Die Newtonsche Grundgleichung heißt also:

$$m_i \mathfrak{w}_i = \sum_l \mathfrak{k}_{i,l} ,$$

wo die Summe rechts über die an dem i-ten Punkte angreifenden Kräfte zu erstrecken ist.

Axiom II 3c: Die Ursachen der $\mathfrak{k}_{i,l}$ liegen in den andern Punkten m_l. Die obige Summe erstreckt sich also über alle Massenpunkte mit Ausnahme von $l = i$.

Axiom II 3d: Das erste volle Gegenwirkungsprinzip:

$$\mathfrak{k}_{i,l} = -\mathfrak{k}_{l,i} .$$

Axiom II 3e: Das zweite volle Gegenwirkungsprinzip:

$$[\mathfrak{r}_i \mathfrak{k}_{i,l}] + [\mathfrak{r}_l \mathfrak{k}_{l,i}] = 0$$

oder: Die Kräfte $\mathfrak{k}_{i,l}$ und $\mathfrak{k}_{l,i}$ liegen in der Verbindungslinie der beiden Punkte.

Definition: Für ein System von Punkten heißt $\mathfrak{k}_{i,l}$ eine innere Kraft, wenn sowohl der i-te wie der l-te Punkt dem System angehört, die anderen Kräfte heißen äußere Kräfte.

Aus diesen Axiomen und der Definition gewinnt man sofort in bekannter Weise Schwerpunkt- und Momentensatz, also die beiden Fundamentalsätze, auch den dritten, den Energiesatz. Man braucht aber das Gegenwirkungsprinzip in einer Fassung, die beliebige Fernkräfte einschließt.

Es ist ferner noch nicht befriedigend gelungen, aus diesen Anschauungen den Begriff des Spannungstensors zu entwickeln. Ein ernster Versuch hierzu findet sich bei LOVE[1]).

[1]) LOVE, Theoretical mechanics 1. Aufl., Cambridge. Über ältere Literatur s. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 4, Art. 23 (MÜLLER-TIMPE), insbesondere die Nummern 2a, 4b, 4c, 5a.

Der Gedanke ist etwa folgender: Man denkt sich die Zahl der Punkte sehr groß und die Punkte sehr dicht, so daß in einem praktisch sehr kleinen Volumenelement ΔV noch immer sehr viele Punkte sind. Die durch ein kleines Flächenstück ΔF des Volumenelements ΔV hindurchgehenden Kräfte werden zu einem resultierenden $\mathfrak{p}\,\Delta F$ zusammengefaßt. So ist die Spannung $\mathfrak{p}$ für ΔF bestimmt. Obwohl zur Konstruktion endliche ΔV und ΔF nötig sind, darf man hinterher beide wie Differentiale behandeln, d. h. zur Grenze übergehen, anders ausgedrückt, man benutzt die Punktanschauung, um bequem die Fundamentalsätze zu gewinnen und sie dann fortzuwerfen.

Dann bekommt man das Boltzmannsche Axiom durch Anwendung des Momentensatzes auf ein solches differentielles dV, dessen Masse auch als differentiell klein zu behandeln ist.

Offenbar ist die Unterscheidung zwischen Fern- und Nahkräften (Flächenkräften) eigentlich aufgehoben. Da man sie nicht entbehren kann, müßte man konsequenterweise so vorgehen, daß man den Punkthaufen in einzelne ΔV auflöste und die Nahewirkung aus der Kraftwirkung benachbarter ΔV allein abzuleiten versuchte. Man bekäme dann für die Mechanik der Kontinua Differenzengleichungen statt der Differentialgleichungen. Eine exakte Durchführung solcher Gedanken ist aber wohl noch nicht vorhanden.

d) Der Lagrangesche Aufbau der Mechanik.

27. Das Befreiungsprinzip. Wir setzen auch hier die Axiome *I* voraus. Ferner nehmen wir die Definition der Reaktionskräfte aus Ziff. 15 und damit den sog. d'Alembertschen Ansatz

$$dm\,\mathfrak{w} = d\mathfrak{K} + d\mathfrak{R}.$$

Das Ziel aber ist, über die Reaktionskräfte allmählich Einsicht zu erhalten, anstatt, wie früher, über sie von vornherein aus der Anschauung Aussagen zu machen (wie in *II, 1b* oder *II 2d, e, f*).

Das weitere und wichtigere Ziel aber ist, durch ein Befreiungsprinzip Aufschluß über gewisse eingeprägte Kräfte zu bekommen und so den Begriff des Spannungstensors zu entwickeln, statt ihn, wie in Ziff. 10, an die Spitze zu stellen.

Weiter werden das Prinzip der virtuellen Arbeiten und das d'Alembertsche Prinzip in ihrer Vereinigung angenommen

$$\mathrm{S}\,dm\,\mathfrak{w}\,\delta\mathfrak{r} = \mathrm{S}\,d\mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{r}; \qquad \delta t = 0; \qquad \delta\,dt = 0$$

(von Ungleichheiten sehen wir ab).

Eine endliche oder auch unendliche Zahl von Parametern $q_1, q_2 \ldots$ möge die allgemeine Lage des Systems angeben. Es mögen ferner mehrere endliche oder eine unendliche Anzahl von Bedingungsgleichungen

$$\sum_i f_{\iota i}\,dq_i + g_\iota\,dt = 0$$

bestehen.

Dann hat man bekanntlich zu dem Prinzip der virtuellen Arbeiten die Summe

$$\sum_\iota \lambda_\iota \sum_i f_{\iota i}\,\delta q_i$$

hinzuzufügen und nun die δq_i als willkürlich zu behandeln. Die λ_ι sind zunächst mathematische Hilfsgrößen.

Das Befreiungsprinzip sagt nun aus:

Axiom II 4: Stellt man neben das gebundene System ein befreites, indem man einzelne oder alle Bedingungen *fortläßt*, so bleiben formal dieselben Be-

wegungsgleichungen in Geltung, nur daß jetzt die λ eingeprägte Kraftgrößen werden, genauer dadurch bestimmt, daß ihre virtuelle Arbeit

$$\sum_{i,l} \lambda_l f_{l,i} \delta q_i$$

ist; vorher waren sie also Reaktionskräfte (H. 4).

28. Einzelfälle. Erstens: Der vollkommen biegsame unausdehnbare Faden. Dieser ist ein System mit ausgezeichneter Mittellinie und Kräften, die längs dieser verteilt sind. Er kann sich frei bewegen, und die Länge jedes Stückes ist unveränderlich.

Sei $dm = \mu\, ds$, ds das Bogenelement, $d\mathfrak{K} = \mathfrak{g}\, ds$ die Kraft, so hat man über die Länge l zu integrieren

$$\int_0^l \mu\, ds\, \mathfrak{w}\, \delta\mathfrak{r} = \int_0^l \mathfrak{g}\, \delta\mathfrak{r}\, ds$$

mit $\delta\, ds = 0$. Sind die Enden festgehalten, so hat man auch noch

$$\delta\mathfrak{r}_0 = 0\,, \qquad \delta\mathfrak{r}_l = 0\,.$$

Also hat man zu setzen

$$\int_0^l \mu\, ds\, \mathfrak{w}\, \delta\mathfrak{r} - \int_0^l \mathfrak{g}\, \delta\mathfrak{r}\, ds + \int_0^l \lambda\, \delta\, ds + \mathfrak{L}_0\, \delta\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{L}_l\, \delta\mathfrak{r}_l = 0$$

und nun alle $\delta\mathfrak{r}$ als frei zu behandeln. Es ist aber $ds^2 = d\mathfrak{r}^2$, also $ds\, \delta\, ds = d\mathfrak{r}\, \delta\, d\mathfrak{r}$ und, wenn man den Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ in der Richtung annimmt, in der die Bogenlänge wächst, $\delta\, ds = \mathfrak{t}\, \delta\, d\mathfrak{r}$, also

$$\int_0^l \lambda\, \delta\, ds = \int_0^l \lambda\, \mathfrak{t}\, \delta\, d\mathfrak{r} = \int_0^l \lambda\, \mathfrak{t}\, d\, \delta\mathfrak{r} = \lambda\, \mathfrak{t}\, \delta\mathfrak{r}\Big|_0^l - \int_0^l \frac{d(\lambda\mathfrak{t})}{ds}\, \delta\mathfrak{r}\, ds\,,$$

Mithin erhält man die Gleichungen

$$\mu\, \mathfrak{w} = \mathfrak{g} + \frac{d}{ds}(\lambda\mathfrak{t})\,, \qquad \mathfrak{L}_0 = (\lambda\mathfrak{t})_0\,, \qquad \mathfrak{L}_l = -(\lambda\mathfrak{t})_l\,.$$

Also ist bei dehnbarem Faden nach dem Befreiungsprinzip $\lambda\mathfrak{t}$ eine eingeprägte Kraft, die tangentiale Zugspannung; $-\mathfrak{L}_0$ und $-\mathfrak{L}_l$ sind die äußeren Zugkräfte an den Enden, die den Faden halten bzw. bewegen.

29. Zweitens: Der unendlich dünne Draht. Es liege weiterhin ein Körper mit ausgezeichneter Mittellinie vor. Diese sei aber jetzt zunächst als starr angesehen, was durch

$$\delta\, ds = 0\,, \qquad \delta\frac{1}{\varrho} = 0\,, \qquad \delta\frac{1}{\varrho'} = 0 \tag{1}$$

am einfachsten charakterisiert werden kann.

Es mögen sich ferner die Elemente des Systems, ausgeschnitten durch Ebenen senkrecht zur Mittellinie, nur wie starre Körper bewegen und auch nur um die Mittellinie drehen können, so daß diese stets aus denselben materiellen Punkten besteht. (2)

Endlich soll auch ein Drehen der Elemente um die Mittellinie gegen das natürliche System der Mittellinie ausgeschlossen sein:

$$\delta\chi = 0\,, \tag{3}$$

so daß also das System zunächst vollkommen starr ist.

Die mathematische Formulierung von (2) stellt sich unabhängig von (1) und (3) so dar: Die virtuelle Drehung eines Elementes ist

$$\delta\mathfrak{d} = \delta\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{t}\,\delta\chi,$$

wo $\delta\mathfrak{d}_1$ die Drehung des natürlichen Koordinatensystems bei irgendeiner Verschiebung $\delta\mathfrak{r}$ der Mittellinie ist. Nun ist aber, wie man leicht berechnet,

$$\delta\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{t}\,\varrho\cdot\mathfrak{b}\frac{d^2\delta\mathfrak{r}}{ds^2} - \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{b}\frac{d\delta\mathfrak{r}}{ds} + \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{n}\frac{d\delta\mathfrak{r}}{ds}.$$

Also verlangt (2)

$$\mathfrak{n}\,\delta\mathfrak{d} = \mathfrak{n}\,\delta\mathfrak{d}_1 = -\mathfrak{b}\frac{d\delta\mathfrak{r}}{ds}, \tag{2a}$$

$$\mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{d} = \mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{n}\frac{d\delta\mathfrak{r}}{ds}. \tag{2b}$$

Auf das Element ds mögen die äußere Kraft $\mathfrak{g}\,ds$ und das äußere Moment $\mathfrak{G}\,ds$ wirken. Die Lagrangeschen Faktoren zu (1) sollen $-Z - \frac{1}{\varrho}B' + \frac{1}{\varrho'}M$, $-B'ds$ und $M\,ds$ heißen, der Lagrangesche Faktor zu (3) $-\frac{1}{\varrho}B\,ds + \frac{dM}{ds}ds$, die Faktoren zu (2a) bzw. (2b) aber $-S'ds$ bzw. $S\,ds$.

Dann liefert das Prinzip der virtuellen Arbeiten für den Fall der Statik

$$\int\mathfrak{g}\,\delta\mathfrak{r}\,ds + \int\mathfrak{G}\,\delta\mathfrak{d}\,ds + \int\left(-Z - \frac{1}{\varrho}B' + \frac{1}{\varrho'}M\right)\delta ds + \int -B'\delta\frac{1}{\varrho}\,ds + \int M\,\delta\frac{1}{\varrho'}\,ds$$
$$+\int\left(-\frac{1}{\varrho}B + \frac{dM}{ds}\right)\delta\chi\,ds + \int -S'\left(\mathfrak{n}\,\delta\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\frac{d\delta\mathfrak{r}}{ds}\right)ds + \int S\left(\mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{d} - \mathfrak{n}\frac{d\delta\mathfrak{r}}{ds}\right)ds = 0.$$

Nach Ziff. 21 ist

$$\delta\frac{1}{\varrho}\,ds = \mathfrak{b}\,d\delta\mathfrak{d}_1 - \frac{1}{\varrho}\,\delta ds = \mathfrak{b}\,d\delta\mathfrak{d} - \frac{1}{\varrho}\,\delta ds,$$

$$\delta\frac{1}{\varrho'}\,ds = -\mathfrak{t}\,d\delta\mathfrak{d}_1 + \frac{1}{\varrho'}\,\delta ds = -\mathfrak{t}\,d\delta\mathfrak{d} + d\delta\chi + \frac{1}{\varrho'}\,\delta ds,$$

$$\mathfrak{n}\,d\delta\mathfrak{d}_1 = 0, \quad \text{also wegen} \quad d\delta\mathfrak{d} = d\delta\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{t}\,d\delta\chi + \frac{1}{\varrho}\,\mathfrak{n}\,ds\,\delta\chi,$$

$$\frac{1}{\varrho}\,\delta\chi\,ds = \mathfrak{n}\,d\delta\mathfrak{d}.$$

Endlich ist noch

$$\delta ds = \mathfrak{t}\,d\delta\mathfrak{r}.$$

Somit erhält man

$$\int\mathfrak{g}\,\delta\mathfrak{r}\,ds + \int\mathfrak{G}\,\delta\mathfrak{d}\,ds - \int Z\,\mathfrak{t}\,d\delta\mathfrak{r} - \int B'\mathfrak{b}\,d\delta\mathfrak{d} + \int\frac{dM}{ds}\,\delta\chi\,ds$$
$$+\int M(-\mathfrak{t}\,d\delta\mathfrak{d} + d\delta\chi) - \int B\,\mathfrak{n}\,d\delta\mathfrak{d} - \int S'\left(\mathfrak{n}\,\delta\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\frac{d\delta\mathfrak{r}}{ds}\right)ds$$
$$+\int S\left(\mathfrak{b}\,\delta\mathfrak{d} - \mathfrak{n}\frac{d\delta\mathfrak{r}}{ds}\right)ds = 0.$$

Partielle Integration und Behandlung von $\delta\mathfrak{r}$ und $\delta\mathfrak{b}$ als willkürliche Größen liefert

$$\mathfrak{g} + \frac{d}{ds}(Z\mathfrak{t} + S'\mathfrak{b} + S\mathfrak{n}) = 0,$$

$$\mathfrak{G} + \frac{d}{ds}(B'\mathfrak{b} + M\mathfrak{t} + B\mathfrak{n}) + S\mathfrak{b} - S'\mathfrak{n} = 0.$$

Das sind aber wieder dieselben Gleichungen wie in Ziff. 20.

Wird nunmehr der starre Draht befreit, d. h. (1) und (3) aufgehoben, während (2) bestehen bleibt, so werden B, B', M und Z eingeprägte Kraftgrößen, deren Bedeutung klar ist, während S und S' Reaktionsgrößen bleiben. Es liegt deshalb nahe, statt der sechs Gleichgewichtbedingungen unter Elimination von S und S' nur vier aufzustellen. Dies findet sich in dem in Ziff. 21 genannten Werk von E. und F. Cosserat S. 41.

Lagrange hat die obigen Betrachtungen ohne Beachtung der Verdrehungsmöglichkeit $\delta\chi$. Ferner ersetzt er die Bedingungen (1) durch die gleichwertigen

$$\delta\, d\mathfrak{r}^2 = 0, \qquad \delta\, d^2\mathfrak{r}^2 = 0, \qquad \delta\, d^3\mathfrak{r}^2 = 0.$$

Endlich stellt er die Schlußgleichungen unter Elimination von S und S' auf. Wir erhalten das gleiche, wenn wir ohne Einführung von S und S' überall $\delta\mathfrak{b}_1$ durch den obigen Ausdruck in $\delta\mathfrak{r}$ ersetzen.

Unsere Betrachtungen bedürfen einiger Änderungen für den augenblicklich geraden Draht $\left(\frac{1}{\varrho} = 0\right)$, weil hier $\frac{1}{\varrho}$ seine Bedeutung verliert[1]).

30. Bemerkung über zweidimensionale Körper. So wie wir in den Ziff. 20, 21, 22 und 28, 29 eine Theorie der Körper mit ausgezeichneter Mittellinie skizziert haben und damit die Grundlage für eine Mechanik der Fäden, Seile und Drähte gewannen, so hätten wir auch eine Theorie der Körper mit einer ausgezeichneten Mittelfläche entwerfen können; sie hätte uns zu den Mechaniken der Häute, Schalen und der Kapillaritätserscheinungen geführt[2]).

Wir wollen uns mit diesem Hinweis begnügen.

31. Drittens: Die ideale inkompressible Flüssigkeit. Diese ist ein dreidimensionales System mit der Bewegungseinschränkung

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0, \quad \text{also auch} \quad \operatorname{div}\delta\mathfrak{r} = 0.$$

An den Grenzen sei durch feste Wände eine normal gerichtete Geschwindigkeit unmöglich gemacht:

$$\mathfrak{n}\mathfrak{v} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{n}\,\delta\mathfrak{r} = 0.$$

Also hat man

$$\underset{V}{S}\, dm\, \mathfrak{w}\, \delta\mathfrak{r} = \underset{V}{S}\, \mathfrak{q}\, dV\, \delta\mathfrak{r} + \underset{V}{S}\, \lambda \operatorname{div}\delta\mathfrak{r}\, dV + \underset{O}{S}\, \lambda'\, \mathfrak{n}\, \delta\mathfrak{r}\, dF$$

oder, wegen

$$\underset{V}{S}\, \lambda \operatorname{div}\delta\mathfrak{r}\, dV = \underset{O}{S}\, \lambda\, \delta\mathfrak{r}\, \mathfrak{n}\, dF - \underset{V}{S} \operatorname{grad}\lambda\, \delta\mathfrak{r}\, dV,$$

$$\underset{V}{S}\, dV (\mu\mathfrak{w} - \mathfrak{q} + \operatorname{grad}\lambda)\, \delta\mathfrak{r} - \underset{O}{S}\, dF (\lambda_0 + \lambda')\, \mathfrak{n}\, \delta\mathfrak{r} = 0.$$

---

[1]) Eine etwas andere Darstellung erscheint in dem in Ziff. 21 angekündigten Aufsatz.

[2]) Man sehe darüber die bekannten Lehrbücher der Elastizitätstheorie ein (Love, Föppl), ferner das zitierte Buch von E. u. F. Cosserat sowie Enzykl. d. math. Wiss. Bd. V, 1, Art. 9 (Minkowski) und ebenda Bd. IV, 4, Art. 30 (Hellinger), Nr. 1a.

Daraus folgen die Gleichungen im Innern

$$\mu \mathfrak{w} = \mathfrak{q} - \operatorname{grad} \lambda;$$

und an der Oberfläche

$$\lambda_0 + \lambda' = 0.$$

Nach dem Befreiungsprinzip ist, da $\delta A = \lambda' \mathfrak{n}\, \delta \mathfrak{r}\, dF$ eine Arbeit ist, die > 0 bei $\lambda' > 0$ und bei Bewegung nach außen, $-\lambda'$ der äußere Druck, also auch λ_0; und λ der Druck im Innern.

32. Viertens: Der starre Körper und die allgemeinen Systeme. Für die virtuellen Verschiebungen des starren Körpers gelten nach Ziff. 13 die Gleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0.$$

An der Oberfläche sei der Körper festgehalten, also $(\delta \mathfrak{r})_0 = 0$. Dann gilt

$$\underset{V}{\mathrm{S}}\, dm\, \mathfrak{w}\, \delta \mathfrak{r} = \underset{V}{\mathrm{S}}\, \mathfrak{q}\, dV\, \delta \mathfrak{r} - \underset{V}{\mathrm{S}} \left[\lambda_{xx} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_{xy} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \cdots \right] dV + \underset{0}{\mathrm{S}}\, \mathfrak{L}\, \delta \mathfrak{r} = 0$$

(definitionsgemäß sei $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$ usw.), oder da

$$\underset{V}{\mathrm{S}} \left(\lambda_{xx} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \cdots \right) dV = \underset{0}{\mathrm{S}} \{[\lambda_{xx} \cos(n, x) + \lambda_{xy} \cos(n, y) + \lambda_{xz} \cos(n, z)]\, \xi + \cdots \}\, dF$$
$$- \underset{V}{\mathrm{S}} \left\{ \xi \left(\frac{\partial \lambda_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_{xz}}{\partial z} \right) + \cdots \right\} dV$$

ist, so folgen die Gleichungen

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \frac{\partial \lambda_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_{xz}}{\partial z} \text{ usw.}$$

$$L_x = [\lambda_{xx} \cos(n, x) + \lambda_{xy} \cos(n, y) + \lambda_{xz} \cos(n, z)]_0 \text{ usw.}$$

Damit sind ersichtlich die Oberflächenspannungen $\mathfrak{L} = L_x \mathfrak{i} + L_y \mathfrak{j} + L_z \mathfrak{k}$ eingeführt und die Spannungen λ im Innern. Von vornherein ist $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$, das **Boltzmannsche Axiom also erfüllt. Die Mechanik allgemeiner Systeme ist somit durch das Befreiungsprinzip gewonnen.** Der Lagrangesche **Weg führt also restlos zum Ziel.** Er ist mit dem ersten Weg gleichwertig. Die Betrachtung unter Ziff. 32 steht aber nicht mehr bei LAGRANGE, sondern bei G. PIOLA 1845[1]).

e) Energetischer Aufbau der Mechanik.

33. Das Hertzsche und Gaußsche Prinzip bei speziellen Systemen. Von den bisherigen Axiomen nehmen wir nur die Axiome *I a* bis *c* als erfüllt an, aber nicht das Newtonsche Grundgesetz *I f*, auch nicht *I d* und *I e*, die von den Kräften sprechen. Wir fügen die Definition der kinetischen Energie E hinzu, das Stieltjessche Integral $E = \frac{1}{2}\mathrm{S}\, dm\, v^2$ und die der Beschleunigungsfunktion

[1]) S. Encykl. der math. Wiss. Bd. IV, 4, Art. 23 (MÜLLER-TIMPE), S. 23; sowie ebenda Bd. IV, 4, Art. 30 (HELLINGER), S. 620.

$S=\frac{1}{2}\mathsf{S}\,dm\,\mathfrak{w}^2$. Bindungen können vorhanden sein. Wir setzen auch mit $m=\mathsf{S}\,dm$

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{1}$$

wodurch ds definiert ist.

Wegen

$$\mathfrak{v}=\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

und

$$\mathfrak{w}=\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$$

wird

$$S=\frac{1}{2}\mathsf{S}\,dm\left[\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\mathsf{S}\,dm\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\right)^2+\frac{d^2s}{dt^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathsf{S}\,dm\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\frac{d\mathfrak{r}}{ds}+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\mathsf{S}\,dm\left(\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\right)^2.$$

Es ist aber nach (1)

$$\mathsf{S}\,dm\left(\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\right)^2=m$$

und also

$$\mathsf{S}\,dm\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}=0.$$

Mithin wird

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\mathsf{S}\,dm\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2.$$

Wir deuten die Bewegungen in einem endlich oder auch unendlich dimensionalen Raum, nennen ds die Bogenlänge, $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$ die Bahn, $\frac{d^2s}{dt^2}$ die Bahnbeschleunigung und setzen

$$\mathsf{S}\,dm\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\right)^2=\frac{m}{\varrho^2};$$

ϱ heiße der Krümmungsradius der Bahn. Offenbar hängen ϱ und s nur von den Bewegungsbahnen, aber nicht von der Zeit ab, in der sich die Bewegung abspielt. Räumliches und Zeitliches erscheint also in den Formeln

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

$$S=\frac{1}{2}m\left[\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^4+\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\right]$$

getrennt.

Axiom II 6 a α: Für ein freies, rein mechanisches, abgeschlossenes System bestimmt sich bei momentan gegebener Lage und Geschwindigkeit die Beschleunigung so, daß S ein Minimum ist (Gaußsches Prinzip) oder, was offenbar dasselbe ist, daß $E=$ konst. und die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ ein Minimum ist. (Energieprinzip und Hertzsches Prinzip der geradesten Bahn.) (Denn da S die

Summe zweier Quadrate ist, wird es offenbar ein Minimum, wenn [illegible] klein als möglich ist, also, da $\frac{ds}{dt}$ gegeben ist, $\frac{1}{\varrho}$ ein Minimum [illegible]

Befinden wir uns im Innern des zulässigen Bewegungsbereich[illegible] mit jeder Bewegung auch die entgegengesetzte möglich ist, so [illegible] Axiom

$$\mathsf{S}\, dm\, \mathfrak{w}\, \delta \mathfrak{w} = 0 .$$

Ist nun vermittels freier Parameter q jede zulässige Verschiebung [illegible]

$$d\mathfrak{r} = \sum \mathfrak{a}_i\, d q_i + \mathfrak{b}\, dt ,$$

also

$$\delta \mathfrak{r} = \sum \mathfrak{a}_i\, \delta q_i ,$$

und entsprechend

$$\mathfrak{v} = \sum \mathfrak{a}_i \dot{q}_i + \mathfrak{b} ,$$

$$\mathfrak{w} = \sum \mathfrak{a}_i \ddot{q}_i + \mathfrak{w}_0(q, \dot{q}, t) ,$$

also

$$\delta \mathfrak{w} = \sum \mathfrak{a}_i\, \delta \ddot{q}_i$$

ausgedrückt, so folgt wegen der Freiheit der $\delta \ddot{q}_i$

$$\mathsf{S}\, dm\, \mathfrak{w}\, \mathfrak{a}_i = 0 ,$$

was mit

$$\mathsf{S}\, dm\, \mathfrak{w}\, \delta \mathfrak{r} = 0$$

also dem d'Alembertschen Prinzip bei kräftefreier Bewegung [illegible]

Im Innern des zulässigen Bewegungsbereiches trägt da[illegible] om *II* $\delta a\, \alpha$ so weit wie das d'Alembertsche Prinzip bei kräfte[illegible] Bewegung [frei von eingeprägten Kräften]. Am Rande [illegible] weiter[1]):

Axiom II $\delta a\, \beta$: Allgemeine Systeme lassen sich dadurch auf die [illegible] charakterisierten zurückführen, daß man ideale Massen hinzufügt.

Eine abschließende Untersuchung darüber, wie weit sich mit [illegible] von HERTZ eine wirklich allgemeine Mechanik begründen läßt, fehlt [illegible] mancher Einzeluntersuchungen[2]).

24. Das Gaußsche Prinzip bei allgemeinen Systemen. Man [illegible] Betrachtung in folgender Weise verallgemeinern:

Axiom II δb: Es seien mit $d\mathfrak{K}$ die an dem Volumenelement [illegible] eingeprägten Kräfte bezeichnet, dann bestimmt sich bei augenblickli[illegible] Lage und Geschwindigkeit die Beschleunigung nach dem Gaußsche[illegible] des kleinsten Zwanges

$$\mathsf{S}\, dm \left(\mathfrak{w} - \frac{d\mathfrak{K}}{dm}\right)^2 = \text{Minimum}.$$

Nach demselben Beweisverfahren, wie in der vorhergehenden Nummer [illegible] sich im Innern des zugelassenen Bewegungsbereiches das d'Alembert[illegible] Prinzip für allgemeine Kräfte (wenigstens im regulären Falle). Am Rande [illegible] bei nichtregulären Fällen trägt das Prinzip weiter (vgl. Ziff. 25; s. auch [illegible] der vorigen Nummer zitierte Arbeit von STÄCKEL).

---

1) Siehe P. STÄCKEL, Sitzungsber. Heidelb. Akad. 1919.

2) Zur HERTZschen Mechanik s. besonders: A. BRILL, Vorlesungen zur Einführung [illegible] Mechanik raumerfüllender Massen. Leipzig u. Berlin 1909.

35. Das Energieprinzip. Axiom II δa und b werden durch andere Axiome ersetzt:

Axiom $II\,\delta a\,\alpha$: Jedem rein mechanischen, abgeschlossenen System (konservativen System) läßt sich eine Funktion U der Koordinaten aller Punkte des Systems zuordnen, so daß

$$E + U = h = \text{konst.}\quad \text{(Energieprinzip)}.$$

U heißt die potentielle Energie des Systems.

Daraus folgt: Ist das System augenblicklich in Ruhe ($E = 0$) und U ein Minimum, so bleibt das System in Ruhe. Denn andernfalls müßten sich E und U vergrößern, was mit dem vorstehenden Axiom unverträglich ist, oder:

$$\delta U > 0 \quad \text{oder} \quad \delta U = 0, \quad \delta^2 U > 0 \text{ usw.}$$

sind hinreichende Gleichgewichtsbedingungen.

Axiom $II\,\delta a\,\beta$: $\delta U \geqq 0$ für alle virtuellen Verschiebungen ist eine notwendige Gleichgewichtsbedingung. Daraus folgt, daß im Innern des zulässigen Bereiches auch $\delta U \leqq 0$ notwendig ist, also $\delta U = 0$ hinreichende und notwendige Gleichgewichtsbedingung ist.

Daß dieses Axiom notwendig ist (entgegen der Behauptung mancher Lehrbücher), sieht man am besten so ein: Wenn man Haftreibung zuläßt, ist es falsch. Es kann dann auch bei $\delta U < 0$ Gleichgewicht herrschen. Erst durch das Axiom $II\,\delta a\,\beta$ wird der Begriff des konservativen Systems präzisiert, d. h. Reibung ausgeschlossen.

Axiom $II\,\delta a\,\gamma$: Es ist

$$\delta U = \mathrm{S}\, dm\, \nabla u\, \delta \mathfrak{r},$$

wo u eine endliche skalare, den einzelnen Massenpunkten zugeordnete Funktion aller Koordinaten sein kann.

$d\mathfrak{K} = -dm\,\nabla u$ heiße dann die an dem Punkte dm angreifende, von dem Potential U herrührende Kraft.

Berühmte Beispiele für die Anwendung des Energieprinzips in der Statik sind:

1. Die Behandlung des Gleichgewichtes eines Seiles auf einer schiefen Ebene durch SIMON STEVIN.

2. Der Satz von TORRICELLI: Eine vollkommen biegsame schwere Kette hängt so, daß der Schwerpunkt möglichst tief liegt.

36. Das Prinzip der kleinsten Wirkung. Im nichtstatischen Falle kann man das Energieprinzip dahin auffassen, daß es bei bekannter Bahn den Zeitverlauf angibt. Bei einem Grade der Freiheit genügt es vollkommen zur Bestimmung der Bewegung. Bei mehr als einem Grad der Freiheit kann die Bahn unabhängig davon durch folgendes Axiom gegeben werden:

Axiom $II\,\delta a\,\delta$: JACOBIS Prinzip der kleinsten Wirkung: Die Bahn bestimmt sich aus

$$\delta \int d\sigma = 0,$$

wo

$$d\sigma = \sqrt{(h-U)\,2E}\; dt.$$

gesetzt ist. Die Variation ist bei festen Grenzen zu nehmen und so zu verstehen, daß die $\delta\mathfrak{r}$ eine mögliche Verschiebung bedeuten; d. h., wird jedem Punkte P der wirklichen Bahn ein benachbarter Punkt Q zugeordnet, so ist $\delta\mathfrak{r} = \overline{PQ}$ eine mögliche Verschiebung, die Gesamtheit der Q braucht aber keine mögliche Bahn zu sein.

Nur dann, wenn auch die Q eine mögliche Nachbarbahn bilden, d. h., das System holonom ist, ist das Jacobische Axiom damit iden-

tisch, daß das Integral $\int d\sigma$ in hinreichend kleinen Intervallen ein Minimum ist.

Da $h - U = E$ ist, kann das Prinzip auch so formuliert werden (Euler):

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} 2E\,dt = 0.$$

Dabei sind aber t bzw. dt so zu variieren, daß $E + U = h$ bleibt. Das Prinzip kann nochmals umgeformt werden in

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(2E\frac{\delta\,dt}{dt} + 2\delta E\right)dt = 0$$

oder in

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(2E\frac{\delta\,dt}{dt} + \delta E - \delta U\right)dt = 0.$$

Nun behaupten wir, daß $\delta E + 2E\frac{d\,\delta t}{dt} = \delta' E$ ist, wo in δ' die Zeit nicht zu variieren ist.

Es ist ja

$$\delta E = \delta\frac{1}{2}\mathrm{S}\,dm\,\mathfrak{v}^2 = \mathrm{S}\,dm\,\mathfrak{v}\,\delta\mathfrak{v} = \mathrm{S}\,dm\,\mathfrak{v}\,\delta\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

$$= \mathrm{S}\,dm\,\mathfrak{v}\left(\frac{\delta\,d\mathfrak{r}}{dt} - \frac{d\mathfrak{r}\,\delta\,dt}{dt^2}\right) = \mathrm{S}\,dm\,\mathfrak{v}\,\delta'\mathfrak{v} - \mathrm{S}\,dm\,\mathfrak{v}^2\frac{\delta\,dt}{dt} = \delta' E - 2E\frac{\delta\,dt}{dt},$$

was zu beweisen war. Somit erhalten wir als gleichbedeutend das Hamiltonsche Prinzip

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta' E - \delta' U)\,dt = 0,$$

oder

$$\delta'\int_{t_0}^{t_1}(E - U)\,dt = 0.$$

Hier ist die Zeit nicht zu variieren. Wegen

$$\delta' U = \delta U = \mathrm{S}\,dm\,V_{\mathfrak{r}}\,\delta\mathfrak{r} = -\mathrm{S}\,d\mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{r}$$

kann man es auch schreiben

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta' E + \mathrm{S}\,d\mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{r})\,dt = 0.$$

In dieser Form ist es mit dem Lagrangeschen Prinzip (d'Alembertsches Prinzip plus Prinzip der virtuellen Arbeiten) im Innern des zulässigen Bewegungsbereiches identisch, denn dieses Prinzip heißt (s. Ziff. 12)

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{S}\,dm\,\mathfrak{v}\,\delta\mathfrak{r}) - \delta' E = \mathrm{S}\,d\mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{r},$$

woraus durch Integration und Festsetzung von $\delta\mathfrak{r} = 0$ an den Grenzen ohne weiteres obiges folgt. Man kann auf diese Weise die allgemeine Mechanik

aufbauen, wenn man entweder allgemeine Kräfte $d\mathfrak{K}$ zuläßt, die nicht von einem Potential herrühren oder das Axiom ausspricht:

Axiom II 5c η: Nichtkonservative Systeme erhält man durch Annahme idealer Bewegungen (z. B. der Wärmebewegung der Moleküle) und dadurch, daß man U noch von der Zeit abhängen läßt. In diesem letzteren Falle gilt noch das Hamiltonsche Prinzip, das Energieprinzip aber nur nach Hinzunahme weiterer für die Mechanik idealer Energieformen.

Für konservative Systeme folgt bekanntlich das Energieprinzip aus dem Hamiltonschen Prinzip.

Bemerkung: Die Identität des Hamiltonschen Prinzip mit dem d'Alembertschen in der Lagrangeschen Form ist oben nachgewiesen. Rückwärts gewinnt man das Jacobische Prinzip bei konservativen Systemen, wenn man das noch freie $\delta\, dt$ durch $\delta(E + U) = 0$ definiert.

Schlußbemerkung zu *II 5*: Wir haben stets die Gleichwertigkeit neuer Axiome mit dem d'Alembertschen Prinzip in der Lagrangeschen Fassung untersucht. Um die allgemeine Mechanik zu erhalten, wird man immer noch das Lagrangesche Befreiungsprinzip hinzufügen müssen.

III. Nichtklassische Mechaniken.

37. Die logische Unabhängigkeit der Axiome. Die logische Unabhängigkeit der Axiome ist dadurch zu erweisen, daß man logisch widerspruchsfreie Mechaniken angibt, die einzelne Axiome nicht erfüllen, wobei die Übereinstimmung mit der Erfahrung außer acht bleibt. Ein Teil der Unabhängigkeitsverhältnisse ist schon im vorhergehenden erörtert worden. Nicht alle möglichen Kombinationen sollen hier erschöpft, sondern nur die wesentlichen Unabhängigkeiten dargetan werden.

In erster Linie wird es sich um die Unabhängigkeit des Newtonschen Grundgesetzes *I f* handeln. Auch von den allgemeinen Axiomen der Naturerkenntnis. Das soll zugleich mit einer Zerlegung des Newtonschen Grundgesetzes in einzelne Axiome im folgenden geschehen.

a) Der gruppentheoretische Aufbau des Newtonschen Grundgesetzes.

38. Die drei Typen möglicher Mechaniken. Außer den allgemeinen Axiomen A, B, C, D (Ziff. 7) legen wir die folgenden zugrunde:

Axiom III 1a α: In bezug auf einen absoluten euklidischen Raum und eine absolute Zeit gibt es drei allgemeine Bewegungsgesetze der Form

$$\left.\begin{aligned} f(\mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{r}}, \ldots; \mu_1, \mu_2, \ldots) &= A, \\ g(\mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{r}}, \ldots; \mu_1, \mu_2, \ldots) &= B, \\ h(\mathfrak{r}, \ddot{\mathfrak{r}}, \ldots; \mu_1, \mu_2, \ldots) &= C, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wo die $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Skalare oder Tensoren sind, die dem betrachteten Punkt zugeordnet sind; f, g, h sind ein für allemal feste Funktionen der eingeschlossenen Größen. A, B, C, die resultierenden **Kraftgrößen**, sind Funktionen weiterer Kraftgrößen A_1, B_1, C_1; $A_2, B_2, C_2, \ldots$, die ihrerseits wieder durch Ursachen bestimmt sind, d. h. durch Vorgänge und Zustände am Punkt selbst und an anderen Punkten. $\mathfrak{r}$ und t kommen explizit nicht vor, womit der Homogenität von Raum und Zeit Rechnung getragen ist (Axiom A).

Axiom III 1a β: Die Bewegungsgleichungen sind invariant gegen Veränderungen des Koordinatensystems (Isotropie des Raums, also identisch mit *B*). Dies schließt ein, daß es Gleichungen der Form gibt:

$$A' = \varphi(A, B, C;\ \alpha, \beta, \gamma)$$

usw., welche gestatten, die Kraftgrößen A', B', C' für das neue System aus denen für das alte A, B, C und aus den Eulerschen Drehwinkeln α, β, γ des neuen gegen das alte System zu berechnen (s. H. 2).

Daraus folgt: Es gibt drei Typen möglicher Mechaniken: 1. die transitive[1]), bei der A, B, C einer Drehung, also den drei Bestimmungsstücken einer Einheitsquaternion äquivalent sind, 2. eine skalare, wo A, B, C Skalare sind und obige Gleichungen heißen $A' = A$ usw., 3. eine vektorielle, bei der A, B, C den drei Komponenten eines Vektors äquivalent sind (äquivalent heißt: sie lassen sich gegenseitig eindeutig ausdrücken).

Beispiel einer transitiven Mechanik:

$$\mu \mathfrak{w} = \lambda_1 \mathfrak{k}\,; \qquad \mu_2[\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}] = \lambda_2[\mathfrak{s}\,\mathfrak{k}]\,, \qquad (\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{s}}\,,\ \mathfrak{w} = \dot{\mathfrak{k}})\,,$$

wo

$$|\mathfrak{k}| = 1\,, \qquad |\mathfrak{s}| = 1\,, \qquad \mathfrak{k}\,\mathfrak{s} = 0\,.$$

Als Kraftgrößen sind die drei übrigbleibenden Stücke von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{k}$ anzusprechen; sie sind einer Einheitsquaternion äquivalent, nämlich der Drehung, die das Zweibein $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{k}$ aus einer Grundstellung in die augenblickliche bringt. λ_1 und λ_2 sind unbekannte Parameter. Man hat sie sich eliminiert zu denken, um aus den dastehenden fünf unabhängigen Gleichungen die erforderlichen drei zu erhalten.

Beispiel einer skalaren Mechanik:

$$\mu \frac{d}{dt}(\mathfrak{v}^2) = A\,; \qquad \mu \frac{d}{dt}(\mathfrak{w}^2) = B\,; \qquad \mu \frac{d}{dt}(\dot{\mathfrak{w}}^2) = C$$

In dieser Mechanik wären, wie man leicht erkennt, die Trägheitsbahnen gewöhnliche Schraubenlinien, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden. Wird also ein Punkt plötzlich losgelassen, d. h. so, daß er weiter keinen Kräften unterworfen ist, so behält er in dieser Mechanik Größe der Geschwindigkeit, Krümmungsradius und Windungsradius bei, die er im Moment des Loslassens gerade hat.

Eine solche Mechanik würde keinem allgemeinen Denkgesetze (auch nicht dem Kausalitätsprinzip) widersprechen, insbesondere auch nicht den Grundsätzen der Transzendentalphilosophie. Die Versuche SCHOPENHAUERS und anderer, aus solchen Prinzipien die Apriorität des Galileischen Trägheitsgesetzes zu beweisen, sind also falsch, wie schon MACH bemerkt hat.

40. Das Parallelogramm der Kräfte. *Axiom III 1b*: Die Funktionen, welche A, B, C als Resultierende von A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 usw. darstellen, genügen den folgenden Bedingungen:

1. Die Zusammensetzung ist kommutativ und assoziativ;
2. jedes Tripel ist durch die anderen eindeutig bestimmt;
3. die Zusammensetzungsformeln sind invariant gegen die Wahl des Koordinatensystems;
4. sie sind stetig.

Daraus folgt: α) Eine transitive Mechanik ist unmöglich, β) in den beiden anderen Fällen kann man statt A, B, C drei neue Kraftgrößen einführen, so daß

[1]) Transitiv heißt: Jedes Tripel A, B, C kann aus jedem anderen durch eine Drehung erzeugt werden, es gibt keine invariante Verbindung der A, B, C (LXII).

erstens entweder A, B, C Komponenten eines Vektors oder aber Skalare sind, und daß zweitens die Zusammensetzungsformeln lauten (H. 2)

$$A = A_1 + A_2 + \cdots, \qquad B = B_1 + B_2 + \cdots, \qquad C = C_1 + C_2 + \cdots.$$

Wir wollen uns im folgenden die Kraftgrößen stets so normiert denken.

Anders als früher in Ziff. 6 verfügen wir über die noch bestehende Möglichkeit, die A, B, C durch Funktionen von diesen zu ersetzen, so daß Axiom $I\,\delta\,\vartheta$ eine Definition wird. Läßt man nämlich dieses Axiom fort, so besteht, wie man leicht zeigen kann, die einzige Freiheit noch darin, statt $A\,B\,C$ Funktionen von ihnen einzuführen, so daß $I\,\delta\,\vartheta$ doch wieder erfüllt ist.

40. Die Axiome der Kontinuität. *Axiom III 1c α*: Wir nehmen die Axiome $I\,a$, b, c, $II\,a$ als erfüllt an.

Axiom III 1c β: Zu jedem Volumenteil dV gibt es erstens räumlich verteilte Kräfte

$$A = \xi\, dV, \qquad B = \eta\, dV, \qquad C = \zeta\, dV,$$

zweitens Oberflächenkräfte

$$A_n = \alpha_n\, dF, \qquad B_n = \beta_n\, dF, \qquad C_n = \gamma_n\, dF$$

(vgl. Axiom $II\,b$), so daß unsere Grundgleichungen heißen:

$$\mu f(\mathfrak{t}, \dot{\mathfrak{r}}, \ldots; \mu_1, \mu_2, \ldots) = \sum \xi + \lim_{dV \to 0} \frac{1}{dV} \mathrm{S}\, \alpha_n\, dF \quad \text{usw.}$$

Daraus folgt der **Fundamentalsatz**: Die Kräfte sind durch die bisherigen Axiome in beiden Typen bis auf eine homogene, lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten bestimmt, in der vektoriellen Mechanik sogar bis auf die Wahl des Koordinatensystems und den Maßstab. Der Kraftbegriff bedeutet also eine **Form**, in die ein empirisches mechanisches Gesetz wesentlich nur in einer Weise gebracht werden kann (H. 2).

41. Die Mechanik der speziellen Relativitätstheorie und die Newtonsche Mechanik. Noch immer sind die linken Seiten der Gleichungen (1) von Ziff. 38 allgemein, nur daß auch die f, g, h entweder die Komponenten eines Vektors oder Skalare sein müssen. Man kann also trotz der bisherigen Axiome noch immer nichtnewtonsche Mechaniken in großer Zahl konstruieren.

Die Mechanik der speziellen Relativitätstheorie gehört hierher, sie ist vektoriell und läßt sich schreiben[1])

$$\mu\, dV \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = d\mathfrak{K}.$$

Es gilt hier statt des Galileischen Relativitätsprinzips (Ziff. 3) die spezielle Einsteinsche Relativität (Lorentz-Transformation).

Die Newtonsche Mechanik läßt sich durch folgende weitere Axiome gewinnen:

Axiom III 1d α: Die Mechanik ist vektoriell.

Axiom III 1d β: Das Energieprinzip

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\, dm\, \mathfrak{v}^2\right) = \mathfrak{v}\, d\mathfrak{K}$$

soll eine Folge der Bewegungsgesetze sein.

---

1) S. Kap. 10 ds. Bd. ds. Handb.

Axiom III 1dγ: Es gilt das Galileische Relativitätsprinzip.

Aus dem letzten Axiom folgt, daß die linken Seiten unserer Gleichungen (1) von Ziff. 38, die wir nach dem ersten Axiom

$$dm\,\mathfrak{f}(\mathfrak{w}, \mathfrak{v}, \ldots; \mu_1, \mu_2 \ldots)\cdot dt$$

schreiben können, das $\mathfrak{v}$ nicht explizit enthalten. Aus dem zweiten Axiom aber folgt

$$dm\,\mathfrak{f}\mathfrak{v} = dm\,\mathfrak{v}\mathfrak{w}\,,$$

also

$$(\mathfrak{f} - \mathfrak{w})\mathfrak{v} = 0\,.$$

Da aber $\mathfrak{f}$ das $\mathfrak{v}$ nicht enthält, also $\mathfrak{f} - \mathfrak{w}$ von $\mathfrak{v}$ unabhängig ist, kann die Gleichung nur durch $\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{w}$ erfüllt sein, was zu beweisen war.

Schütz[1]) hat bewiesen, daß die Axiome *III 1dβ* und *γ* bereits zur Begründung des Newtonschen Gesetzes ausreichen.

Philipp Frank[2]) gewinnt in ähnlicher Weise auf gruppentheoretischem Wege auch die Mechanik der speziellen Relativitätstheorie, indem er statt des Galileischen Relativitätsprinzips das spezielle Einsteinsche fordert. Eine weitere Arbeit von Philipp Frank und H. Rothe[3]) enthält eine Ausdehnung der Betrachtungen unter Zugrundelegung allgemeinerer Gruppen von Transformationen. In allen Fällen wird die kinetische Energie als niederste Invariante eingeführt.

A. Kneser und Gertrud Weyl[4]) kombinieren das Galileische Relativitätsprinzip mit einem Prinzip der kleinsten Wirkung der Form $\delta\int \mathfrak{L}(q,\dot q)\,dt$ und zeigen die weittragende Bedeutung beider Annahmen.

In diesem Zusammenhange sind auch die kritischen Untersuchungen Painlevés[5]) zu nennen, die aber noch nicht eine strenge Axiomatik darstellen.

b) Nichtboltzmannsche Systemmechaniken.

42. Der verallgemeinerte Momentensatz. Läßt man das Boltzmannsche Axiom *II 1e* der Symmetrie der Spannungsdyade fallen, so erhält man statt des Momentensatzes einen etwas allgemeineren Satz.

Ist die Dyade der inneren Spannungen

$$\begin{matrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{matrix}$$

unsymmetrisch, so bilden bekanntlich die drei Größen

$$\tfrac{1}{2}(Z_y - Y_z),\ \tfrac{1}{2}(X_z - Z_x),\ \tfrac{1}{2}(Y_x - X_y)$$

die Komponenten eines Vektors, den wir mit $\mathfrak{T}$ bezeichnen wollen.

Man erhält dann leicht aus den Gleichungen

$$\mu\mathfrak{w} = \mathfrak{f} + \frac{\partial \mathfrak{s}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{s}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{s}_z}{\partial z}$$

---

[1]) Schütz, Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Göttinger Nachr., math.-phys. Klasse, 1897.

[2]) Philipp Frank, Wiener Ber., math.-nat. Klasse, Bd. 119, S. 373. 1910.

[3]) Philipp Frank u. H. Rothe, Wiener Ber. Bd. 119, S. 615. 1910.

[4]) A. Kneser, Math. ZS., Bd. 2, S. 326. 1918; Gertrud Weyl, ebenda Bd. 11, S. 97. 1921.

[5]) Painlevé, Les axiomes de la mécanique und: Note sur la propagation de la lumière. Paris 1922 in der Sammlung: Les maîtres de la pensée scientifique.

durch äußere Multiplikation mit $\mathfrak{r}\,dV$ und Integration sowie Anwendung des Gaußschen Satzes

$$\underset{V}{\mathrm{S}}\,dm[\mathfrak{r}\mathfrak{w}] = \underset{V}{\mathrm{S}}[\mathfrak{r}\mathfrak{k}]\,dV + \underset{O}{\mathrm{S}}[\mathfrak{r}\mathfrak{f}_n]\,dF - 2\underset{V}{\mathrm{S}}\,\mathfrak{T}\,dV\,.$$

In dem letzten Glied besteht die Abweichung. Man kann die Gleichung nun auch so auffassen, als gelte der Momentensatz, als gäbe es aber für jedes Volumenelement noch eingeprägte Momente $-2\mathfrak{T}\,dV$, die im Schwerpunktsatz keine Rolle spielen, beim Momentensatz aber hinzuzufügen wären.

Noch eine zweite Auffassung ist möglich: Man kann die als unsymmetrisch angenommene Spannungsdyade additiv in zwei Teile zerlegen, eine symmetrische mit

$$X'_y = Y'_x = \tfrac{1}{2}(X_y + Y_x) \quad \text{usw.}$$

und eine antisymmetrische. Bezeichnen wir alle Größen, die sich auf den symmetrischen Teil beziehen, mit Strichen, so läßt sich die Bewegungsgleichung so schreiben:

$$\mu\mathfrak{w} = \mathfrak{k} + \frac{\partial \mathfrak{f}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}'_z}{\partial z} - \operatorname{rot}\mathfrak{T}\,,$$

und der Schwerpunktsatz nimmt die Form an

$$\underset{V}{\mathrm{S}}\,dm\,\mathfrak{w} = \underset{V}{\mathrm{S}}\,\mathfrak{k}\,dV - \underset{V}{\mathrm{S}}\operatorname{rot}\mathfrak{T}\,dV + \underset{O}{\mathrm{S}}\,\mathfrak{f}'_n\,dF\,,$$

während der Momentensatz lautet

$$\underset{V}{\mathrm{S}}\,dm[\mathfrak{r}\mathfrak{w}] = \underset{V}{\mathrm{S}}[\mathfrak{r}\mathfrak{k}]\,dV + \underset{O}{\mathrm{S}}[\mathfrak{r}\mathfrak{f}'_n]\,dF - \underset{V}{\mathrm{S}}[\mathfrak{r}\operatorname{rot}\mathfrak{T}]\,dV\,.$$

Mithin läßt sich die nichtboltzmannsche Mechanik auch dadurch auf die Boltzmannsche zurückführen, daß man überall eine eingeprägte Kraft $-\operatorname{rot}\mathfrak{T}\,dV$ hinzufügt.

Damit ist die Unabhängigkeit des Boltzmannschen Axioms durch Zurückführung auf die klassische Mechanik dargetan.

Beispiele nichtboltzmannscher Mechaniken:

a) Beispiel von W. Thomson[1]): $\mathfrak{T} = [\mathfrak{c}\operatorname{rot}\mathfrak{v}]$, wo $\mathfrak{c}$ einen der Stelle zugeordneten Vektor bedeutet. Realisierung durch eingebaute unsichtbare Kreisel. Die Statik ist die gleiche wie die klassische ($\mathfrak{v} = 0$). Daraus folgt die Unabhängigkeit des d'Alembertschen Prinzips. Die Körper sind aber wegen $\mathfrak{c}$ nicht isotrop. Dies ist erreichbar, wenn man statt $\mathfrak{c}$ $C\mathfrak{v}$ nimmt. Da $\mathfrak{T}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$ ist, so gilt für starre Körper der Energiesatz in der klassischen Form. Das d'Alembertsche Prinzip ist also auch keine Folge des Energiesatzes.

b) $\mathfrak{T} = c\operatorname{rot}\mathfrak{v}$. Der Energiesatz gilt nicht in der klassischen Form. Der Körper ist isotrop.

c) $\mathfrak{T} = c\operatorname{div}\mathfrak{v}\operatorname{rot}\mathfrak{v}$. Wie vorher. Außerdem gilt die klassische Mechanik, also auch das d'Alembertsche Prinzip für starre Körper ($\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$), womit die Unabhängigkeit des Boltzmannschen Prinzips vom d'Alembertschen bei allgemeinen Systemen nachgewiesen ist (vgl. Ziff. 24).

c) Blick auf die Mechanik der Einsteinschen Relativitätstheorie.

43. Das Gravitationsfeld. Die Mechanik der speziellen Relativitätstheorie wurde schon kurz in Ziff. 41 gestreift, sie läßt sich leicht der Newtonschen angliedern.

[1]) Literatur und Bedeutung s. z. B. bei Brill, Mechanik raumerfüllender Massen, S. 135, 170.

In der allgemeinen Relativitätstheorie läßt sich die Mechanik der freien Punkte im Gravitationsfeld — darauf allein beschränken wir uns — durch folgende Axiome begründen:

Axiom III 8a: Die physikalischen Vorgänge spielen sich in einem vierdimensionalen Raum-Zeitkontinuum ab, das im Infinitesimalen eine euklidische Maßbestimmung hat:

$$ds^2 = \sum_1^4 g^{ik} dx_i dx_k .$$

Diese quadratische Form läßt sich an jeder Stelle reell auf die Form

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2$$

transformieren.

Axiom III 8b: Die Bewegung eines Punktes im Schwerefeld erfolgt auf den „geraden Linien":

$$\delta \int ds = 0$$

(Verallgemeinerung des Jacobischen Prinzips).

Axiom III 8c: Die g^{ik} genügen zehn partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (von denen wieder sechs unabhängig sind), die in den zweiten Ableitungen linear sind und invariant gegen eine beliebige Transformation der x (Relativitätsprinzip); d. h. führt man statt der x neue x' als zweimal stetig differenzierbare Funktionen der x ein und rechnet ds^2 in $\sum g' dx'_i dx'_k$ um, so genügen die g' Differentialgleichungen, die durch entsprechende Umrechnung der alten Differentialgleichungen entstehen.

Axiom III 8d: $\int ds$ bedeutet die Zeit, welche durch eine Lichtuhr gemessen wird, die den Punkt begleitet (Eigenzeit).

Axiom III 8e: Für die Lichtstrahlen ist $ds = 0$, also bei Transformation von ds^2 auf $-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2$:

$$\frac{dx_4}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}} = 1 .$$

(Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit).

Die Frage nach einem absoluten Raum und einer absoluten Zeit ist hier offenbar ganz bedeutungslos, da die „geraden Linien" der Weltgeometrie als die Bahnen der freien materiellen Punkte im Schwerefeld definiert sind und es also nicht mehr darauf ankommt, wie man diese „geraden Linien" anschaut (vgl. hierzu Ziff. 3).

IV. Die Widerspruchslosigkeit der Axiome.

44. Allgemeiner Überblick. Da in Form von Ursachen die ganze Physik in die Mechanik hineinspielt, kann Widerspruchslosigkeit nur teilweise nachgewiesen werden, soweit sich nämlich über die durch Ursachen bedingten Kräfte Bestimmteres angeben läßt.

Daß bei beliebigen Annahmen über die Kräfte Widersprüche auftreten können, hat in dem Beispiel der Reibung PAINLEVÉ[1]) gezeigt.

Der Beweis der Widerspruchslosigkeit gelang unter gewissen einschränkenden Bedingungen:

---

[1]) PAINLEVÉ, C. R. Bd. 120, S. 596. 1895; und Leçons sur le frottement, 1895. S. auch die Diskussion in der ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 58. 1910.

1. für die Stereomechanik A. MAYER[1]), E. ZERMELO[2]) und G. HAMEL (H. 1),

2. für die Elastomechanik KORN u. a.[3]),

3. für die Hydromechanik L. LICHTENSTEIN[4]).

Wir wollen auf die Fälle 2. und 3. hier nicht weiter eingehen; jedes bis zu Ende durchgerechnete Einzelproblem bedeutet auf einem kleinen Teilgebiet den Nachweis der Widerspruchslosigkeit.

45. Einzelausführung für die Stereomechanik. Im Fall der Stereomechanik kommt es darauf an, zu zeigen, daß sich die Beschleunigungen so bestimmen lassen, daß entweder ein Aufhören von Bindungen stattfindet (z. B. Loslösen der Körper voneinander) oder daß sich die Normaldrucke positiv berechnen lassen. Mathematisch ist die Behauptung der Widerspruchslosigkeit folgendem mathematischen Satz gleichwertig: Man habe $m = n + p$ lineare Gleichungen der Form

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k + \sum_{l=1}^{p} a_{i,n+l} z_l = b_i + y_i, \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k + \sum_{l=1}^{p} a_{i,n+l} z_l = b_i, \qquad (i = n+1, \ldots m)$$

wo die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{i,k} x_i x_k$$

positiv definit sei. Dann gestatten diese Gleichungen in den Unbekannten $x\,y\,z$ eine und nur eine Lösung unter den Nebenbedingungen

$$x_i y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n); \qquad x_i \geqq 0, \qquad y_i \geqq 0.$$

Wenn also ein x (eine Beschleunigungsgröße) positiv ist, ist das entsprechende y (ein Normaldruck) Null und umgekehrt. Die z sind keinen weiteren Einschränkungen unterworfen.

OSTROGRADSKY[5]), der sich nach FOURIER und GAUSS intensiv mit Ungleichheiten in der Mechanik beschäftigt hat, glaubte den Satz aussprechen zu können: diejenigen x sind Null, die sich bei nullgesetzten y negativ ergeben würden.

Dieser Satz ist falsch, wie ADOLF MAYER, wenn auch nicht ganz befriedigend, nachgewiesen hat. Man kann also nicht sagen: wenn sich bei fortgelassenen Normaldrucken eine Verletzung einiger Ungleichheitsbedingungen ergeben sollte, so bleiben diese Ungleichheitsbedingungen in Geltung; ergibt sich keine Verletzung, so kann die Bedingung fortgelassen werden. Da ADOLF MAYER kein Beispiel gibt, sollen hier zwei einfache folgen:

1. Es sei ein Punkt xy den Bedingungen unterworfen

$$x \geqq 0, \qquad y - x \geqq 0.$$

Wenn die Kraft $\mathfrak{K}$ so liegt, daß

$$X < 0, \qquad Y < 0, \qquad |Y| < |X|,$$

---

[1]) ADOLF MAYER, Leipziger Ber., math.-phys. Klasse Bd. 51, S. 224. 1899.

[2]) ZERMELO, Göttinger Nachr., math.-phys. Klasse 1899, 306. Weitere Literaturangaben Encykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, Art. 6 (STÄCKEL), S. 460; auch in STÄCKELS früher zitiertem Aufsatz in den Sitzungsber. Heidelb. Akad. Ber. 1919.

[3]) S. Encykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 4, Art. 24 (TEDONE), S. 55.

[4]) L. LICHTENSTEIN, Math. ZS. Bd. 23, S. 89. 1925; sowie Bd. 26. 1927.

[5]) OSTROGRADSKY, Petersburger Ber. 1834 u. 1838.

so gäbe Bewegung ohne Beachtung der Ungleichheiten offenbar für den Anfang ($x = 0$, $y = 0$; $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$)

$$\text{zwar} \quad \ddot{x} < 0, \quad \text{aber} \quad \frac{d^2}{dt^2}(y - x) > 0.$$

Trotzdem bleiben bei Beachtung der Ungleichheiten offenbar beide bestehen, d. h. der Punkt bleibt in der Ecke des zulässigen Feldes liegen.

2. Auch die gegenteilige Vermutung: wenn ohne Normaldrucke alle Bedingungen verletzt werden würden, bleiben alle bei der wirklichen Bewegung in Geltung, ist falsch, wie folgendes Beispiel zeigen möge. Bedingungen:

$$x \geqq 0, \qquad y + x \geqq 0; \qquad X < 0, \qquad Y < 0, \qquad |Y| > |X|.$$

Offenbar würde für diese Kraft bei $x = 0$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ ohne Normaldrucke $\ddot{x} < 0$, $\frac{d^2}{dt^2}(y + x) < 0$ folgen. Bei Beachtung der Ungleichheiten folgt

$$\text{zwar} \quad \frac{d^2}{dt^2}(y + x) = 0, \qquad \text{aber} \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} > 0.$$

ADOLF MAYER und ZERMELO, der zuerst die Eindeutigkeit bewiesen hat, benutzen zum Beweis das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwangs und beschränken sich auf Punktsysteme. Man kann den Satz auch auf beliebige Systeme starrer Körper mit beliebigen Bindungen (auch Reibung) ausdehnen unter Benutzung elementarer Hilfsmittel (vgl. Ziff. 25, H. 1).

Von einer Erörterung möglicher Zusammenstöße ist hier abgesehen worden. Es besteht die allerdings noch unbewiesene Vermutung, daß bei konsequent durchgeführter Kontinuitätshypothese ohne Idealisierungen, wie starren Körpern u. dgl., Stöße gar nicht vorkommen.

Kapitel 2.

Die Prinzipe der Dynamik.

Von

L. NORDHEIM, Göttingen.

I. Einleitung.

1. Geschichtliches und Literatur. Nach der Aufstellung der Grundgesetze der Mechanik durch NEWTON war es das Bestreben der Mathematiker und Physiker, für die Gesetze der Mechanik einen prägnanten Ausdruck und eine Zusammenfassung in den sog. Prinzipen zu finden. Der Zweck dieser Bemühungen ist ein zweifacher. Erstens sollten diese Prinzipe als Axiome an die Spitze gestellt werden, also die Newtonschen Axiome ersetzen und ergänzen; es sollte so gewissermaßen durch sie die ganze Mechanik in möglichst wenige Sätze zusammengefaßt werden. Zweitens aber erwiesen sich die ursprünglichen Newtonschen Gesetze für komplizierte Fälle wie Nebenbedingungen usw. als unhandlich und teilweise unzureichend, und es mußten daher Regeln gefunden werden, die es in jedem Falle erlauben, einfach und eindeutig die Bewegungsgleichungen abzuleiten.

Die erste, mehr logische Aufgabe ist bereits in dem vorigen Kapitel behandelt worden und wird deshalb nur, wo es wegen des Zusammenhanges notwendig ist, gestreift werden. Hier soll dagegen mehr die Frage nach der Aufstellung der Bewegungsgleichungen in den Vordergrund treten. Dabei ergeben sich gleichzeitig wichtige Gesichtspunkte für ihre Integration.

Die Prinzipe der Mechanik teilen sich in zwei Hauptgruppen, in Differential- und Integralprinzipe. Die ersteren sind die älteren. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen wurde bereits von STEVIN, GALILEI und insbesondere JOHANN BERNOULLI u. a. in einfachen Fällen benutzt und von LAGRANGE allgemein zur Begründung der Statik verwendet. Die Übertragung auf die Dynamik ist das Verdienst von D'ALEMBERT, nach dem ja auch das bekannte Prinzip benannt wird, während die systematische Durcharbeitung wieder in erster Linie von LAGRANGE ausgeführt wurde. GAUSS verdankt man weiter das Prinzip des kleinsten Zwanges, das das weitreichendste Differentialprinzip darstellt, während in neuester Zeit eine Zwischenform von JOURDAIN gefunden wurde.

Parallel dazu verläuft die Entwicklung der Integralprinzipe. Das zeitlich erste ist hier das gewöhnlich nach MAUPERTUIS genannte, aber erst von EULER mathematisch formulierte Prinzip der kleinsten Wirkung. Der größte Fortschritt wurde durch HAMILTON und JACOBI erzielt, denen man auch die systematische Integrationstheorie der mechanischen Gleichungen verdankt. Einen sehr interessanten Versuch stellt die Mechanik von HERTZ dar, die ohne den Kraftbegriff auszukommen suchte. HERTZ war ebenfalls der erste, der sich systematisch

mit den nichtholonomen Systemen befaßte. Allerdings erlangte er selbst noch nicht eine völlige Klärung der hiermit zusammenhängenden Fragen, die erst von Hölder erreicht wurde.

Betreffs der Literatur sei für die älteren Arbeiten auf den Enzyklopädieartikel von Voss[1]) verwiesen. Hier soll im allgemeinen nur die neuere Literatur (nach 1900) zitiert werden. Ein zusammenfassendes Lehrbuch hat Boltzmann[2]) geschrieben, ferner eine moderne kurze Darstellung Schaefer[3]). Daneben werden die Prinzipe natürlich mehr oder weniger in allen Lehrbüchern der Mechanik behandelt[4]). Für die Geschichte der Mechanik ist vor allem das Buch von Mach[5]) zu nennen, ferner auch das von Haas[6]).

2. Allgemeiner Überblick. Bei der folgenden Darstellung ist Wert darauf gelegt worden, einerseits alle praktisch vorkommenden Fälle zu erfassen, d. h. eine Anweisung zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen zu geben. Andererseits soll der Zusammenhang zwischen den bekannten Prinzipen klargelegt, d. h. gezeigt werden, wieweit sie aufeinander zurückführbar sind oder jeweils neue Voraussetzungen enthalten. Natürlich kann man ein Prinzip nicht „beweisen", sondern man kann nur entweder direkt zeigen, daß es die bekannten, erfahrungsgemäß richtigen Bewegungsgleichungen liefert, oder es auf ein anderes zurückführen. Es ist daher auch nicht nötig, jedesmal alle Fälle durchzudiskutieren. Es genügt vielmehr, dies bei den bequemsten Formen zu tun und sonst nur auf die Möglichkeit hinzuweisen.

Von den Prinzipen wohl zu unterscheiden sind die häufig irreführenderweise auch als Prinzipe bezeichneten allgemeinen Sätze der Mechanik, wie Energiesatz, Schwerpunkt- und Flächensätze; diese sind aber aus den Grundgleichungen der Mechanik ableitbar und also Folgerungen aus ihnen, während das Umgekehrte nicht gilt. Erst bei Ausdehnung auf das Gesamtgebiet der Physik erhalten sie den Rang von Prinzipen.

Den zwei Hauptabschnitten, den Differential- bzw. Integralprinzipen, entsprechen auch im wesentlichen getrennte Anwendungsgebiete. Die in der Hauptsache von Lagrange[7]) entwickelte Mechanik der Differentialprinzipe mit den verschiedenen Arten von Zwangsbedingungen und der Einführung und Berechnung der Reaktionskräfte ist das gegebene Instrument für die technische Mechanik. Die Mechanik der Integralprinzipe, die sich hauptsächlich an die Namen von Hamilton[8]) und Jacobi[9]) anknüpft, ist dagegen die geeignetste Methode für die Behandlung der freien Massenpunkte und daher für die Astronomie und die Atommechanik und damit die moderne Physik. In der Tat knüpft die neuere Entwicklung der theoretischen Physik sehr eng an die Hamiltonsche Mechanik an, sowohl im Großen in der Relativitätstheorie als auch im

---

1) A. Voss, Enzykl. d. Math. Wiss. Bd. IV, S. 1, 1. Art.

2) L. Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik, Bd. I u. II. Leipzig 1897 u. 1904.

3) Cl. Schaefer, Die Prinzipe der Dynamik. Leipzig 1919.

4) Es seien hier als für unser Spezialgebiet besonders wesentlich nur genannt: für die allgemeine Mechanik: P. Appell, Traité de mécanique rationnelle, 3. Aufl., Bd. I—V. Paris 1911—1926; E. T. Whittaker, Analytical Dynamics, 2. Aufl. Cambridge 1917, auch deutsch von F. u. K. Mittelsten-Scheid. Berlin 1924; ferner für die Differentialprinzipe auch C. H. Müller u. G. Prange, Allgemeine Mechanik. Hannover 1923.

5) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 7. Aufl. Leipzig 1912.

6) A. E. Haas, Die Grundgleichungen der Mechanik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwicklung. Leipzig 1914.

7) J. L. Lagrange, Mécanique analytique, Paris, 1811—15.

8) W. R. Hamilton, Phil. Trans. 1834, S. 307 u. 1835, S. 95, seine optischen Untersuchungen: Trans. Irish Acad. Bd. 15, S. 69. 1828; Bd. 16, S. 93. 1830.

9) C. G. Jacobi, s. besonders: Vorlesungen über Dynamik, gehalten 1842—1843, herausgeg. von A. Clebsch, 2. Ausg. Berlin 1884.

Kleinen in der Quantentheorie. Sie wird deshalb im nächsten Kapitel ausführlich besprochen.

Wenn auch heute als Ziel die Zurückführung der ganzen Mechanik auf die der Atome feststeht, so ist dieser Weg für die Anwendung in der Technik natürlich unzweckmäßig, und es ist daher notwendig, beide Teile der Mechanik für sich weiterzuentwickeln. An und für sich kann aber diese Zurückführung heute bereits als ziemlich befriedigend erledigt angesehen werden, und zwar für die Elastizitätstheorie durch die Theorie der Kristallgitter[1]) und für die Hydrodynamik durch die kinetische Gastheorie[2]).

Wir beschränken uns im folgenden auf die Mechanik diskreter Massenpunkte. Aus dieser ist die Mechanik der starren Körper durch Einführung von Nebenbedingungen, d. h. Bindungen, durch die die Eigenschaften der starren Körper charakterisiert werden, stets leicht abzuleiten. Der Übergang zu der Mechanik der deformierbaren Kontinua ist dagegen, wie im vorigen Kapitel ausgeführt, schwieriger und erfordert die Hinzunahme neuer Axiome. Als allgemeine Mechanik wird daher auch gewöhnlich die Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper bezeichnet, auf die wir uns hier beschränken.

Der Symmetrie und der einfacheren Schreibweise halber seien im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, die Koordinaten der einzelnen Massenpunkte durchnumeriert, also die x, y, z-Koordinate des ersten Massenpunktes bzw. mit x_1, x_2, x_3, die des zweiten mit x_4, x_5, x_6 usw. bezeichnet. Ebenso sollen die allgemeinen Kraftkomponenten X_i und die Massen m_i behandelt werden. Bei den letzteren ist natürlich stets $m_{3\alpha} = m_{3\alpha+1} = m_{3\alpha+2}$. Wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, denken wir uns die X_i als unabhängig von den Geschwindigkeiten $\dot{x}_i$. Zur Veranschaulichung benutzen wir auch einen Lagenraum der Koordinaten, dessen Dimensionszahl gleich der Zahl der Freiheitsgrade f ist. Bei Summation über alle Koordinaten benutzen wir als Summationszeiger i, k oder l.

II. Differentialprinzipe.

a) Statik.

3. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für freie Systeme. Haben wir ein System von vollkommen freien Massenpunkten, so lauten die Bedingungen für das Gleichgewicht, also dafür, daß alle Massenpunkte unter dem Einfluß der Kräfte in Ruhe bleiben sollen:

$$X_i = 0. \qquad (i = 1, \ldots f) \tag{1}$$

Diese f Gleichungen lassen sich formal in eine einzige zusammenfassen, indem man jede mit einer zunächst völlig willkürlichen Größe δx_i multipliziert, über alle Koordinaten summiert und verlangt

$$\sum_i X_i \delta x_i = 0. \tag{2}$$

Die Forderung, daß der Ausdruck der linken Seite für alle beliebigen Werte der δx_i verschwinden soll, stellt das Prinzip der virtuellen Verrückungen[3]) dar und ist für freie Massenpunkte offenbar völlig äquivalent mit dem Gleichungssystem (1);

---

[1]) Siehe M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes (Dynamik der Kristallgitter). Leipzig 1923; auch in der Enzykl. d. Math. Wiss. Bd. V, 3, Art. 25.

[2]) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie; D. Hilbert, Math. Ann. Bd. 72, S. 562. 1912; D. Enskog, Kinetische Theorie der Vorgänge in mäßig verdünnten Gasen. Dissert. Upsala 1917. J. H. Jeans, The Dynamical Theory of Gases, 4. Ed. Cambridge 1925; Deutsche Übersetzung von R. Fürth. Braunschweig 1926.

[3]) Über die Bedeutung der Bezeichnung virtuell s. Ziff. 5.

denn man kann z. B. alle δx_i außer δx_1 gleich Null nehmen und dann wegen der Willkür von δx_1 von $X_1 \delta x_1 = 0$ auf $X_1 = 0$ schließen usw.

Dies ist zunächst rein formal. Man kann aber auch die δx_i als infinitesimale Verrückungen der i-ten Koordinate auffassen. Dann stellt $\sum X_i \delta x_i$ auch die Arbeit dar, die die Kräfte leisten, wenn sie den Massenpunkten diese Verrückungen erteilten. Die Gleichung (2) wird danach auch als das **Prinzip der virtuellen Arbeiten** bezeichnet und läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Ein System freier Massenpunkte ist dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn für jede beliebige infinitesimale Verrückung der Punkte die geleistete Arbeit verschwindet.

Diese Formulierung ist hier noch völlig nichtssagend. Sie erweist sich aber als sehr zweckmäßig, wenn die Bewegungsfreiheit des Systems irgendwelchen Beschränkungen unterworfen ist.

4. Holonome, nichtholonome, skleronome und rheonome Bedingungen. Die Betrachtungen der vorigen Ziffer galten nur für freie Massenpunkte. Hier waren (1) und (2) völlig äquivalent. Häufig sind aber Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten vorgeschrieben. Solche Bedingungen können verschiedene Formen haben:

1. Die Bedingungen enthalten nur die Koordinaten der Punkte, besitzen also die Form

$$\varphi_\nu(x_1, \ldots x_f) = 0. \qquad (\nu = 1, \ldots g) \tag{1}$$

Die Zahl der Bedingungen sei g. Diese einfachste sog. **holonome** Form der Bedingungsgleichungen ist realisiert bei allen Arten starrer Bindungen und bei Führungen auf vollkommen glatten Flächen oder Kurven. Enthalten ferner die Bedingungen (1) die Zeit t nicht explizite, so nennt man sie **skleronom**.

2. Die Bedingungen enthalten auch die Ableitungen der Koordinaten nach der Zeit, sind also von der Form

$$\varphi_\nu\left(x_1, \ldots x_f; \frac{dx_1}{dt}, \ldots \frac{dx_f}{dt}\right) = 0. \tag{2}$$

Man nennt sie dann nach Hertz **nichtholonom**. Von dieser Art sind z. B. die Führungen, die durch Rollen ohne Gleitung entstehen, oder die Einschränkung der Bewegung einer Schneide auf einer Fläche (Schlittschuhläufer). In fast allen praktisch vorkommenden Fällen sind die Bedingungen linear in den Ableitungen, haben also die Form

$$\sum_i a_{i\nu}(x_1, \ldots x_f, t)\, dx_i + a_\nu\, dt = 0. \qquad (\nu = 1, \ldots g) \tag{2a}$$

Sie unterscheiden sich von den Bedingungen (1) natürlich nur dann, wenn diese Differentialausdrücke nicht integrabel sind, d. h. sich nicht durch irgendwelche Integrationsprozesse auf endliche Bedingungsgleichungen zurückführen lassen. Notwendig (obgleich nicht immer hinreichend) hierfür ist, daß mindestens für ein Paar der Koeffizienten

$$\frac{\partial a_{i\nu}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{k\nu}}{\partial x_i} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial a_{i\nu}}{\partial t} + \frac{\partial a_\nu}{\partial x_i}$$

wird,

3. Die Bedingungen können auch die Zeit explizit enthalten. Dieser Art sind z. B. Führungen durch bewegte Flächen. Man nennt sie nach Boltzmann **rheonom**. Sie können sowohl holonom als auch nichtholonom sein. Der allgemeinste Fall sind also nichtholonom-rheonome Bedingungsgleichungen. Ein Beispiel für letztere ist das Rollen auf einer bewegten Fläche.

4. Als letzte Möglichkeit bleibt dann noch das Bestehen von Ungleichungen, z. B. derart, daß die Bewegungsfreiheit eines Massenpunktes durch eine undurchdringliche Fläche im Raum eingeschränkt wird. Auch Ungleichungen können nichtholonom-rheonom sein und lassen sich dann in allen in Betracht kommenden Fällen auf die Form

$$\sum_i a_{ir}\,dx_i + a_r\,dt \leq 0$$

bringen.

5. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für gebundene Systeme. Um nun die Bedingungen des Gleichgewichts bei Bestehen solcher Bedingungsgleichungen aufzustellen, bedarf es zusätzlicher Axiome. Für freie Massenpunkte ließen sich die Gleichgewichtsbedingungen aus der Forderung ableiten, daß die geleistete Arbeit bei einer beliebigen infinitesimalen Verrückung verschwinden soll. Jetzt hingegen sind nicht mehr beliebige Verrückungen möglich, da ja die Bewegungsfreiheit des Systems durch die Bedingungen eingeschränkt ist. Es liegt nahe, das Prinzip so zu verallgemeinern, daß jetzt nur mehr verlangt wird, daß die Arbeit bei allen den infinitesimalen Verrückungen verschwindet, die mit den Bedingungsgleichungen verträglich sind, da ja alle anderen Verrückungen von vornherein unterbunden sind. Hierin liegt natürlich eine Hypothese, die nur durch die Erfahrung bestätigt werden kann.

Diese so beschränkten Verrückungen werden zum Unterschied von den allgemeinsten Verrückungen als virtuelle, d. h. mögliche Verrückungen bezeichnet. Beispielsweise sind bei der Bindung eines Punktes an eine Fläche die virtuellen Verrückungen diejenigen, bei denen der Massenpunkt auf der Fläche bleibt.

Um den analytischen Ausdruck für das Prinzip zu erhalten, beschränken wir uns zunächst auf die endlichen, holonomen Bedingungsgleichungen (1) von Ziff. 4. Schreiben wir die infinitesimalen Verrückungen wie in Ziff. 3 stets mit einem δ zum Unterschied von den Differentialzeichen d und ∂, eine Verabredung, die durchgehend festgehalten werden soll, so unterliegen also die virtuellen Verrückungen δx_i für die Bedingungsgleichungen (1) von Ziff. 4 den Forderungen

$$\varphi_r(x_1 + \delta x_1, \ldots x_f + \delta x_f) = 0,$$

die oben aussagen, daß auch die variierte Lage den Bedingungsgleichungen genügt. Da die Verrückungen auch infinitesimal sein sollen, so erhält man durch Entwicklung nach TAYLOR und Abbrechen nach dem ersten Glied unter Berücksichtigung von (1) Ziff. 4

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}\,\delta x_i = 0. \qquad (r = 1, \ldots g) \tag{1}$$

Die Forderung, daß die Verrückungen infinitesimal sein sollen, ist wesentlich, damit diese Gleichungen linear in den δx_i werden.

Hierzu tritt die Forderung des Prinzips der virtuellen Verrückungen

$$\sum_i X_i\,\delta x_i = 0, \tag{2}$$

wo die linke Seite wieder die Arbeit bei einer solchen Verrückung darstellt.

Die Gleichungen (1) und (2) lassen sich in eine Gleichung zusammenfassen unter Verwendung von unbestimmten Multiplikatoren λ_r, die gewöhnlich Lagrangesche Faktoren genannt werden, indem man die Gleichungen (1) jeweils mit λ_r multipliziert und zu (2) addiert. Man erhält so

$$\sum_i \Big(X_i + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}\Big)\,\delta x_i = 0. \tag{3}$$

Hierin sind von den Komponenten der virtuellen Verrückungen δx_i genau $(f-g)$ willkürlich wählbar, während die übrigen dann durch die Nebenbedingungen (1) bestimmt sind. Die Multiplikatoren λ_r denke man sich nun so gewählt, daß gerade die Faktoren der letzten g Komponenten verschwinden. Welche man als diese wählt, ist natürlich gleichgültig. Dann bleiben in (3) $(f-g)$ Glieder stehen, die jetzt mit völlig willkürlichen Verrückungen multipliziert sind. Daher müssen auch die Koeffizienten von diesen alle für sich verschwinden. Der Kunstgriff der Lagrangeschen Faktoren erlaubt es also, aus den Gleichungen (3) in gleicher Weise Folgerungen zu ziehen, als wenn die δx_i völlig willkürlich wären, und man erhält als Gleichgewichtsbedingungen die $f=3n$ Gleichungen

$$X_i + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} = 0, \tag{4}$$

die zusammen mit den g Bedingungsgleichungen (1) gerade zur Bestimmung der $3n+g$ Unbekannten x_i, λ_r ausreichen, also das Gleichgewicht völlig festlegen.

Aus den Überlegungen, die zu den Gleichungen (4) führen, ist nun leicht zu sehen, wie man bei nichtholonomen und rheonomen Bedingungsgleichungen zu verfahren hat. Bei nichtholonom-skleronomen Bedingungen ist eine zu (1) analoge Beziehung zwischen den Verrückungskomponenten bereits in Ziff. 4, Gleichung (2a) enthalten (wobei dort vorläufig $a_r=0$ zu setzen ist), nämlich

$$\sum_i a_{ir}\,\delta x_i = 0, \tag{1a}$$

und es gelten offenbar die Gleichungen (4), wenn man an Stelle der $\partial\varphi_r/\partial x_i$ die entsprechenden Koeffizienten a_{ir} nimmt. Dazu können noch h holonome Bedingungen treten, so daß wir als allgemeinste Form der Gleichgewichtsbedingungen

$$X_i + \sum_r \lambda_r a_{ir} + \sum_s \mu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} = 0 \tag{4a}$$

erhalten. Dies sind f Gleichungen, die zusammen mit den $g+h$ Nebenbedingungen gerade ausreichen, die $f+g+h$ Unbekannten x_i, λ_r, μ_s zu bestimmen. Im allgemeinen wird natürlich das Gleichungssystem (4a) mehrere Lösungen haben, d. h. es werden mehrere Gleichgewichtslagen existieren.

Tritt nun noch die Zeit explizit in den Bedingungsgleichungen auf (rheonomer Fall), so erhält man die Gleichgewichtsbedingungen aus der Erwägung, daß für jeden Zeitpunkt das System unter Einfluß aller Kräfte und Bindungen im Gleichgewicht sein muß. Das heißt, setzen wir für t irgendeinen Zahlenwert ein, so müssen die Gleichungen (4) bzw. (4a) bestehen. Das bedeutet, daß wir unser Prinzip formal ungeändert übernehmen können, wenn wir die Zeit wie einen konstanten Parameter behandeln. Hierbei ist jedoch folgender Punkt zu beachten: Bei einer wirklichen Verrückung, die ja in einem Zeitintervall dt erfolgen würde, wird auch die Zeit variiert. Die wirklichen Verrückungen genügen also Bedingungen der Form

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} d x_i + \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} d t = 0$$

bzw.

$$\sum_i a_{ir}\, d x_i + a_r\, d t = 0 .$$

Sie gehören also nicht zu den virtuellen Verrückungen, die durch Weglassung der Glieder mit dt entstehen, demnach für holonome Bedingungen den Glei-

chungen (1), für nichtholonome den entsprechenden (1a) genügen. Es müssen also die Stützflächen, die im rheonomen Fall in gegebener Weise bewegt werden, für die virtuellen Verrückungen in einem bestimmten Augenblick als ruhend angesehen werden. Man kann diese zunächst schwer verständlich erscheinende Festsetzung dadurch begründen, daß man den rheonomen Fall durch Grenzübergang aus dem skleronomen Fall ableitet, indem man die Massen der Stützkörper gegen ∞ gehen läßt. Dann verschwindet nämlich die Rückwirkung der Bewegung des betrachteten Systems auf die der Stützkörper, und eine ursprünglich skleronome Bindung zwischen beiden geht in eine rheonome für das System allein über[1]).

Hiermit ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen in möglichster Allgemeinheit aufgestellt. Es versagt nur bei nichtholonomen Nebenbedingungen, die nicht auf die Pfaffsche Form (2a) von Ziff. 4 gebracht werden können.

6. Die Bedeutung der Lagrangeschen Faktoren. Die Bedingungsgleichungen, denen die mechanischen Systeme unterworfen sein sollen, kann man sich offenbar ersetzt denken durch geeignete Kräfte, sog. Führungs- oder Zwangskräfte, die gerade so beschaffen sind, daß unter ihrer Mitwirkung die freien Bewegungen des Systems mit den Bewegungen des gebundenen Systems übereinstimmen. Diese Zwangskräfte müssen umgekehrt nach dem Gegenwirkungsaxiom den Kraftwirkungen, die die Massenpunkte auf ihre Führungen ausüben, entgegengesetzt gleich sein. Die Bestimmung dieser Reaktionskräfte ist natürlich für die Technik von großer Wichtigkeit, wenn sie auch für die Berechnung der tatsächlichen Bewegung nicht nötig ist.

Daß diese Einführung der Führungskräfte immer möglich ist, sieht man sofort aus dem Vergleich der Gleichungen (1) von Ziff. 3 für freie und den Gleichungen (4) bzw. (4a) von Ziff. 5 für gebundene Bewegungen. Letztere gehen in die ersteren über, wenn man die Ausdrücke

$$Z_i = \sum_r \lambda_r a_{ir} + \sum_s \mu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \tag{1}$$

als Kräfte auffaßt, die eben gerade den gesuchten Führungskräften entsprechen. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten also dann, daß die eingeprägten Kräfte (wie man auch die äußeren Kräfte bezeichnet) den Führungskräften entgegengesetzt gleich sein sollen.

Im Falle der Bindung eines Massenpunktes an eine Fläche, also einer Bindung $\varphi(x, y, z) = 0$, läßt sich die Zwangskraft besonders einfach veranschaulichen. Die Komponenten sind hier proportional zu den Richtungskosinus der Normalen der Fläche, wie man aus deren Darstellung

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}}$$

ersieht. Die Zwangskraft steht also senkrecht zu der Führungsfläche. Im allgemeinen Fall sagen die Bedingungen (1) bzw. (1a) von Ziff. 5, daß die Zwangskräfte bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten dürfen. Natürlich kann man auch diesen Satz als Axiom an die Spitze stellen und daraus die Gleichungen (3), (4) bzw. (4a) von Ziff. 5 ableiten.

7. Ungleichungen als Nebenbedingungen. Wir müssen jetzt noch den Fall betrachten, daß außer den gewöhnlichen Nebenbedingungen eine oder mehrere Ungleichungen

$$\varphi(x_i, t) \leq 0 \tag{1}$$

[1]) Siehe E. Delassus, Darboux Bull. (2) Bd. 45, 231, 1921.

vorgeschrieben sind[1]). Auch hierfür behalten wir die Definition der virtuellen Verrückungen bei, daß sie solche kleine Verschiebungen δx_i der Koordinaten darstellen, die mit den Bedingungen verträglich sind. Bei Bestehen von Ungleichungen der Form (1) sind sie dann auch Ungleichungen

$$\sum_i a_{i\nu}\,\delta x_\nu \leqq 0 \tag{1a}$$

unterworfen. Im holonomen Fall ist wieder

$$a_{i\nu} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i}, \tag{1b}$$

doch lassen wir auch nichtholonome Bedingungen (1a) zu, die sich also nicht in der integrierten Form (1) darstellen lassen. Ein besonderes Charakteristikum der Ungleichungen ist, daß bei ihnen im allgemeinen zu einer virtuellen Verschiebung nicht die entgegengesetzte, die durch Umkehrung der Vorzeichen der δx_i entsteht, zulässig ist.

Die Erweiterung des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf diese Fälle wurde durch Fourier geleistet. Man darf jetzt offenbar nicht mehr das Verschwinden der virtuellen Arbeiten postulieren.

Die virtuellen Verrückungen können wir in zwei Gruppen teilen, nämlich erstens in solche, bei denen in (1a) überall das Gleichheitszeichen gilt, wir bezeichnen sie als Gleichheitsverrückungen, und zweitens in Ungleichheitsverrückungen, bei denen das Zeichen $<$ gilt. Nun ist zunächst klar, daß eine Lage des Systems nur dann eine Gleichgewichtslage sein kann, wenn sie es schon den Gleichheitsverrückungen gegenüber ist, denn das Zulassen der Ungleichheitsverrückungen bedeutet ja die Aufhebung einer Beschränkung der Bewegungsfreiheit. Nehmen wir nun an, wir hätten eine Gleichgewichtslage gegenüber allen Gleichheitsverrückungen gefunden, dann ist für diese

$$\sum X_i\,\delta x_i = 0\,.$$

Fügen wir aber die Ungleichheitsverrückungen hinzu, erweitern also den Bereich der virtuellen Verrückungen, so lassen sich nach (1a) sicher solche finden, für die

$$\sum X_i\,\delta x_i \neq 0$$

wird. Man kann nun leicht einsehen, daß für alle wirklich eintretenden Bewegungen die Summe der virtuellen Arbeiten > 0 sein muß. Bei ihnen folgt nämlich jeder Massenpunkt der Resultante der auf ihn wirkenden Kräfte. Nehmen wir also die Verschiebungen in diesen Richtungen, so haben die X_i und die δx_i stets das gleiche Vorzeichen, also wird $\sum X_i\,\delta x_i$ stets positiv für diese Verrückungen. Allen virtuellen Verrückungen, für die die Summe der virtuellen Arbeiten < 0 ist, kann also keine wirklich eintretende Bewegung entsprechen, wohl aber den Verrückungen, für die die Arbeit positiv ausfällt. Dieser Sachlage muß man offenbar in der Weise Rechnung tragen, daß man für das Prinzip der virtuellen Verrückungen nicht mehr das Gleichheitszeichen, sondern das Zeichen $\leqq$ nimmt, also

$$\sum X_i\,\delta x_i \leqq 0 \tag{2}$$

fordert. Dieser Ansatz ist natürlich wieder eine neue Hypothese, die sich nicht beweisen, sondern nur verifizieren läßt.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht kann man auf Grund von (2) wie früher mit Hilfe Lagrangescher Faktoren in der Form

$$X_i + \sum_\nu \lambda_\nu a_{i\nu} = 0$$

---

1) Eine ausführliche Diskussion der Ungleichungen auch in der Kinetik gibt E. Delassus, Ann. de l'Écol. Norm. (3) Bd. 34, S. 95. 1917.

schreiben. Dabei sind die Faktoren λ_ν, die zu Ungleichungen gehören, der alleinigen Beschränkung unterworfen, daß sie < 0 sein müssen, denn dann wird

$$\sum_i X_i \delta x_i = -\sum_\nu \lambda_\nu \sum_i a_{i\nu} \delta x_i$$

vermöge der Gleichungen (1a) sicher negativ.

b) Kinetik.

8. Das d'Alembertsche Prinzip. Gehen wir jetzt zur Kinetik über, so gelten für ein System freier Massenpunkte nicht mehr die einfachen Gleichungen (1) von Ziff. 3, sondern an ihrer Stelle die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$X_i - m_i \ddot{x}_i = 0. \qquad (i = 1, \ldots f) \tag{1}$$

Diese lassen sich, wie zuerst von JAKOB BERNOULLI bemerkt wurde, und was dann D'ALEMBERT systematisch in seiner Mechanik verwertete, in ganz analoger Weise wie die Gleichgewichtsbedingungen behandeln, indem man die Größen $m_i \ddot{x}_i$ auch als Kräfte, die sog. Trägheitskräfte, auffaßt. Dann halten also die Trägheitskräfte den eingeprägten Kräften das Gleichgewicht.

Zunächst fassen wir, wie in der Statik, die Gleichungen (1) in eine einzige Beziehung mit Hilfe von willkürlichen Verrückungen δx_i zusammen:

$$\sum_i (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0. \tag{2}$$

Diese Formulierung, die wieder mit (1) identisch ist, rührt von LAGRANGE her. Führen wir jetzt Nebenbedingungen ein, die alle Formen von Ziff. 4 haben können, so postuliert das d'Alembertsche Prinzip, daß Gleichung (2) ihre Gültigkeit behalten soll, wenn jetzt die δx_i dieselben Bedingungen wie die virtuellen Verrückungen in der Statik erfüllen. Man kann dieses Axiom wieder durch die Forderung ersetzen, daß die Führungskräfte keine Arbeit leisten dürfen, oder auch mit D'ALEMBERT folgendermaßen durch Analogieschluß auf die Statik zurückführen.

Die wirklich eintretenden Beschleunigungen würden für ein freies System unter dem Zusammenwirken der eingeprägten Kräfte X_i und gewisser Führungskräfte Z_i eintreten. Diese sind bestimmt durch

$$m_i \ddot{x}_i - X_i = Z_i, \tag{3}$$

wo die $\ddot{x}_i$ die wirklich eintretenden Beschleunigungen sind. Die Reaktionskräfte Z_i werden nun neutralisiert durch die Bindungen. Es müssen also die Kräfte Z_i für sich unter Berücksichtigung der Bindungen in jedem Augenblick Gleichgewicht ergeben. Man bezeichnet sie deshalb auch als verlorene Kräfte. Es gilt also nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$\sum_i Z_i \delta x_i = 0, \tag{4}$$

was nach (3) mit (2) identisch ist. Es wird also das dynamische Problem auf ein Problem der Statik zurückgeführt. Das d'Alembertsche Prinzip läßt sich also so aussprechen: Ein System von Massenpunkten bewegt sich unter dem Einfluß beliebiger Kräfte und Bindungen so, daß sich stets die verlorenen Kräfte das Gleichgewicht halten, also keine Arbeit leisten.

Wir wollen hier allerdings, dem allgemeinen Sprachgebrauch folgend, als d'Alembertsches Prinzip stets die Formel (2) bezeichnen.

Natürlich steckt in der eben angeführten Überlegung eine wesentlich neue Voraussetzung, und man kann diese Zurückführung nicht als einen Beweis des

d'Alembertschen Prinzips aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen bezeichnen.

Aus (2) bekommt man dann die Bewegungsgleichungen genau wie in Ziff. 5. Sie lauten:

$$X_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_r \lambda_r a_{ir} + \sum_s \mu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} = 0. \tag{5}$$

Dies sind die sog. **Lagrangeschen Gleichungen erster Art**, die also auch für nichtholonom-rheonome Bedingungen gelten. Es sei dabei nochmals darauf hingewiesen, daß auch hier im rheonomen Fall die Zeit nicht mit variiert werden darf, da es sich um ein Gleichgewichtsproblem in jedem Augenblick handelt.

Die Führungskräfte selbst werden natürlich wieder

$$Z_i = \sum_r \lambda_r a_{ir} + \sum_s \mu_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \tag{6}$$

und erfüllen, wie es sein muß, die Relation (4), wie man mit Hilfe der Nebenbedingungen (1) und (1a) von Ziff. 5 sofort einsieht.

Sind wieder Ungleichungen vorhanden, so kann in (2) das Gleichheitszeichen nicht mehr genügen. Im Sinne der Ziff. 7 hat man an seiner Stelle zu fordern

$$\sum_i (X_i - m_i \ddot{x}_i)\, \delta x_i \leq 0. \tag{2a}$$

Diese Beziehung bestimmt allerdings die Bewegung nicht immer eindeutig. Wir kommen darauf beim Gaußschen Prinzip zurück[1]).

9. Verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten; die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art. Die ständige Mitführung von Nebenbedingungen ist naturgemäß bei vielen Problemen sehr unbequem. Nach dem Vorgang von LAGRANGE sucht man daher durch Einführung geeigneter neuer Parameter die Nebenbedingungen zu eliminieren, und die Bewegungsgleichungen in unabhängigen Parametern aufzustellen. Ebenso ist es natürlich häufig auch für freie Systeme zweckmäßig, andere Koordinaten, z. B. Polarkoordinaten, einzuführen.

Für holonome Bedingungen, gleichgültig, ob skleronom oder rheonom, geht dies auch ohne Schwierigkeit. Bestehen nämlich g solche Beziehungen, so können mit ihrer Hilfe eine entsprechende Zahl von Koordinaten eliminiert werden, und es läßt sich also das System durch $f = 3n - g$ unabhängige, nun völlig freie Parameter q_k beschreiben. Diese nennt man **verallgemeinerte Lagekoordinaten** und ihre Anzahl f die **Zahl der Freiheitsgrade** des Systems. Die Ableitungen der q_k nach der Zeit

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k$$

nennt man **verallgemeinerte Geschwindigkeitskomponenten.**

Ist das System dagegen nicht holonom, so bestehen also außerdem noch h Beziehungen zwischen den Differentialen der verallgemeinerten Koordinaten, d. h. die Bewegung in jedem Augenblick kann nicht alle Richtungen in dem Lagenraum der q_k haben, sondern ist auf eine $(f-h)$-fache Mannigfaltigkeit beschränkt, während an sich das System selbst eine f-parametrige Mannigfaltigkeit von Lagen einnehmen kann.

Unsere Aufgabe ist nun, die Bewegungsgleichungen in den verallgemeinerten Koordinaten zu gewinnen. Dies sei zunächst für **holonome** Systeme durchgeführt.

[1]) Zum d'Alembertschen Prinzip vgl. noch G. HAMEL, ZS. f. techn. Phys. Bd. 3, S. 181, 1922; E. DELASSUS, C. R. Bd. 156, S. 205. 1913. Siehe auch Kap. 1, Ziff. 24 ds. Bd. ds. Handb.

Hier lassen sich nach dem Gesagten die Koordinaten der Systempunkte mit Hilfe der allgemeinen Lageparameter und der Zeit ausdrücken:

$$x_i = x_i(q_1, \ldots q_f, t). \qquad (i = 1, \ldots 3n) \tag{1}$$

Wir nehmen an, daß diese Gleichungen die x_i eindeutig aus den q_h bestimmen. Die Bewegungsgleichungen sind nach dem d'Alembertschen Prinzip

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + Z_i, \qquad (i = 1, \ldots 3n) \tag{2}$$

wo die X_i die eingeprägten und die Z_i die noch unbekannten Zwangskräfte bedeuten. Multiplizieren wir diese Gleichungen bezüglich mit $\partial x_i/\partial q_h$ und summieren über alle Koordinaten, so kommt

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} = \sum_i (X_i + Z_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_h}. \tag{3}$$

Zwischen den x_i und $\dot{x}_i$ gelten aber folgende Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_h} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_h}, \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} = \ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_h} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_h}\right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_h}\right) - \dot{x}_i \left(\sum_g \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_h \partial q_g} \dot{q}_g + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_h \partial t}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_h}\right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_h} \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial q_h}\left(\frac{\dot{x}_i^2}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4b}$$

Nun ist

$$\tfrac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 = T \tag{5}$$

die kinetische Energie des Systems. Diese läßt sich natürlich auch als Funktion der q_h, $\dot{q}_h$ und t darstellen, und zwar wird sie wegen (4a) wieder eine quadratische Funktion der $\dot{q}_h$, die zudem homogen ist, wenn die Bindungen nicht explizit von der Zeit abhängen. Anderenfalls zerlegt sich T in $T_0 + T_1 + T_2$, wo T_s eine Funktion $s$ten Grades in den $\dot{q}_h$ ist.

Die Gleichungen (3) gehen also über in

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_i (X_i + Z_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_h}. \qquad (h = 1, \ldots f) \tag{3a}$$

Jetzt ist noch die rechte Seite auf eine Form zu bringen, in der die x_i nicht mehr auftreten. Nehmen wir eine Bewegung des Systems vor, bei der die Koordinate q_h in $q_h + \delta q_h$ übergeht, die also nach unserer früheren Terminologie zu den virtuellen Verrückungen gehört, so gehen die x_i über in

$$x_i + \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \delta q_h,$$

und es ist die Arbeit aller an dem System angreifenden Kräfte bei einer solchen Verrückung gleich

$$\sum_i (X_i + Z_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \delta q_h.$$

Das d'Alembertsche Prinzip sagte nun gerade aus, daß die Arbeit der Zwangskräfte bei allen virtuellen Verrückungen verschwinden soll, d. h. es muß für diese auch

$$\sum_i Z_i \delta x_i = \sum_i Z_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0$$

und damit also wegen der Willkür von δq_k auch

$$\sum_i Z_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0$$

werden. Die rechte Seite von (5a) reduziert sich also auf

$$\sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = Q_k. \tag{6}$$

Da wir aber die angreifenden äußeren Kräfte als Funktionen der x_i und evtl. t kennen, so sind vermittels (1) die Q_k bekannte Funktionen der q_k und t, und man bezeichnet sie als **verallgemeinerte Kräfte oder Kraftkomponenten in der Richtung q_k**. Es muß aber betont werden, daß die Q_k nicht notwendig die Dimension von Kräften haben, nämlich immer dann nicht, wenn die q_k nicht mit einer Länge dimensionsgleich sind; wohl aber hat das Produkt $Q_k \delta q_k$ stets die Dimension einer Arbeit.

Wir erhalten also schließlich als endgültige Form der Bewegungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten die sog. **Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \qquad (k = 1, \ldots f) \tag{7}$$

In ihnen sind die Bedingungsgleichungen und die Reaktionskräfte eliminiert. Letztere, die für die Technik (Lager- und Materialbeanspruchungen) von großer Wichtigkeit sind, lassen sich dadurch bestimmen, daß man entweder die Gleichungen erster Art oder eine Zwischenform benutzt, indem man zunächst einen oder mehrere allgemeine Parameter mehr einführt, derart, daß sie konstant gesetzt, gerade die entsprechende Bedingungsgleichung ergeben. Bei Rotation um eine Achse würde man z. B. Polarkoordinaten einzuführen haben, und nachher den Radius festhalten. Dann kann man wieder durch nachträgliche Berücksichtigung dieser Bedingungen, wie bei den Lagrangeschen Gleichungen erster Art, die Reaktionskräfte bestimmen[1]). (Siehe hierzu auch Ziff. 12.)

Falls die äußeren Kräfte ein Potential $U(x_k)$ haben, also

$$X_i = -\frac{\partial U(x_1, \ldots x_{3n})}{\partial x_i}$$

ist, wird vermittelst (1)

$$Q_k = \sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U(q_1, \ldots q_f)}{\partial q_k}.$$

Falls U von den Geschwindigkeiten unabhängig ist, können wir (7) auf die (schon von Euler aufgestellte) einfache Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{8}$$

bringen, wo

$$L = T - U, \tag{9}$$

[1]) S. z. B. F. Pahlin, Wiener Ber. Bd. 119, S. 1669. 1910.

das sog. kinetische Potential oder die Lagrangesche Funktion eine bekannte Funktion der q_k, $\dot q_k$ und t ist.

10. Systeme mit Kräften, die von den Geschwindigkeiten abhängen. Es kann vorkommen, daß Kräfte auf ein System wirken, die von den Geschwindigkeiten abhängen. Von dieser Natur sind beispielsweise die Reibungskräfte, die wir in Ziff. 14 behandeln. Es gibt aber auch Kräfte, die von den Geschwindigkeiten abhängen, und bei denen sich doch die einfache Form Ziff. 9, Gleichung (8) der Lagrangeschen Gleichungen aufrechterhalten läßt.

Ist nämlich Q_k von der Form

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_k}\right), \tag{1}$$

wo U eine gegebene Funktion der q_k und der $\dot q_k$ ist, so ist dies der Fall; denn es wird

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_k}\right),$$

und mit der Definition des kinetischen Potentials

$$L = T - U$$

kommen wir auf die Form (8) von Ziff. 9 zurück.

Ein sehr wichtiger Fall dieser Art ist die Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens, z. B. eines Elektrons, unter dem Einfluß beliebiger elektrischer und magnetischer Kräfte[1]). Ist $\mathfrak{H}$ der Vektor der magnetischen, $\mathfrak{E}$ derjenige der elektrischen Feldstärke, $-e$ die Ladung des Elektrons, c die Lichtgeschwindigkeit, $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor, so ist die Kraft $\mathfrak{K}$ in Vektorschreibweise

$$\mathfrak{K} = -\frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] - e\mathfrak{E}. \tag{2}$$

Diese sog. Lorentzkraft läßt sich aus dem verallgemeinerten Potential

$$U = \frac{e}{c}\mathfrak{A}\mathfrak{v} - e\varphi = \mathfrak{A}_x\dot x + \mathfrak{A}_y\dot y + \mathfrak{A}_z\dot z - e\varphi \tag{3}$$

ableiten, wo $\mathfrak{A}$ und φ das Vektor- und skalare Potential des elektromagnetischen Feldes sind, aus denen sich stets, also z. B. auch für Lichtwellen, das Feld nach

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E} &= -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t},\\ \mathfrak{H} &= \operatorname{rot}\mathfrak{A},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

bestimmen läßt. Die Richtigkeit des Ansatzes (3) bestätigt man leicht wie folgt. Man bekommt nach Vorschrift (1) für die Kraftkomponenten

$$\begin{aligned}X &= \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot x} - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{e}{c}\frac{d\mathfrak{A}_x}{dt} - \frac{e}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}\mathfrak{v}}{\partial x} + e\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ &= \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\dot x + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\dot y + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\dot z + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\right)\\ &\quad - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\dot x + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x}\dot y + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\dot z\right) + e\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ &= -\frac{e}{c}\left\{\dot y\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\right) - \dot z\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)\right\} + \frac{e}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} + e\frac{\partial\varphi}{\partial x}\end{aligned}$$

---

[1]) S. z. B. J. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik. Kap. 10, S. 317ff. Berlin 1926. Über die allgemeinen Bedingungen für die Existenz eines kinetischen Potentials s. H. v. Helmholtz, Crelles Journ. für Math. Bd. 100, S. 137. 1896; A. Mayer, Leipziger Ber. Bd. 74, 1898; A. Hirsch, Math. Ann. Bd. 50, S. 429. 1898.

und damit nach (4) in Übereinstimmung mit (2)

$$X = -\frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]_x - \mathfrak{E}_x.$$

Will man noch die Massenveränderlichkeit gemäß der Relativitätstheorie berücksichtigen, so hat man in der Lagrangefunktion an Stelle von

$$T = \frac{1}{2m}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2m}\mathfrak{v}^2$$

den relativistischen Ausdruck[1])

$$m_0 c^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\right)$$

zu nehmen. Die vollständige Lagrangefunktion für ein Elektron lautet daher

$$L = m_0 c^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\right) + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\mathfrak{v} - e\varphi. \tag{5}$$

Ein anderes Beispiel für derartige Kräfte bildet das alte Webersche Elementargesetz der Elektrodynamik. Hier ist das verallgemeinerte Potential zwischen zwei Teilchen in der Entfernung r

$$U = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)$$

und die Kraft dementsprechend

$$X_r = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right).$$

11. Verallgemeinerte Impulse; zyklische Koordinaten; Energiesatz. Die Größen

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{1}$$

nennt man die zu den Koordinaten q_k gehörigen **verallgemeinerten Impulse**. (In der Tat ist z. B. für rechtwinklige Koordinaten

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2,$$

und sonach, wenn das Potential V nicht von der Geschwindigkeit abhängt,

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$$

die i-te Impulskomponente.) Sie spielen überall in der Mechanik eine sehr große Rolle. Die Lagrangeschen Gleichungen in der Gestalt

$$\frac{d p_k}{d t} = \frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k$$

sagen also aus, daß die zeitliche Änderung jeder Impulskomponente gleich der Änderung der kinetischen Energie mit der zugehörigen Lagekoordinate plus der ausgeübten Kraft ist.

In vielen, sehr wichtigen Fällen lassen sich sofort einige **Integrale** der Lagrangeschen Gleichungen angeben.

Wir nehmen zunächst an, daß das System ein kinetisches **Potential** L, die Lagrangeschen Gleichungen also die Form (8) von Ziff. 9 haben. Treten

[1]) S. Kap. 10, Ziff. 4, ds. Bd. ds. Handb.

nun in L einige der Koordinaten q_h, z. B. q_r, nicht auf, sondern nur ihre Ableitungen, so nennt man diese Koordinaten zyklisch. Für diese reduzieren sich die entsprechenden Lagrangeschen Gleichungen auf

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right) = 0, \tag{2}$$

also

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_r} = \text{konst.} = \beta_r, \tag{2a}$$

wo die β_r Integrationskonstanten sind. In (2a) haben wir bereits intermediäre Integrale der Bewegungsgleichungen.

Die zu den zyklischen Koordinaten gehörigen Impulse sind also konstant. Spezialfälle dieses Satzes sind z. B. die Impuls- und Flächensätze (s. Kap. 7 u. 8).

Es wird auch häufig vorkommen, daß die Zeit t nicht explizite in L auftritt. In diesem Fall läßt sich ebenfalls stets ein Integral der Bewegungsgleichungen angeben; denn es ist dann

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_h \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\ddot q_h + \sum_h \frac{\partial L}{\partial q_h}\dot q_h = \sum_h \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\ddot q_h + \sum_h \dot q_h \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_h \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\dot q_h\right).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_h \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\dot q_h - L\right) = 0,$$

also

$$\sum_h \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\dot q_h - L = \text{konst.} = E,$$

als ein Integral der Lagrangeschen Gleichungen. Dieses Integral ist das Energieintegral, wenn T eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten ist, und die potentielle Energie nicht von den Geschwindigkeiten abhängt; denn es ist in diesem Falle nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen

$$\sum_h \frac{\partial T}{\partial \dot q_h}\dot q_h = 2T,$$

also

$$\begin{aligned}E &= \sum \frac{\partial T}{\partial \dot q_h}\dot q_h - T + U \\ &= 2T - T + U = T + U.\end{aligned}$$

Man kann mit Hilfe solcher Integrale stets die Zahl der Parameter verringern. Hierfür sei auf Abschnitt III verwiesen, wo diese Frage von allgemeinen Gesichtspunkten aus erörtert wird.

12. Hinzufügung von Nebenbedingungen bei den Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art[1]. Für nichtholonome Bedingungen versagt die Methode von Ziff. 9, und man muß daher noch die Nebenbedingungen getrennt mitführen. Es kann sich auch für holonome Bedingungsgleichungen als nützlich erweisen, nur einige der Nebenbedingungen durch Einführung geeigneter Koordinaten zu eliminieren, andere jedoch beizubehalten. Die q_h seien jetzt also nicht mehr

[1] N. M. Ferrers, Quart. Journ. Math. Bd. 12, S. 1. 1871. Auch C. Neumann, Leipziger Ber. Bd. 40, S. 22. 1888; A. Vierkandt, Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 4, S. 31. 1892.

völlig freie Koordinaten, sondern noch Nebenbedingungen unterworfen, die die allgemeine, nichtholonome Form

$$\sum_k a_{rk}\,dq_k + a_r\,dt = 0$$

oder

$$\sum_k a_{rk}\dot q_k + a_r = 0 \qquad (r = 1, \dots g) \tag{1}$$

haben mögen, wobei im holonomen Fall

$$a_{rk} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_k}, \qquad a_r = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ist.

Die a_{rk} und a_r sind dabei natürlich als Funktionen der q_k und evtl. t anzunehmen. Die Wirkung der Nebenbedingungen denken wir uns wieder durch Zwangskräfte Z_k ersetzt, die zu den rechten Seiten der Gleichungen (7) von Ziff. 9 hinzutreten. Nun wissen wir nach dem d'Alembertschen Prinzip, daß diese Zwangskräfte für die virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten. Diese Arbeit

$$\delta A = \sum_k Z_k\,\delta q_k$$

muß also für alle Verrückungen verschwinden, die den Bedingungen

$$\sum_k a_{rk}\,\delta q_k = 0$$

genügen. Daraus folgt aber wieder, daß

$$Z_k = \sum_r \lambda_r a_{rk} \qquad (r = 1, \dots g)$$

wird, wo die λ_r wieder Lagrangesche Faktoren darstellen. Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \sum_r \lambda_r a_{rk}. \tag{2}$$

Zusammen mit den Nebenbedingungen (1) gibt es mithin immer gerade $f + g$ Gleichungen für die $f + g$ Größen q_k, λ_r. Es ist jedoch nicht möglich, bei nichtholonomen Nebenbedingungen mit ihrer Hilfe die Zahl der unabhängigen Parameter bei ungeänderter Form der Lagrangeschen Gleichungen zu reduzieren. Dies gelingt erst mit der Methode der folgenden Ziffer.

13. Die erweiterten Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art für Quasikoordinaten. Bisweilen ist es zweckmäßig, in den Lagrangeschen Gleichungen an Stelle der Geschwindigkeitskomponenten $\dot q_k$ andere Größen, nämlich lineare Kombinationen von ihnen, die wir mit $\dot\pi_\varrho$ bezeichnen wollen, durch die Gleichungen

$$\dot\pi_\varrho = \sum_k \alpha_{\varrho k}\dot q_k \qquad (\varrho = 1, \dots f) \tag{1}$$

einzuführen, wo die $\alpha_{\varrho k}$ Funktionen der q_k und von t sein können. Die Zahl der $\dot\pi_\varrho$ sei dabei zunächst gleich der Zahl der $\dot q_k$ selbst, so daß, da die q_k gewöhnliche Koordinaten sein sollen, unsere Betrachtungen sich zunächst nur auf holonome Systeme beziehen. Wir bezeichnen analog zu (1) die Linearkombinationen der Differentiale mit

$$\delta\pi_\varrho = \sum_k \alpha_{\varrho k}\,\delta q_k. \tag{1a}$$

Wären die Pfaffschen Ausdrücke (1a) integrabel, beständen also etwa die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial \alpha_{\varrho k}}{\partial q_l} = \frac{\partial \alpha_{\varrho l}}{\partial q_k}, \tag{2}$$

so ließen sich wahre Koordinaten π_ϱ als Funktionen der q_h bilden. Andernfalls ist dieses aber nicht möglich, und man nennt dann die $d\pi_\varrho$ Differentiale von Quasikoordinaten. Wir verwenden deshalb zur Bezeichnung von $d\pi_\varrho/dt$ den Stern, um hervorzuheben, daß es sich nicht um eine eigentliche Ableitung handelt.

Solche Quasikoordinaten verwendet man z. B. in der Mechanik starrer Körper bei den Eulerschen Gleichungen, wo man die Bewegung des Systems durch die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit um drei körperfeste Achsen, nämlich die Hauptträgheitsachsen, beschreibt, die eben durch lineare, nicht integrable Beziehungen mit den zeitlichen Ableitungen der Eulerschen Winkel zusammenhängen.

Um zu den Bewegungsgleichungen in solchen Quasikoordinaten zu gelangen, gehen wir folgendermaßen vor. Durch Umkehrung der Gleichungen (1) — wir nehmen an, daß diese möglich sei, schließen also die singulären Fälle des Verschwindens der Determinante der $\alpha_{\varrho h}$ aus — erhalten wir

$$\dot q_h = \sum_\varrho \beta_{h\varrho} \overset{*}{\pi}_\varrho , \tag{3}$$

wo

$$\sum_h \beta_{h\varrho} \alpha_{\sigma h} = \begin{cases} 0 \text{ für } \varrho \neq \sigma \\ 1 \text{ für } \varrho = \sigma \end{cases}. \tag{4}$$

Wir multiplizieren die Lagrangeschen Gleichungen (7) von Ziff. 9 bezüglich mit $\beta_{h\varrho}$ und summieren über h:

$$\sum_h \beta_{h\varrho} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} \right\} = \sum_h \beta_{h\varrho} Q_h = \Pi_\varrho . \tag{5}$$

Π_ϱ ist dabei offenbar die verallgemeinerte Kraftkomponente „in der Richtung π_ϱ", d. h. es ist die Arbeit der äußeren Kräfte bei einer Verrückung nur mit $\delta\pi_\varrho \neq 0$ gleich $\Pi_\varrho \delta\pi_\varrho$, während die Arbeit der äußeren Kräfte bei einer allgemeinen Verrückung

$$\sum_\varrho \Pi_\varrho \delta\pi_\varrho$$

ist; denn es ist $\sum_h Q_h \delta q_h$ die Arbeit der äußeren Kräfte bei einer beliebigen Verrückung und daher $\sum_h Q_h \beta_{h\varrho} \delta\pi_\varrho$ die Arbeit bei einer Verrückung, bei der alle Größen $\delta\pi_\sigma$ mit Ausnahme von $\delta\pi_\varrho$ verschwinden.

Mit Hilfe von (3) können wir T als Funktion der q_h und $\overset{*}{\pi}_\varrho$ anstatt der $\dot q_h$ ausdrücken und wollen diese Funktion zur Unterscheidung mit $\mathfrak{T}$ bezeichnen. Damit wird

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} = \sum_\varrho \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{*}{\pi}_\varrho} \frac{\partial \overset{*}{\pi}_\varrho}{\partial \dot q_h} = \sum_\varrho \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{*}{\pi}_\varrho} \alpha_{\varrho h}$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_h} + \sum_\sigma \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{*}{\pi}_\sigma} \frac{\partial \overset{*}{\pi}_\sigma}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_h} + \sum_{\sigma l} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{*}{\pi}_\sigma} \frac{\partial \alpha_{\sigma l}}{\partial q_h} \dot q_l ,$$

daher

$$\begin{aligned} \Pi_\varrho &= \sum_h \beta_{h\varrho} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\sum_\sigma \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{*}{\pi}_\sigma} \alpha_{\sigma h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} \right\} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{*}{\pi}_\varrho}\right) + \sum_{h\sigma} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{*}{\pi}_\sigma} \beta_{h\varrho} \frac{d\alpha_{\sigma h}}{dt} - \sum_h \beta_{h\varrho} \frac{\partial T}{\partial q_h} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{*}{\pi}_\varrho}\right) + \sum_{hl\sigma} \beta_{h\varrho} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \overset{*}{\pi}_\sigma} \dot q_l \left(\frac{\partial \alpha_{\sigma h}}{\partial q_l} - \frac{\partial \alpha_{\sigma l}}{\partial q_h} \right) - \sum_h \beta_{h\varrho} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_h} . \end{aligned}$$

Nun sind die Größen

$$\gamma_{\varrho\sigma\tau} = \sum_{hl} \beta_{h\varrho}\beta_{l\tau}\left(\frac{\partial \alpha_{\sigma l}}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_{\sigma h}}{\partial q_l}\right)$$

unabhängig von der Bewegung des Systems und hängen nur von den Beziehungen zwischen den Differentialen der Quasikoordinaten und der wahren Koordinaten ab. Wären die π_ϱ wahre Koordinaten, so würde

$$\sum_h \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_h}\beta_{h\varrho} = \sum_h \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_h}\frac{\partial q_h}{\partial \pi_\varrho} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \pi_\varrho}$$

sein. Diese Bezeichnung behalten wir zur Vereinfachung der Schreibweise auch für Quasikoordinaten bei. Damit erhalten wir endlich als allgemeine Form der verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen, die zuerst von Boltzmann[1] und Hamel[2]) abgeleitet wurden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\varrho}\right) - \sum_{\sigma\tau} \gamma_{\varrho\sigma\tau}\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\sigma}\dot{\pi}_\tau - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \pi_\varrho} = \Pi_\varrho .$$

Sind die π_ϱ selbst wahre Koordinaten, so werden nach den Integrabilitäts-bedingungen (2) die Größen $\gamma_{\varrho\sigma\tau}$ alle gleich Null. Es reduzieren sich dann [illegible], wie es sein muß, die Gleichungen (7) auf die gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen.

Nachträglich können wir jetzt auch ohne Schwierigkeit nichtholonome Nebenbedingungen berücksichtigen. Seien nämlich die ursprünglichen Koordinaten q_h, $(h = 1, \dots f)$ noch den g nichtholonomen Bedingungen

$$\sum_h a_{sh}\dot{q}_h = 0 \qquad (s = 1, \dots g)$$

unterworfen, so nehmen wir in (1) für die $\alpha_{f-g,h}, \dots \alpha_{fh}$, also die Koeffizienten der letzten g Gleichungen gerade die a_{sh}, also

$$\dot{\pi}_{f-g} = \sum_h a_{sh}\dot{q}_h, \qquad \delta\pi_{f-g} = \sum_h a_{sh}\delta q_h, \qquad (10)$$

während die übrigen willkürlich gewählt werden können, mit der einzigen Einschränkung, daß die Determinante aller $\alpha_{\varrho h}$ von Null verschieden sein muß.

Wir führen nun dasselbe Verfahren wie oben durch, nur daß wir die [illegible]chungen (2) von Ziff. 12 an Stelle von (7) aus Ziff. 9 nehmen. Dann fallen [illegible] $f-g$ ersten der Gleichungen (5) vermöge der Relationen (4) gerade die mit den Lagrangeschen Faktoren behafteten Glieder heraus. Die letzten g werden gerade unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$\dot{\pi}_\varrho = 0, \qquad (\varrho = f-g, \dots f) \qquad (11)$$

g Bestimmungsgleichungen für die λ_s bilden. Diese interessieren uns aber gar nicht mehr, da offenbar die übrigen Gleichungen zusammen mit (11) bereits zur Bestimmung der Bewegung des Systems ausreichen. Damit ist unser Ziel erreicht. Die Gleichungen (8) gelten also auch für nichtholonome Systeme, und es läßt sich demnach mit den nichtholonomen Bedingungen wenigstens die Zahl der auftretenden Geschwindigkeitskomponenten herabdrücken.

Noch allgemeiner können schließlich an Stelle von (1) auch Ausdrücke von der Form

$$\dot{\pi}_\varrho = \sum_h \alpha_{\varrho h}\dot{q}_h + \alpha_\varrho$$

[1]) L. Boltzmann, Wiener Ber. Bd. 111, S. 1603. 1902; auch Werke Bd. III, S. 682. 1909.

[2]) G. Hamel, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 15, S. 1. 1904; vgl. auch Math. Ann. Bd. [illegible], S. 416. 1905. Hier findet sich auch eine gruppentheoretische Deutung der Zusatzterme, s. auch ebenda Bd. 92, S. 33. 1924.

genommen werden, was z. B. bei nichtholonom-rhenomenen Systemen nötig ist. In diesem Fall führt man $q_{h+1} = t$ formal als neue Koordinate ein, wobei natürlich zum Schluß $\dot{q}_{h+1} = 1$ zu setzen ist. Als Transformationsgleichungen sollen also

$$\dot{x}_\nu = \sum_k \alpha_{\nu k} \dot{q}_k + \alpha_\nu \dot{q}_{h+1},$$

$$\dot{x}_{\nu+1} = \dot{q}_{h+1} = 1$$

genommen werden. Die obigen Überlegungen übertragen sich dann wieder wörtlich, nur daß überall, wo über die Koordinaten zu summieren ist, noch ein Summenglied hinzuzufügen ist, das zu der neuen Zeitkoordinate gehört. Die Form (8) der Bewegungsgleichungen bleibt also auch jetzt noch erhalten und umfaßt so alle in Betracht kommenden Fälle.

14. Reibungs- und Stoßkräfte. Anhangsweise seien noch kurz die Modifikationen der Lagrangeschen Gleichungen besprochen, wenn Kräfte allgemeinerer Art, wie Stoß- und Reibungskräfte auf das System wirken.

Es werde angenommen, daß die Reibungskräfte den Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte direkt proportional seien. Die Bewegungsgleichungen sind also in kartesischen Koordinaten von der Form

$$m_i \ddot{x}_i = -k_i \dot{x}_i + X_i + Z_i,$$

wo die k_i Funktionen der x_i allein sind. Die Energie, die durch die Widerstandskräfte bei einer willkürlichen Verrückung δx_i aufgezehrt würde, ist natürlich gleich dem Negativen der Arbeit der Reibungskräfte, also

$$\delta E = \sum_i k_i \dot{x}_i \delta x_i. \tag{1}$$

Wir gehen jetzt wieder zu allgemeinen Koordinaten über, indem wir, wie in Ziff. 9, die Bewegungsgleichungen bzw. mit $\partial x_i/\partial q_k$ multiplizieren und über alle Koordinaten summieren. Dabei erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = -\sum_i k_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

Die rechten Seiten lassen sich als Ableitungen einer einzigen Funktion auffassen, denn wir haben nach Gleichung (4a), Ziff. 9

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k},$$

also

$$\sum_i k_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_i k_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k},$$

wo

$$F = \tfrac{1}{2} \sum k_i \dot{x}_i^2 \tag{2}$$

die sog. **Zerstreuungsfunktion** von RAYLEIGH ist. Sie mißt nach (1) die zeitliche Abnahme der Systemenergie infolge der Reibungskräfte. Die Bewegungsgleichungen erhalten also die Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = Q_k. \tag{3}$$

Auch für Stoßkräfte, also momentane Impulswirkungen, läßt sich eine passende Form der Lagrangeschen Gleichungen angeben. Bezeichnen wir alle Koordinaten und Geschwindigkeiten vor dem Stoß mit dem Zeiger 0, nach dem

Stoß ohne Zeiger, so sind in kartesischen Koordinaten die Gleichungen für den Stoß[1])

$$m_i(\dot{x}_i - \dot{x}_i^0) = S_i + Z_i,$$

wo die S_i die Komponenten des äußeren Impulses auf die i-ten Koordinaten, und die Z_i wieder die Reaktionen der Bindungen sind. Nach dem Verfahren von Ziff. 9 erhalten wir wieder

$$\sum_i m_i(\dot{x}_i - \dot{x}_i^0)\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_i S_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = P_k,$$

da nach dem d'Alembertschen Prinzip die Glieder mit den Reaktionsimpulsen verschwinden müssen. Die Impulskomponenten P_k in Richtung der Koordinaten q_k sind dabei als bekannt anzusehen. Die linke Seite formt man wieder wie folgt um. Es ist

$$\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\dot{x}_i^2), \qquad \dot{x}_i^0\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k^0}(\dot{x}_i^{0\,2}),$$

wo die $\dot{q}_k$ bzw. $\dot{q}_k^0$ die verallgemeinerten Geschwindigkeitskomponenten vor und nach dem Stoß sind. Wir können also die Bewegungsgleichungen auf die Form

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)^0 = P_k \tag{4}$$

bringen. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Lagrangeschen Differentialgleichungen sind dies endliche Gleichungen zur Bestimmung der $\dot{q}_k$ als Funktionen der $\dot{q}_k^0$. Führen wir die verallgemeinerten Impulse p_k ein (siehe Ziff. 11), so geht (4) über in

$$p_k - p_k^0 = P_k, \tag{5}$$

d. h. die Differenz der Impulse vor und nach dem Stoß ist gleich den ausgeübten Impulsstößen.

15. Das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges. Nachdem wir das d'Alembertsche Prinzip und die aus ihm zu gewinnenden Lagrangeschen Gleichungen erster und zweiter Art für alle praktisch wichtigen Fälle diskutiert haben, wenden wir uns jetzt den übrigen Differentialprinzipen zu. Unter ihnen nimmt wegen seiner Einfachheit und vielseitigen Verwendbarkeit das Prinzip des kleinsten Zwanges von Gauss einen besonders hervorragenden Platz ein. Man gelangt zu ihm etwa durch folgenden Gedankengang:

Für ein System freier Massenpunkte verschwindet nach den Newtonschen Bewegungsgleichungen der Ausdruck

$$Z = \sum_i m_i\left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)^2. \tag{1}$$

Bestehen nun Zwangsbedingungen irgendwelcher Art, so kann (1) nicht mehr dauernd Null sein, sondern ist naturgemäß eine Funktion der Bahnkurve. Gauss verlangt nun, daß dieser Ausdruck für die wirkliche Bewegung, da er nicht verschwinden kann, wenigstens möglichst klein sei, d. h. Z soll für die wirkliche Bahnkurve ein Minimum sein. Diese Forderung stellt das **Prinzip des kleinsten Zwanges** dar, da man nach dem Vorgang von Gauss die Größe Z als Zwang bezeichnet. In der Tat ist $\ddot{x}_i - X_i/m_i$ eine Art Maß für die Wirkung der äußeren Bindungen auf die i-te Koordinate.

[1]) Diese sind natürlich durch Grenzübergang aus den allgemeinen Gleichungen herzuleiten. S. hierzu z. B. J. Tzenoff, Math. Ann. Bd. 92, S. 42. 1924. Dort wird auch der Fall der plötzlichen Einführung oder Aufhebung von Bindungen behandelt. S. ferner Beghin u. Rousseau, Journ. de Math. 5. Ser., Bd. 9, S. 21. 1903.

Dies sieht man folgendermaßen ein. Wir betrachten das System in zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t und $t+dt$, einmal unter Einfluß aller Nebenbedingungen und ein anderes Mal unter denselben Anfangsbedingungen, aber als freies System, ohne die Bindungen, nur unter Wirksamkeit der äußeren Kräfte.

Im zweiten Fall, beim freien System, wird der Bildpunkt in dem Lagenraum der x_i von dem Anfangspunkt A mit den Koordinaten x_i in den Punkt B mit den Koordinaten

$$x_i + \dot{x}_i\,dt + \frac{X_i}{2m_i}\,dt^2$$

übergegangen sein, da die Beschleunigung in dem infinitesimalen Zeitintervall dt als konstant angesehen werden kann, und zwar nach den Newtonschen Gleichungen (1) von Ziff. 8 gleich X_i/m_i.

Im ersten Fall mit den Bindungen hingegen wird das System von dem Ausgangspunkt A zu dem Punkt C mit den Koordinaten

$$x_i + \dot{x}_i\,dt + \frac{\ddot{x}_i}{2}\,dt^2$$

übergegangen sein, wo die $\ddot{x}_i$ die wirklichen Beschleunigungen darstellen.

Die Strecken AB und AC haben daher die folgenden Komponenten

$$(AB)_i = \dot{x}_i\,dt + \frac{X_i}{2m}\,dt^2,$$

$$(AC)_i = \dot{x}_i\,dt + \frac{\ddot{x}_i}{2}\,dt^2.$$

Die Strecke BC, also die Abweichungen, die an der Bahn des Systems durch die Zwangsbedingungen gegenüber der freien Bewegung hervorgerufen werden, hat also die Komponenten

$$(BC)_i = \frac{1}{2}\left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)dt^2. \tag{2}$$

Je größer diese sind, um so größer ist die Abweichung von der freien Bewegung. Gauss wurde nun durch die Analogie zu dem Prinzip der kleinsten Quadrate der Fehlertheorie zu der Vermutung geführt, daß die Summe der Quadrate dieser Abweichungen einen möglichst kleinen Wert für die wirkliche Bewegung annehmen soll.

Hier besteht jedoch eine Schwierigkeit. Wenn wir n Massenpunkte mit verschiedenen Massen haben, so sind diese Abweichungen offenbar nicht gleichwertig, da es leichter ist, einer kleinen Masse eine bestimmte Verschiebung zu erteilen als einer größeren. Um nun die Strecken vergleichbar zu machen, sind sie mit statistischen Gewichten im Sinne der Fehlertheorie zu versehen, die die verschiedenen Massen ausgleichen.

Die Form dieser Faktoren erhält man mittels einer Kontinuitätsbetrachtung. Sind zunächst die Massen alle gleich, so sind offenbar auch die einzelnen Komponenten (2) des Zwanges gleichberechtigt. Es seien nun die Massenverhältnisse rational, d. h. die m_i ganzzahlige Vielfache einer Einheitsmasse. Wir denken uns dann jeden Massenpunkt durch m_i Massenpunkte mit der Einheitsmasse ersetzt, zwischen denen aber die Zwangsbedingungen bestehen, daß sie sich stets an derselben Stelle befinden sollen. Dadurch wird das System auf $\sum\limits_i m_i$ Punkte erweitert; gleichzeitig werden aber $\sum\limits_i m_i - n$ Bedingungen hinzugefügt. Ebenso seien die auf die Punkte m_i angreifenden äußeren Kräfte gleichmäßig auf die Elementarpunkte verteilt. Dann ist das neue System dem alten offenbar

völlig äquivalent und muß also auch dieselben Bewegungen ausführen. Bilden wir jetzt für das neue System die Quadratsumme der Zwänge, so sind alle jetzt für die Elementarmassen gleichberechtigt, und ihre Quadratsumme hat daher einen guten Sinn. Nun sind die Zwänge der Elementarmassen, die zu demselben Massenpunkt des Systems gehören, infolge der Zwangsbedingungen alle einander gleich. Da ihre Zahl nun jeweils m_i ist, erhalten wir den Zwang des ganzen Systems, indem wir die Quadrate von $(BC)_i$ jeweils mit der entsprechenden Masse multiplizieren und dann über alle Koordinaten summieren. Wir kommen also gerade zum Ausdruck (1) für den Zwang. Dieser ist hiermit für rationale Verhältnisse begründet, und muß natürlich aus Stetigkeitsgründen auch allgemein dieselbe Form haben.

Diese ganze Überlegung ist natürlich nur eine heuristische Betrachtung und kein strenger Beweis, der auch gar nicht zu führen wäre.

Es ist, wie für jedes Extremalprinzip, auch für das Gaußsche genau zu präzisieren, unter welcher Mannigfaltigkeit von Vergleichszuständen das Extremum gesucht werden muß. Da nun Z eine Funktion der Beschleunigungen $\ddot{x}_i$ ist, so sind als Vergleichszustände alle Bewegungen zu nehmen, bei denen in einem bestimmten Augenblick bei ungeänderten Lage- und Geschwindigkeitskomponenten nur die Beschleunigungen alle Werte annehmen, die mit den Bedingungsgleichungen verträglich sind. Diese muß man natürlich durch Differentiation auf eine entsprechende Form bringen, die die zweiten Ableitungen enthält.

Haben die Nebenbedingungen die allgemeine nichtholonome Form

$$\varphi_r(x_i, \dot{x}_i, t) = 0\,, \tag{2}$$

so erhält man durch Differentiation nach der Zeit

$$\dot{\varphi}_r = \sum_i \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}\dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial \varphi_r}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i + \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} = 0\,. \tag{3}$$

Nach den Regeln der Differentialrechnung bekommt man also als Bedingung für das relative Minimum von Z unter Einführung unbestimmter Multiplikatoren $2\lambda_r$

$$\frac{\partial\left(Z + \sum_r 2\lambda_r \dot{\varphi}_r\right)}{\partial \ddot{x}_i} = \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i}\right)m_i + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \dot{\varphi}_r}{\partial \ddot{x}_i} = 0\,. \tag{5}$$

Dies sind aber, wenn die Nebenbedingungen die spezielle, in den $\dot{x}_i$ lineare Form

$$\dot{\varphi}_r = \sum a_{ir}\ddot{x}_i + a_r = 0 \tag{4}$$

haben, nichts anderes als die uns wohlbekannten Lagrangeschen Gleichungen erster Art. Für diesen Fall ist also das Gaußsche Prinzip dem d'Alembertschen völlig äquivalent. Wir sehen aber, daß es darüber hinaus noch die allgemeine Form der Nebenbedingungen (2) von Ziff. 4 zu behandeln gestattet. Wir sprechen das Gaußsche Prinzip dementsprechend wie folgt aus:

Ein System von Massenpunkten bewegt sich so, daß in jedem Augenblick der Zwang (1) ein Minimum wird, verglichen mit allen Bewegungszuständen mit gleichen Lagen und Geschwindigkeiten, aber allen möglichen Beschleunigungen, die die Bedingungen (3) bzw. (4) erfüllen.

11. Eindeutigkeit der Prinzipe; singuläre Fälle. Mit Hilfe des Gaußschen Prinzips läßt sich auch leicht eine Frage erledigen, die wir noch nicht berührt haben, nämlich, ob die Prinzipe die Bewegung wirklich eindeutig bestimmen[1]).

[1]) S. zu dieser Ziffer P. Stäckel, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Abt. A 1919, 11. Abh.

Es nimmt nämlich der Zwang, von singulären Ausnahmefällen abgesehen, nur an einer Stelle ein Minimum an. Daß er überhaupt ein Minimum besitzt, folgt sofort aus seinem positiv definiten Charakter.

Es sei nun $\ddot{x}_i = \ddot{\xi}_i$ eine Stelle des Minimums, d. h. es sei also

$$Z(\ddot{\xi}_i + \delta\ddot{x}_i) > Z(\ddot{\xi}_i)$$

für alle hinreichend kleinen $\delta\ddot{x}_i$, die so gewählt sind, daß die Größen $\ddot{\xi}_i + \delta\ddot{x}_i$ selbst den Bedingungsgleichungen (4) von Ziff. 15 genügen. Das heißt aber, daß die Zuwächse $\delta\ddot{x}_i$ der Beschleunigungen nach Gleichung (4) und (6) von Ziff. 15 den Gleichungen

$$\sum_i a_{ir}\,\delta\ddot{x}_i = 0 \tag{1}$$

genügen müssen, die eine analoge Rolle spielen wie die Bedingungen (1) bzw. (1a) von Ziff. 5 für die virtuellen Verrückungen δx_i. Gäbe es nun eine zweite Stelle des Minimums für die Werte $\ddot{x}_i = \ddot{\eta}_i$, so daß also sowohl die $\ddot{\xi}_i$ als auch die $\ddot{\eta}$ die Bedingungen (4) von Ziff. 15 erfüllten, so müßten die Differenzen $\ddot{u}_i = \ddot{\xi}_i - \ddot{\eta}$ den Bedingungen

$$\sum_i a_{ir}\,\ddot{u}_i = 0. \tag{1a}$$

genügen.

Nun ist nach (1) von Ziff. 15

$$Z(\ddot{\xi}_i + \delta\ddot{x}_i) = Z(\ddot{\xi}_i) + \sum_i m_i(\delta\ddot{x}_i)^2 + 2\sum_i (m_i\ddot{\xi}_i - X_i)\,\delta\ddot{x}_i. \tag{2}$$

Also ist bei dem Minimum notwendig

$$\sum_i (m_i\ddot{\xi}_i - X_i)\,\delta\ddot{x}_i = 0.$$

Dann muß aber auch nach (1a)

$$\sum_i (m_i\ddot{\xi}_i - X_i)\,\ddot{u}_i = 0 \tag{3}$$

sein. Setzen wir jetzt in (2) $\ddot{u}_i$ für $\delta\ddot{x}_i$, so folgt, daß $Z(\ddot{\eta}_i)$ größer als $Z(\ddot{\xi}_i)$ ist mit Ausschluß der Gleichheit. Umgekehrt könnte man aber ebenso $Z(\ddot{\xi}_i) > Z(\ddot{\eta}_i)$ beweisen. Die Annahme der Existenz von mehr als einem Minimum führt also auf einen Widerspruch. Für Ungleichungen als Nebenbedingungen hat auf ähnliche Weise ZERMELO[1]) die Eindeutigkeit bewiesen. Da das Gaußsche Prinzip mit dem d'Alembertschen äquivalent ist, so ist die Eindeutigkeit auch für dieses bewiesen. Auf Grund des d'Alembertschen Prinzips selbst ist der Beweis von JACOBI in seiner Dynamik etwas umständlicher mit Hilfe von Determinanten erbracht worden.

Wir haben bis jetzt singuläre Ausnahmefälle ausgeschlossen. Seien alle Nebenbedingungen gleichmäßig auf die Form

$$\sum_i a_{ir}\ddot{x}_i + a_r = 0 \qquad (r = 1, \ldots g)$$

gebracht, so nennen wir die Lage des Systems regulär, wenn mindestens eine der g-reihigen Determinanten der Koeffizientenmatrix der a_{ir}, a_r von Null verschieden ist. Bei einer einzigen Nebenbedingung sollen also nicht alle Größen

[1]) E. ZERMELO, Göttinger Nachr. 1899, S. 306.

a_i, a gleichzeitig verschwinden. Anderenfalls versagt das d'Alembertsche Prinzip, da dann nicht mehr die einfachen Beziehungen

$$\sum_i a_{i\nu}\,\delta x_i = 0$$

für die virtuellen Verrückungen bestehen. Zur Erläuterung betrachten wir folgendes einfache Beispiel von STAECKEL.

Ein Punkt von der Masse 1 sei gezwungen, sich auf der Kegelfläche

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$

zu bewegen. Aus dieser Bedingung folgen die Gleichungen

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 - x_3\dot{x}_3 = 0,$$
$$x_1\ddot{x}_1 + x_2\ddot{x}_2 - x_3\ddot{x}_3 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2 = 0,$$

und die virtuellen Verrückungen werden durch die Gleichungen

$$x_1\,\delta x_1 + x_2\,\delta x_2 - x_3\,\delta x_3 = 0 \tag{4}$$

erklärt. Zur Zeit t befinde sich nun der Massenpunkt in der Kegelspitze in Ruhe. Bei dieser singulären Lage versagt die Beziehung (4) der virtuellen Verrückungen, diese sind vielmehr nach ihrer Definition, daß sie solche Verschiebungen darstellen, die den Massenpunkt in eine mit den Bedingungen verträgliche Lage überführen, hier bestimmt durch

$$\delta x_1^2 + \delta x_2^2 - \delta x_3^2 = 0. \tag{4a}$$

Für die Beschleunigungskomponenten gilt in diesem Punkt die analoge Beziehung

$$\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 - \ddot{x}_3^2 = 0, \tag{5}$$

da der Massenpunkt offenbar nur dann auf der Kegelfläche bleiben kann, wenn beim Beginn der Bewegung der Beschleunigungsvektor selbst in die Kegelfläche fällt.

Das d'Alembertsche Prinzip versagt hier offenkundig, da die Bedingung für die virtuellen Verrückungen (4a) nicht mehr linear ist. Das Prinzip des kleinsten Zwanges dagegen ermöglicht noch die Bestimmung der Bewegung. Es verlangt das Minimum von Z unter der Nebenbedingung (5), welches Problem lösbar ist. Allerdings ist die Bewegung jetzt nicht mehr eindeutig bestimmt, sondern doppeldeutig, wie man leicht nachrechnet. Legen wir nämlich eine Ebene durch die Kegelachse und den Kraftvektor in der Kegelspitze, so erfolgt die Bewegung in einer der beiden Schnittgraden dieser Ebene mit dem Kegelmantel, und auch diese Berechnung versagt, wenn die Kraftrichtung gerade parallel zur Kegelachse ist. Jedenfalls sieht man, daß für singuläre Lagen nur das Gaußsche Prinzip anwendbar ist. Natürlich kann man seine Gültigkeit auch in diesem Falle nicht beweisen, sondern man muß es als Axiom nehmen, das es überhaupt erst möglich macht, solche Ausnahmen einer analytischen Behandlung zu unterziehen. Eine weitere Diskussion der singulären Fälle liegt jedoch außerhalb des Rahmens dieser Darstellung[1]).

17. Das Hertzsche Prinzip der geradesten Bahn. Den Ausdruck des Zwanges (1) von Ziff. 15 kann man auch geometrisch deuten, wenn man sich auf kräftefreie Bewegung beschränkt. Nehmen wir zunächst einen einzigen Massenpunkt mit den Koordinaten x, y, z. Dieser beschreibe unter dem Einfluß irgendwelcher holonomer oder nichtholonomer Bedingungsgleichungen, jedoch ohne eingeprägte Kräfte, als Bahn eine Raumkurve, die wir mittels der Bogen-

[1]) Vgl. hierzu Kap. 1, Ziff. 33 u. 34 ds. Bd. ds. Handb.

länge s als Parameter beschreiben. In diesem Falle läßt sich nach bekannten Sätzen der Kinematik die gesamte Beschleunigung in Tangential- und Normalbeschleunigung zerlegen:

$$\ddot{r}^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \frac{1}{\varrho^2},$$

wo $ds/dt = v$ die Geschwindigkeit des Massenpunktes und ϱ der Krümmungsradius der Bahn ist:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)^2.$$

Der Zwang erhält dann die Form

$$Z = m\left[\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \frac{1}{\varrho^2}\right]. \tag{1}$$

Läßt man nun in den Bewegungsgleichungen (5) von Ziff. 8 nach unserer Verabredung die äußeren Kräfte fort, multipliziert sie bzw. mit $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, und addiert, so erhält man wegen der Bedingungen (1) und (1a) von Ziff. 5 der virtuellen Verrückungen für skleronome Systeme

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{s})^2 = 0.$$

Die Tangentialgeschwindigkeit $\dot{s}$ ist also für kräftefreie skleronome Systeme konstant, und damit auch die Geschwindigkeit in der Bahn. Dies folgt natürlich auch aus dem Energiesatz, da die ganze Energie nur aus der kinetischen Energie besteht. Der Zwang reduziert sich also auf

$$Z = m\frac{v^4}{\varrho^2} + \text{konst.},$$

und das Prinzip des kleinsten Zwanges besagt jetzt, da der konstante Faktor natürlich gleichgültig ist, daß die Krümmung $1/\varrho$ der Bahn für die wirkliche Bewegung ein Minimum ist. Damit haben wir das **Hertzsche Prinzip**[1]) **der geradesten Bahn:**

Ein kräftefreier unter Einfluß von Zwangsbedingungen stehender Massenpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf derjenigen Bahnkurve, die die kleinste Krümmung hat, die die Zwangsbedingungen zulassen.

Fordert die Bedingungsgleichung, daß der Punkt sich auf einer bestimmten Fläche bewegt, so ist seine Bahnkurve demnach eine geodätische Linie.

Haben wir nun mehrere Massenpunkte, so definiert HERTZ die Krümmung ϱ der Bahnkurve des Systems durch

$$\frac{1}{\varrho^2} = \sum_i m_i \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right)^2 \tag{2}$$

mit der verallgemeinerten Definition von s:

$$\dot{s}^2 = \sum_i m_i \dot{x}_i^2. \tag{3}$$

[1]) H. HERTZ, Ges. Werke Bd. III: Die Prinzipien der Mechanik. Leipzig 1894; s. auch A. BRILL, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Leipzig 1909; F. PAULI, Wiener Ber. (IIa) Bd. 125, S. 835. 1916.

Für einen Massenpunkt geht natürlich Ausdruck (2), abgesehen von dem Faktor m, in die gewöhnliche Krümmung der Bahnkurve über. Führen wir hier t als Variable ein, so wird

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot x_i}{\dot s}\right) = \frac{1}{\dot s}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot x_i}{\dot s}\right) = \frac{\dot s \ddot x_i - \ddot s \dot x_i}{\dot s^3},$$

also

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\dot s^4}\sum m_i \ddot x_i^2 + \frac{\ddot s^2}{\dot s^6}\sum m_i \dot x_i^2 - \frac{2\ddot s}{\dot s^5}\sum m_i \dot x_i \ddot x_i$$

oder mit Beachtung von (3)

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\dot s^4}\sum m_i \ddot x_i^2 - \frac{\ddot s^2}{\dot s^4}. \tag{4}$$

Für die kräftefreie Bewegung ist wieder $\dot s = v$ konstant, also $\ddot s = 0$, und das Gaußsche Prinzip für die kräftefreie Bewegung geht nach (4) wieder in das Prinzip der kleinsten Krümmung über, das jetzt also für ein beliebiges kräftefreies System aufgestellt ist. Gewöhnlich benutzt man das Hertzsche Prinzip in einer integrierten Form, die wir im Zusammenhang mit den übrigen Integralprinzipen in Ziff. 26 besprechen werden.

Der Ausgangspunkt von HERTZ in seiner Mechanik war das Bestreben, den Begriff der Kraft, insbesondere der Fernkraft, der ihm künstlich in die Natur hineingetragen erschien, aus der Mechanik ganz zu eliminieren. Dazu ist natürlich sein Prinzip der gegebene Ausgangspunkt, während es im Gegensatz zu HERTZ das Bestreben von BOLTZMANN war, die Zwangsbedingungen zu verbannen und durch geeignete Molekularkräfte zu ersetzen.

Für die Weiterentwicklung der Hertzschen Mechanik handelte es sich nun darum, auch beim Vorhandensein z. B. von Gravitationskräften zu den allgemeinen mechanischen Gleichungen durch eine entsprechende Kombination von Bindungen bzw. durch Einführung idealer Massen zu gelangen. Dieses Ziel ist wohl von HERTZ noch nicht in befriedigender Weise erreicht worden. Dennoch war seine Idee sehr tief, und sie ist in gewissem Sinne in der Gravitationstheorie der Relativitätstheorie verwirklicht worden, wo ja die Bahnkurve eines Körpers, der so klein ist, daß er selbst das Gravitationsfeld nicht wesentlich beeinflußt, eine geodätische Linie darstellt, allerdings in einer allgemeineren nichteuklidischen Raum-Zeit-Geometrie.

18. Das Jourdainsche Prinzip. Um die Verwandtschaft und den Zusammenhang des Gaußschen mit dem d'Alembertschen Prinzip deutlich hervortreten zu lassen, sei bei dem ersteren die Variation der Beschleunigungen wirklich durchgeführt. Wir erteilen also den Beschleunigungskomponenten kleine Zuwächse $\delta \ddot x_i$, während die Koordinaten und Geschwindigkeiten unverändert bleiben, also $\delta x_i = \delta \dot x_i = 0$ sein sollen. Diese Variation nennt man auch die Gaußsche Variation. Führen wir sie nun in (1) von Ziff. 15 aus, so soll sich nach dem Prinzip des kleinsten Zwanges Z nicht ändern, es muß also (s. auch Ziff. 16)

$$\sum_i (m_i \ddot x_i - X_i)\,\delta \ddot x_i = 0 \tag{1}$$

sein für alle beliebigen Werte der $\delta \ddot x_i$, die mit den Bedingungsgleichungen verträglich sind. Gleichung (1) hat nun eine ganz ähnliche Form wie das d'Alembertsche Prinzip (2) von Ziff. 8, nur daß an Stelle der Verrückungen δx_i die Variationen der Beschleunigung $\delta \ddot x_i$ treten. Da aber beide bis auf die Bedingungsgleichungen willkürliche Größen sind, so kann man auf (1) genau dieselbe Schlußweise, wie beim d'Alembertschen Prinzip anwenden, die naturgemäß dann zu denselben

Resultat führt, da auch die Nebenbedingungen eine entsprechende Form erhalten, nämlich

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}\,\delta \ddot{x}_i = 0, \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_i a_{ri}\,\delta \ddot{x}_i = 0;$$

denn bei der Gaußschen Variation werden ja nur die $\ddot{x}_i$ variiert. Die beiden Prinzipe sind damit wieder als völlig gleichwertig erkannt. Differenzen können offensichtlich nur bei singulären Lagen eintreten, wenn die virtuellen Verrückungen nicht mehr einfachen linearen Bedingungen genügen, wie in Ziff. 16 ausgeführt.

Der Vergleich des d'Alembertschen Prinzips (2) von Ziff. 8 und des Gaußschen Prinzips in der Form (1) zeigt sofort, daß es noch eine dritte Form des allgemeinen Differentialprinzips der Dynamik geben muß, indem wir eine Variation der Geschwindigkeiten $\dot{x}_i$ in $\dot{x}_i + \delta \dot{x}_i$ vornehmen, dabei aber die Koordinaten ungeändert lassen, also $\delta x_i = 0$ wählen. Das entsprechende Differentialprinzip muß dann offenbar

$$\sum_i (m_i \ddot{x}_i - X_i)\,\delta \dot{x}_i = 0 \tag{2}$$

lauten. Diese Form hat JOURDAIN[1]) bemerkt, der aus dem d'Alembertschen, dem Gaußschen und seinem Prinzip in gleicher Weise die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen in der Form der Ziff. 12 herleitete. Dieses Prinzip ist offenbar ebenfalls bei (in den Geschwindigkeiten) nichtlinearen Nebenbedingungen brauchbar.

Sehr einfach sieht man den Zusammenhang der drei Prinzipe nach LEITINGER[2]) ein, indem man den Ausdruck des d'Alembertschen Prinzips

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i\,\delta x_i = \sum_i X_i\,\delta x_i$$

wiederholt nach der Zeit differenziert. Dies ergibt

$$\sum_i m_i \frac{d\ddot{x}_i}{dt}\,\delta x_i + \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{d\,\delta x_i}{dt} = \sum_i \frac{dX_i}{dt}\,\delta x_i + \sum_i X_i \frac{d\,\delta x_i}{dt}.$$

Nimmt man nun nach der Differentiation $\delta x_i = 0$, so erhält man, wenn man die frei wählbare Größe

$$\frac{d\,\delta x_i}{dt} = \delta \dot{x}_i$$

setzt, genau das Jourdainsche Prinzip, bei dem eben als Vergleichszustände diejenigen mit derselben Lage, aber variierten Geschwindigkeiten zu wählen sind. Durch nochmalige Differentiation erhält man auf dieselbe Weise die Gaußsche Formel (1), wo die Vergleichszustände diejenigen sind, die bei festgehaltenen δx_i und $\delta \dot{x}_i$ durch Variation der Beschleunigung entstehen. Man könnte natürlich durch weitere Differentiation zu immer neuen Differentialprinzipien gelangen, doch hat dies keinen praktischen Wert.

19. Die Appellschen Bewegungsgleichungen. Ebenso wie man vom d'Alembertschen Prinzip ausgehend bei Verwendung allgemeiner Koordinaten zu den Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art kommt, so kann man auch von dem Gaußschen und dem Jourdainschen Prinzip aus dasselbe ausführen. Der allgemeinste Prozeß dieser Art läßt sich nun ganz gleichmäßig für die drei Prinzipe

[1]) PH. E. B. JOURDAIN, Quarterly Journ. Bd. 39, S. 251. 1908.

[2]) R. LEITINGER, Wiener Ber. (IIa) Bd. 122, S. 635. 1913; s. auch A. WASSMUTH, ebenda Bd. 128, S. 365. 1919.

durchführen. Man kommt dabei zu einer neuen, sehr bemerkenswerten Form der dynamischen Gleichungen, die zuerst von GIBBS[1]) und APPELL[2]) aufgestellt wurde. Sie haben vor den Lagrangeschen Gleichungen den Vorzug, daß sie auch ohne weiteres für nichtholonome Systeme und Koordinaten brauchbar sind, während bei den ersteren die komplizierte Form der Ziff. 13 eingeführt werden mußte.

Wir gehen zunächst von dem d'Alembertschen Prinzip in der Form

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_i X_i \delta x_i \tag{1}$$

aus. Wir führen nun allgemeine Lageparameter q_k ein, die auch Quasikoordinaten der allgemeinsten Form, also auch nichtholonom-rheonom sein können. Sie seien mit den x_i durch die Differentialformeln

$$dx_i = \sum_k \alpha_{ik} dq_k + \alpha_i dt \tag{2}$$

verknüpft, die nicht integrabel zu sein brauchen. Im holonomen Falle wären sie natürlich durch Differentiation aus den Beziehungen

$$x_i = x_i(q_k, t)$$

zu erlangen. Im nichtholonomen Fall müßten wir mit den Bezeichnungen von Ziff. 13 $\delta\pi_\varrho$ statt δq_k schreiben, wobei dann die $\alpha_{i\varrho}$ Funktionen irgendwelcher gewöhnlicher Lageparameter sind. Die virtuellen Verrückungen der x_i sind mit denen der q_k verknüpft durch

$$\delta x_i = \sum_k \alpha_{ik} \delta q_k, \tag{3}$$

da nach unserer Definition der virtuellen Verrückung das letzte Glied mit dt von Gleichung (2) jedesmal fortzulassen ist. Durch Differentiation nach der Zeit erhält man aus (2) die entsprechende Beziehung zwischen den Beschleunigungen

$$\ddot{x}_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_k \left(\alpha_{ik} \ddot{q}_k + \frac{d\alpha_{ik}}{dt} \dot{q}_k\right) + \frac{d\alpha_i}{dt}. \tag{4}$$

Dabei ist natürlich im holonomen Fall

$$\frac{d\alpha_{ik}}{dt} = \sum_l \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial t}.$$

Führt man mit Hilfe von (2), (3) und (4) die neuen Variablen in (1) ein, so geht diese Gleichung in die Differentialbeziehung

$$\sum_k P_k \delta q_k = \sum_k Q_k \delta q_k \tag{5}$$

über. P_k und Q_k sind zunächst nur Abkürzungen für die Koeffizienten von δq_k auf der linken bzw. rechten Seite. Nach der Erörterung von Ziff. 9 (bzw. Ziff. 13) sind die Q_k dabei die allgemeinen Kraftkomponenten in den Richtungen q_k.

Da die δq_k völlig frei sind — wir nehmen an, daß die Bedingungsgleichungen mit Hilfe von (2) völlig eliminiert seien —, so lauten die allgemeinsten Bewegungsgleichungen, die aus dem d'Alembertschen Prinzip folgen,

$$P_k = Q_k. \qquad (k = 1, \ldots, f) \tag{6}$$

[1]) J. W. GIBBS, Americ. Journ. of Math. Bd. 2, S. 49. 1879.

[2]) P. APPELL, C. R. Bd. 129, S. 317. 1899; s. auch besonders seine neueste Darstellung: Mémorial des Sciences mathématiques. Bd. I. Paris 1925. Dort ist auch zahlreiche weitere Literatur angegeben.

Aus (4) folgt nun, da jedes $\ddot{q}_k$ nur in einem einzigen Glied vorkommt,

$$\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \ddot{q}_k} = \alpha_{ik}.$$

Daher wird

$$P_k = \sum_i m_i \ddot{x}_i \alpha_{ik} = \sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \ddot{q}_k}.$$

Führen wir endlich den Ausdruck

$$S = \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \ddot{x}_i^2 \tag{7}$$

ein, so ist

$$P_k = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k},$$

und wir erhalten somit nach (6) die Bewegungsgleichungen in der Form von Appell

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k. \qquad (k = 1, \ldots f) \tag{8}$$

Sie gelten nach ihrer Herleitung auch ungeändert für Quasikoordinaten und sind dann mit den Bezeichnungen von Ziff. 15

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\varrho} = \Pi_\varrho \tag{8a}$$

zu schreiben. Die Größe S nennt man die Appellsche Funktion oder auch die Energie der Beschleunigungen. Sie hat in rechtwinkligen Koordinaten dieselbe Form wie die kinetische Energie, nur daß an Stelle der Geschwindigkeiten die Beschleunigungen treten.

Sind noch nichteliminierte Bedingungsgleichungen $\sum_k a_{rk}\,\delta q_k = 0$ dabei, so lassen sich diese wieder mit unbestimmten Multiplikatoren hinzufügen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k + \sum_r \lambda_r a_{rk}. \tag{9}$$

Die oben gegebene Ableitung läßt sich offenbar genau so an das Jourdainsche oder an das Gaußsche Prinzip anknüpfen, da bei Beachtung der jeweiligen Mannigfaltigkeit der Vergleichszustände bzw.

$$\delta \dot{x}_i = \sum_k \alpha_{ik}\,\delta \dot{q}_k$$

bei der Jourdainschen und

$$\delta \ddot{x}_i = \sum_k \alpha_{ik}\,\delta \ddot{q}_k$$

bei der Gaußschen Variation ist.

Die verschiedenen Formen der Bewegungsgleichungen kommen offenbar dadurch zustande, daß man die P_k auf verschiedene Formen bringt[1]). Die Appellsche ist formal entschieden die einfachste und nächstliegende. Sie hat allerdings den Nachteil, daß in ihr die zweiten Ableitungen explizit auftreten und dementsprechend die Umrechnung der Appellschen Funktion auf beliebige Koordinaten unbequem sein kann.

Die Lagrangeschen Gleichungen dagegen zeichnen sich gerade dadurch aus, daß zu ihrer Aufstellung nur die kinetische Energie, die nur von den ersten

[1]) Über einige Mischformen s. G. Hamel, Math. Ann. Bd. 92, S. 33. 1924.

Ableitungen abhängt, als Funktion der neuen Parameter und Geschwindigkeiten bekannt sein muß. Dafür ist ihre Form im nichtholonomen Fall (Ziff. 12 u. 13) unübersichtlicher. Welche Gleichungsform bequemer ist, hängt demnach von dem speziellen Fall ab. So ist z. B. die Ableitung der Eulerschen Gleichungen für die Bewegung starrer Körper mit Hilfe der Appellschen Gleichungen bedeutend einfacher als mit den verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen[1]).

Sehr einfach ist auch der Zusammenhang der Appellschen Gleichungen mit dem Gaußschen Prinzip in der ursprünglichen Form (1), Ziff. 15. Führen wir den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2} Z^* = S - \sum_k Q_k \ddot{q}_k \tag{10}$$

ein, so werden die Bewegungsgleichungen nach (8) einfach

$$\frac{\partial Z^*}{\partial \ddot{q}_k} = 0 .$$

Das besagt: Z^* ist ein Extremum hinsichtlich der Variationen der Beschleunigungen wie der Zwang in Ziff. 15.

In der Tat unterscheidet sich der Ausdruck (10) von dem Zwang nur um von den zweiten Ableitungen freie, also für das Extremum belanglose Glieder; denn es ist nach (4)

$$\sum_k Q_k \ddot{q}_k = \sum_i X_i \ddot{x}_i + \Phi(x_i, \dot{x}_i) ,$$

also

$$Z^* = 2\Big(S - \sum_k Q_k \ddot{q}_k\Big) = \sum_i m_i \ddot{x}_i^2 - 2\sum_i X_i \ddot{x}_i - 2\Phi = Z + \Psi ,$$

wo Φ und Ψ nicht mehr von den $\ddot{x}_i$ abhängen. Z^* hat man daher als Ausdruck des Zwanges in beliebigen Koordinaten anzusehen.

20. Wirkliche und variierte Bewegung. Die hier besprochenen Differentialprinzipe verlangen alle, daß in einem bestimmten Augenblick eine Variation des vorhandenen Bewegungszustandes vorgenommen wurde. Dies ist besonders bei dem d'Alembertschen Prinzip wenig anschaulich, denn diese Variation hat hier nichts mit dem wirklichen Ablauf der Bewegung zu tun. Man deutet den Zustand des Systems vielmehr künstlich in einen Gleichgewichtszustand um, so daß gar nicht die Frage auftauchen kann, was für eine Bedeutung die Variation für den weiteren Verlauf der Bewegung hat. Das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges erscheint von diesem Standpunkt aus natürlicher. Es zwingt dem System in jedem Augenblick gewisse Beschleunigungen auf, die eben durch den Zwang gegeben sind. Unter allen möglichen Beschleunigungen werden so die wirklichen ausgewählt, und das System bewegt sich dann auf der so beeinflußten Bahn weiter.

Um auch für das d'Alembertsche Prinzip eine größere Anschaulichkeit zu erreichen, müssen wir die virtuellen Verrückungen für den gesamten zeitlichen Verlauf der Bewegung irgendwie zusammenfassen. Dies geschieht in naturgemäßer Weise dadurch, daß man in jedem Zeitpunkt sich eine virtuelle Verrückung im Sinne des d'Alembertschen Prinzips ausgeführt denkt. Diese Verrückungen müssen an sich nur den Bedingungsgleichungen genügen, brauchen aber sonst in keiner Weise irgendwie zusammenzuhängen. Man kann sie aber speziell so wählen, daß sie stetige und genügend oft differenzierbare Funktionen der Zeit werden:

$$\delta x_i = \delta x_i(t) \quad \text{bzw. in allgemeinen Koordinaten} \quad \delta q_k = \delta q_k(t) .$$

[1]) S. z. B. CLEMENS SCHAEFER, Die Prinzipe der Dynamik, S. 37 u. 75.

Damit wird jedem Punkt der wirklichen Bahnkurve ein Nachbarpunkt

$$x_i(t) + \delta x_i(t) \qquad \text{bzw.} \qquad q_k(t) + \delta q_k(t)$$

zugeordnet, derart, daß nach unserer Voraussetzung alle Nachbarpunkte wieder auf einer glatten Kurve liegen. Der wirklichen Bahn wird also eine variierte Bahn punktweise zugeordnet. Da nach unserer früheren Verabredung die Zeit bei virtuellen Verrückungen nicht mitvariiert wird, so erhalten wir auf der Nachbarbahn auch eine Zeitskala, derart, daß sich immer Punkte gleicher Zeit entsprechen, und man vergleicht nun die variierte und die wirkliche Bahn. Dies ist auch der Ausgangspunkt, der zu den Variationsprinzipen überführt.

Die Bedeutung dieser Einführung der stetigen variierten Bahn liegt darin, daß unter ihrer Voraussetzung für wahre Koordinaten die sogleich zu beweisende Beziehung

$$\frac{d}{dt}(\delta q_k) = \delta \frac{d q_k}{dt} = \delta \dot{q}_k \tag{1}$$

besteht, welche besagt: Die Änderung von δq_k im Zeitintervall dt ist gleich der Differenz der Geschwindigkeiten auf der wahren und der Nachbarbahn. Ohne die Stetigkeitsvoraussetzung stehen natürlich diese beiden Größen in gar keinem Zusammenhang, jetzt dagegen können wir wie folgt schließen. Sei $q_k(t)$ die Bewegung auf der wirklichen, $q_k^0(t)$ die auf der variierten Bahn, so ist nach der Definition von δ ohne weiteres $\delta q_k = q_k^0 - q_k$, also

$$\frac{d}{dt}(\delta q_k) = \frac{d q_k^0}{dt} - \frac{d q_k}{dt} = \dot{q}_k^0 - \dot{q}_k .$$

Ferner ist auch nach Definition

$$\delta \dot{q}_k = \delta\left(\frac{d q_k}{dt}\right) = \dot{q}_k^0 - \dot{q}_k ,$$

woraus sofort (1) folgt.

Diese Vertauschungsrelation ist also für wahre Koordinaten trivial, sie besteht jedoch keineswegs mehr für Quasikoordinaten, was bei Rechnungen mit solchen stets zu beachten ist. Man erhält die entsprechenden Beziehungen wie folgt. Der Zusammenhang der wahren mit den Quasikoordinaten sei wie in Ziff. 15 durch

$$\dot{\pi}_\varrho = \sum_k \alpha_{\varrho k} \dot{q}_k , \qquad \delta \pi_\varrho = \sum_k \alpha_{\varrho k} \delta q_k ,$$
$$\dot{q}_k = \sum_\varrho \beta_{k\varrho} \dot{\pi}_\varrho , \qquad \delta q_k = \sum_\varrho \beta_{k\varrho} \delta \pi_\varrho$$

gegeben. Wir beschränken uns hierbei der Einfachheit halber auf skleronome Systeme; die $\alpha_{\varrho k}$ und $\beta_{k\varrho}$ seien also von t unabhängig. Hiermit bilden wir jetzt

$$\frac{d}{dt}(\delta \pi_\varrho) = \sum_k \alpha_{\varrho k} \frac{d \delta q_k}{dt} + \sum_k \frac{d \alpha_{\varrho k}}{dt} \delta q_k$$
$$\delta \dot{\pi}_\varrho = \sum_k \alpha_{\varrho k} \delta \frac{d q_k}{dt} + \sum_k \delta \alpha_{\varrho k} \frac{d q_k}{dt} .$$

Da nun für die wahren Koordinaten q_k die Symbole d/dt und δ vertauschbar sind, ergibt sich

$$\delta \dot{\pi}_\varrho - \frac{d}{dt}(\delta \pi_\varrho) = \sum_k \left(\delta \alpha_{\varrho k} \dot{q}_k - \frac{d \alpha_{\varrho k}}{dt} \delta q_k\right) .$$

Nun ist

$$\dot{\alpha}_{\varrho h} = \sum_l \frac{\partial \alpha_{\varrho h}}{\partial q_l} \dot{q}_l, \qquad \delta \alpha_{\varrho h} = \sum_l \frac{\partial \alpha_{\varrho h}}{\partial q_l} \delta q_l,$$

mithin

$$\delta \dot{\pi}_\varrho - \frac{d}{dt}(\delta \pi_\varrho) = \sum_{hl} \dot{q}_h \frac{\partial \alpha_{\varrho h}}{\partial q_l} \delta q_l - \sum_{hl} \frac{\partial \alpha_{\varrho h}}{\partial q_l} \delta q_h \dot{q}_l = \sum_{hl} \left\{ \frac{\partial \alpha_{\varrho h}}{\partial q_l} - \frac{\partial \alpha_{\varrho l}}{\partial q_h} \right\} \dot{q}_h \delta q_l.$$

Die Klammern sind aber gerade die Integrabilitätsbedingungen zwischen den Koeffizienten $\alpha_{\varrho h}$, verschwinden also in der Tat nur für holonome Koordinaten. Führen wir nun auch rechts die $\dot{\pi}_\varrho$, $\delta \pi_\varrho$ selbst ein, so ergeben sich mit den Bezeichnungen (6) der Ziff. 15 die Vertauschungsrelationen für nichtholonome Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} \delta \dot{\pi}_\varrho &= \frac{d}{dt}(\delta \pi_\varrho) + \sum_{hl\sigma\tau} \left\{ \frac{\partial \alpha_{\varrho h}}{\partial q_l} - \frac{\partial \alpha_{\varrho l}}{\partial q_h} \right\} \beta_{h\sigma} \beta_{l\tau} \dot{\pi}_\sigma \delta \pi_\tau \\ &= \frac{d}{dt}(\delta \pi_\varrho) - \sum_{\sigma\tau} \gamma_{\varrho\sigma\tau} \dot{\pi}_\sigma \delta \pi_\tau . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wir fragen nun, ob auch die variierte Bewegung in jedem Augenblick den Bedingungsgleichungen genügt, d. h. ob sie eine kinematisch mögliche Bahn darstellt.

Dies ist keineswegs selbstverständlich, und es besteht hier wieder ein fundamentaler Unterschied zwischen holonomen und nichtholonomen Systemen. Um dies zu untersuchen, stellen wir die Bedingung auf, daß die variierte Bahn den Bedingungsgleichungen genügt. Die virtuellen Verrückungen genügen, da ja die Zeit nicht mitvariiert wird, den Gleichungen (1a), Ziff. 5 (wir beschränken uns wieder auf skleronome Systeme):

$$\delta \varphi_r = \sum_h a_{hr} \delta q_h = 0, \tag{3}$$

die für holonome Bedingungen die Form

$$\delta \varphi_r = \sum_h \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_h} \delta q_h = 0$$

besitzen. Die q_h selbst sollen dabei natürlich wahre Koordinaten sein. Zunächst erhält man aus (3)

$$\frac{d}{dt}(\delta \varphi_r) = \frac{d}{dt}\left(\sum_h a_{hr} \delta q_h\right) = \sum_h \left(\sum_l \frac{\partial a_{hr}}{\partial q_l} \frac{dq_l}{dt}\right) \delta q_h + \sum_h a_{hr} \frac{d}{dt} \delta q_h = 0. \tag{4}$$

Dies ist nur der Ausdruck dafür, daß die virtuellen Verrückungen den Bedingungsgleichungen gehorchen.

Wenn nun auch die variierte Bewegung in ihrem Verlauf den Bedingungsgleichungen genügen soll, so heißt dies, daß für die variierten Koordinaten $q_h + \delta q_h$ die Zuwüchse $d(q_h + \delta q_h)$ im Zeitintervall dt den Bedingungsgleichungen genügen sollen, also unter Vertauschung der Zeiger h und l

$$\sum_l a_{lr}(q_h + \delta q_h) \frac{d(q_l + \delta q_l)}{dt} = 0,$$

und demnach durch Entwicklung nach TAYLOR und Berücksichtigung von (3)

$$\sum_l \left(\sum_h \frac{\partial a_{lr}}{\partial q_h} \delta q_h\right) \frac{dq_l}{dt} + \sum_l a_{lr} \frac{d}{dt} \delta q_l = 0 \tag{5}$$

ist. Durch Subtraktion von (4) ergibt sich, da die zweiten Summen sich offensichtlich wegheben,

$$\sum_{lk}\left(\frac{\partial a_{kr}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{lr}}{\partial q_k}\right)\frac{d q_l}{d t}\,\delta q_k = 0 . \tag{6}$$

Diese Beziehung ist wegen der Willkür der δq_i nur dann erfüllbar, wenn die Klammern für sich verschwinden[1]). Dies sind aber gerade die Integrabilitätsbedingungen für die Nebenbedingungen (3). Sie sind also bei holonomen Systemen erfüllt, jedoch nicht bei nichtholonomen. Damit ist gezeigt, daß zwar für holonome Systeme die variierten Bahnen kinematisch möglich sind, bei nichtholonomen jedoch keineswegs.

Dieses Resultat kann man sich leicht an einem Beispiel veranschaulichen. Lassen wir eine Schneide auf einer Ebene gleiten, so bedeutet die nichtholonome Nebenbedingung des seitlichen Nichtabgleitens, daß die Richtung der Schneide immer mit der Richtung der Tangente der Bahnkurve übereinstimmen muß. Die Nachbarkurve erhält man also dadurch, daß man auf jeder Tangente um ein stetig mit der Kurvenlänge sich veränderndes Stück vorwärts geht und diese Punkte zusammenfaßt. Die Tangenten der Nachbarkurve können also im allgemeinen offenbar nicht mit den Richtungen der Schneide zusammenfallen.

21. Die Lagrangesche Zentralgleichung. Mit Hilfe der vorigen Betrachtungen kann man das d'Alembertsche Prinzip auf eine Form bringen, die nicht mehr die zweiten Ableitungen enthält, und die daher häufig für die Anwendungen bequem ist. Wir schreiben es in der Form

$$\sum_i X_i\,\delta x_i = \sum m_i \ddot{x}_i\,\delta x_i .$$

Nun ist, wie bereits mehrfach benutzt,

$$\ddot{x}_i\,\delta x_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\,\delta x_i) - \dot{x}_i\frac{d}{dt}(\delta x_i) .$$

Mit der Vertauschungsrelation (1) von Ziff. 20

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \delta\frac{d x_i}{dt} = \delta\dot{x}_i$$

bekommen wir

$$\ddot{x}_i\,\delta x_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\,\delta x_i) - \dot{x}_i\,\delta\dot{x}_i = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i\,\delta x_i) - \frac{1}{2}\,\delta(\dot{x}_i)^2 . \tag{1}$$

Tragen wir dies in das d'Alembertsche Prinzip ein, so kommt

$$\sum_i X_i\,\delta x_i + \sum_i \frac{m_i}{2}\,\delta(\dot{x}_i)^2 = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\dot{x}_i\,\delta x_i\right). \tag{2}$$

Das zweite Glied ist nichts anderes als die Variation der kinetischen Energie T, und wir erhalten damit als neue Form des d'Alembertschen Prinzips die sog. **Lagrangesche Zentralgleichung**

$$\delta T + \sum X_i\,\delta x_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\dot{x}_i\,\delta x_i\right). \tag{3}$$

[1]) Dieser Schluß ist nicht ganz streng, da die δq_k den Bedingungen (3) und die $\dot{q}_k$ den entsprechenden $\sum_k a_{kr}\dot{q}_k = 0$ genügen, doch kann man gerade durch Berücksichtigung dieser Einschränkungen den Nachweis führen, daß (6) wirklich nur bei holonomen Bedingungen verschwindet.

Hier können wir noch allgemeine (holonome) Koordinaten einführen: Der Ausdruck

$$\sum_i X_i \,\delta x_i = \sum_k Q_k \,\delta q_k$$

ist wieder die Arbeit bei der virtuellen Verschiebung δq_k; wir können ihn daher auch symbolisch mit δA bezeichnen. Mit Hilfe der Transformationsformeln der x_i auf die allgemeinen Koordinaten

$$x_i = x_i(q_k, t),$$

also

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_k \alpha_{ik}\dot{q}_k + \alpha_i,$$
$$\delta x_i = \sum \alpha_{ik}\,\delta q_k,$$

bestätigt man leicht die Identität

$$\sum_i m_i \dot{x}_i \,\delta x_i = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k = \sum_k p_k \,\delta q_k,$$

und die Lagrangesche Zentralgleichung wird damit

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt}\left(\sum_k p_k \,\delta q_k\right). \tag{4}$$

Die Klammer der rechten Seite ist in gleicher Weise aus den Impulskomponenten p_k und den virtuellen Verschiebungen zusammengesetzt wie die virtuellen Arbeiten aus dem Kraftvektor und den δq_k. Gleichung (4) drückt also aus, daß die Summe der Variationen der kinetischen Energie und der Arbeit der äußeren Kräfte gleich der Änderung der virtuellen Impulsarbeiten in der Zeiteinheit ist.

Dieses Resultat ist wesentlich an die Vertauschbarkeit von d/dt und δ geknüpft. Bei allgemeineren Variationen und bei Quasikoordinaten, für die dies nicht gilt, versagt auch die Formel (4). Eine Erweiterung auf diesen Fall ist von Hamel[1]) angegeben worden.

III. Integralprinzipe.

23. Das Hamiltonsche Prinzip. Das bezeichnende Merkmal der bisher betrachteten Prinzipe ist, daß stets die Variationen des Systems in einem bestimmten Augenblick untersucht werden. Dementsprechend geben sie nicht eine Eigenschaft der wirklichen Bewegung, die diese vor den Nachbarbewegungen auszeichnet, sondern es gelingt nur mit ihrer Hilfe, die Differentialgleichungen für die Bewegung aufzustellen. Man kann aber auch nach den Eigenschaften der wirklichen Bahnen als Ganzes fragen und kommt so zu den Integralprinzipen.

Wir denken uns wie in Ziff. 20 die wahre Bahn mit variierten Bahnen verglichen. Erteilt man den Zuwächsen δq_k alle möglichen Werte, so bekommt man eine ganze Schar von Vergleichsbahnen, und es ist nun die Aufgabe, besondere Kennzeichen für die wirkliche Bahn zu finden. Man kann natürlich nicht mehr verlangen, dies wieder durch ein gewöhnliches Minimalprinzip wie das Gaußsche Prinzip zu erreichen, sondern es kann eine solche Auswahl nur erfolgen, wenn man einer Funktion der ganzen Bahnkurve, die ja selbst wieder eine Funktion der Koordinaten und der Zeit ist, also einer Funktionenfunktion eine Bedingung

[1]) G. Hamel, Math. Ann. Bd. 59, S. 416. 1904.

auferlegt. An Stelle der Differentialrechnung tritt dementsprechend die Variationsrechnung.

Das wichtigste und meist gebrauchte Prinzip ist das **Prinzip von Hamilton**, das wir in seiner einfachsten Form für konservative holonome Systeme an die Spitze stellen wollen, um an ihm den allgemeinen Charakter und die Vorteile der Integralprinzipe klarzustellen.

Es lautet: **Sei T die kinetische und U die potentielle Energie des Systems, $L = T - U$ also das kinetische Potential als Funktion irgendwelcher Lageparameter q_k, ihrer zeitlichen Ableitungen $\dot{q}_k$ und der Zeit t, so ist für die wirklich eintretende Bewegung**

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)\, dt = \text{Extremum}, \tag{1}$$

wobei das Integral zwischen zwei gegebenen Lagen des Systems zu bestimmten Zeiten zu nehmen ist, also

$$q_k(t_1) = q_k^{(1)} \qquad \text{und} \qquad q_k(t_2) = q_k^{(2)} \tag{2}$$

bestimmt vorgegebene Werte sind, und zur Konkurrenz alle Bahnen zugelassen sind, die aus der wirklichen Bahn durch eine Variation im Sinne der Ziff. 20 hervorgehen. Es müssen also die δq_k stetige Funktionen der Zeit sein, die den Nebenbedingungen genügen; doch sollen sie an den Grenzen des Integrals verschwinden.

Dies Problem ist genau eine der Grundaufgaben der Variationsrechnung. Für jede beliebige Bahn $q_k = q_k(t)$ nimmt das Integral einen bestimmten Wert an, und es soll eben die Bahn genommen werden, für die das Integral (1) einen stationären Wert besitzt.

Nach den Regeln der Variationsrechnung[1]) erhält man aus (1) als notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremums die Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \qquad (k = 1, \ldots f) \tag{3}$$

Eine direkte Ableitung von ihnen wird auch in Ziff. 27 gegeben.

Man kann auch ohne weiteres noch holonome Nebenbedingungen der Form

$$\varphi_r(q_k, t) = 0 \qquad (r = 1, \ldots g)$$

zulassen. Die Differentialgleichungen erhält man dann bekanntlich, indem man die Nebenbedingungen mit unbestimmten Multiplikatoren $-\lambda_r$ zu dem Integranden in (1) hinzufügt, also das Extremum von

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(L - \sum_r \lambda_r \varphi_r\Big)\, dt$$

aufsucht und die λ_r als neue Variable mitführt, deren Ableitungen jedoch nicht auftreten. Man erhält dann als Differentialgleichungen also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_k} = 0. \tag{3a}$$

Die Gleichungen (3) bzw. (3a) sind nun gerade die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art der Ziff. 9 bzw. 12. Damit ist auch die Identität des Hamiltonschen

[1]) S. ds. Handb. Bd. III.

Prinzips in seiner einfachsten Form mit dem d'Alembertschen Prinzip nachgewiesen.

Aus der Form (1) erkennt man die große Bedeutung und den Fortschritt, der durch die Integralprinzipe erzielt wird. Sie enthält gar nichts, was irgendwie auf die Koordinaten Bezug nimmt. Die Energie und damit das kinetische Potential sind mechanische Größen, deren Bedeutung unabhängig von der Art der Beschreibung durch bestimmte Koordinaten ist, und ebenso natürlich das Integral über die Bahnkurve. Die Aussage des Hamiltonschen Prinzips ist also unabhängig von dem Koordinatensystem, und man kann mit seiner Hilfe sehr bequem die Umrechnung auf irgendwelche Koordinaten ausführen. Da es nur die ersten Ableitungen der Koordinaten enthält, so ist die Umrechnung bei ihm einfacher als bei den Differentialgleichungen selber, da diese ja die zweiten Ableitungen enthalten.

Dies ist auch der Grund dafür, daß man die Feldgleichungen der Relativitätstheorie und überhaupt alle Grundgesetze der modernen Physik immer in der Form von Variationsprinzipen sucht: man erhält dann immer eine von der speziellen Darstellung unabhängige Formulierung. Ebenso lassen sich die Variationsprinzipe leicht auf kontinuierliche Medien ausdehnen.

Man kann das Hamiltonsche Prinzip — und das ist der allgemein übliche Weg — auch durch direkte Umformung des d'Alembertschen Prinzips erhalten. Wir gehen hierzu von der Lagrangeschen Zentralgleichung (4) von Ziff. 21 aus:

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k\right).$$

Die Form der rechten Seite legt eine Integration nach der Zeit nahe:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)\,dt = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}.$$

Fordern wir nun, daß die Verrückungen δq_k an den Integrationsgrenzen verschwinden, d. h. eben, daß alle miteinander zu vergleichenden Bahnen durch denselben Anfangs- und Endpunkt gehen, so fällt die rechte Seite fort, und wir erhalten

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \sum Q_k\,\delta q_k\right) dt = 0. \tag{4}$$

Dies ist aber nichts als eine Verallgemeinerung des Hamiltonschen Prinzips (1). Hat das System nämlich ein Potential, so wird

$$\delta A = \sum Q_k\,\delta q_k = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\,\delta q_k = -\delta U$$

und infolgedessen, da man hier Variation und Integrationen vertauschen darf,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\,dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0,$$

was mit (1) identisch ist. Gleichung (4) stellt eine Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips für Kräfte, die kein Potential besitzen, dar. Allerdings geht hierbei der Charakter des Variationsprinzips verloren. Man kann trotzdem noch aus ihm durch formale Prozesse die Bewegungsgleichungen, und zwar in der allgemeinen Form von Ziff. 13, gewinnen. Hierauf kommen wir in Ziff. 27 zurück.

23. Variation der Zeit. Die Form eines echten Variationsprinzips ist für das Hamiltonsche Prinzip nur im Fall der Existenz eines kinetischen Potentials möglich, der zwar sehr wichtig ist, aber eben nicht die Allgemeinheit der Anwendbarkeit wie die Differentialprinzipe besitzt. Wir haben bereits in Gleichung (4) von Ziff. 22 gesehen, in welcher Richtung die Verallgemeinerung zu suchen ist. Man muß auf den engen Rahmen der eigentlichen Variationsrechnung verzichten, und allgemeinere Variations- und Integrationsprozesse an den Formeln des d'Alembertschen Prinzips oder auch der anderen Differentialprinzipe vornehmen.

Bisher hatten wir die Zeit nicht mit variiert, d. h. auf der variierten Bahn und der wahren Bahn stets Punkte, die zu der gleichen Zeit t gehören, einander entsprechen lassen. Die virtuellen Verrückungen waren also so definiert, daß sie bei konstant gehaltener Zeit auszuführen waren. Diese Beschränkung lassen wir jetzt fallen und betrachten Verrückungen, die wir zum Unterschied mit Δx_i, Δq_k, Δt bezeichnen, die also dem Raumzeitpunkt q_k, t der wirklichen Bahn den Punkt $q_k + \Delta q_k$, $t + \Delta t$ zuordnen. Dabei sollen aber wieder die Δq_k, Δt stetige Funktionen der Zeit sein, so daß die Gesamtheit der variierten Punkte eine variierte, stetige Bahn bilden. Dies bedeutet, daß die Nachbarbahnen nun nicht in einem bestimmten Zeitmaß, das mit der wahren Bewegung im Sinne der virtuellen Verschiebungen gekoppelt ist, sondern in einer beliebigen Zeit durchlaufen werden können. Der Bereich der zugelassenen Funktionen $q_k(t)$ wird dadurch natürlich erheblich erweitert.

Wir setzen dabei voraus, daß der Δ-Prozeß eine wirkliche Variation bedeutet; d. h. in allgemeinen Koordinaten, zwischen denen keinerlei Bindungen mehr bestehen, ist die allgemeinste Δ-Operation angewandt auf eine Funktion $\varphi(q_k, t)$

$$\Delta \varphi = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \Delta q_k + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta t, \tag{1}$$

wo die Δq_k, Δt, abgesehen davon, daß sie sich im Sinne von Ziff. 20 stetig mit der Zeit ändern sollen, ganz willkürlich sind. Dieser Prozeß hat natürlich auch bei Quasikoordinaten einen guten Sinn. Wenn diese auch so gewählt sind, daß keinerlei Bedingungen mehr zwischen ihnen bestehen, so bedeutet wieder der Δ-Prozeß die Änderungen der betreffenden Größe, wenn allen Differentialen der Quasikoordinaten und der Zeit t beliebige Zuwächse $\Delta \pi_k$, Δt erteilt werden. Ebenso braucht die Funktion φ selbst auch nicht in integrierbarer Form darstellbar zu sein, wie z. B. die Arbeit bei nicht konservativen Kräften. An Stelle der $\partial \varphi / \partial q_k$ treten dann die Ausdrücke Q_k, die nicht den Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_l} = \frac{\partial Q_l}{\partial q_k}$$

genügen.

In anderen Koordinaten, zwischen denen noch Bedingungsgleichungen bestehen, z. B. in rechtwinkligen, sind dann auch die Δq_i, Δt nicht mehr ganz willkürlich, sondern sie müssen z. B. bei den allgemeinen nichtholonomen Nebenbedingungen (2a) von Ziff. 4 die Beziehungen

$$\sum_i a_{ir} \Delta q_i + a_r \Delta t = 0$$

erfüllen.

Neben der Δ-Variation betrachten wir noch die ursprüngliche δ-Variation und das Fortschreiten des Systems selbst auf seiner Bahn. Es ist nach der Zeit dt an den Punkt $x_i + \dot{x}_i dt$ bzw. in allgemeinen Koordinaten $q_k + \dot{q}_k dt$ gelangt. Dabei ändern sich auch die entsprechenden Werte der Δq_k, so daß auch die Ausdrücke

$$\frac{d}{dt} \Delta q_k, \quad \frac{d}{dt} \Delta t, \quad \Delta \frac{d q_k}{dt} = \Delta \dot{q}_k$$

einen bestimmten Sinn haben.

Wir können nun jeden Δ-Prozeß mit einem bestimmten δ-Prozeß in Verbindung bringen, indem wir ihn durch Zusammensetzung aus einem d-Prozeß und einem δ-Prozeß aufbauen. Dies ist notwendig, wenn man das d'Alembertsche Prinzip benutzen will, da dieses nur für die δ-Prozesse gilt. Neben (1) haben wir als Definition für den δ- und d-Prozeß

$$\delta\varphi = \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\,\delta q_k, \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot\varphi = \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\,\dot q_k + \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{3}$$

Hiernach ist die Operation

$$\Delta\varphi - \dot\varphi\,\Delta t = \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\,(\Delta q_k - \dot q_k\,\Delta t) = \delta\varphi \tag{4}$$

eine virtuelle Verrückung mit

$$\delta q_k = \Delta q_k - \dot q_k\,\Delta t \quad \text{bzw.} \quad \delta x_i = \Delta x_i - \dot x_i\,\Delta t. \tag{5}$$

Diese δ-Verschiebung hat die einfache geometrische Bedeutung, daß sie die Projektion von Δ auf eine Ebene $t =$ konst. in dem allgemeinen Lagenraum der q_k und t ist. Geht man nämlich erst um Δt auf der wahren Bahn vorwärts, und führt dann den δ-Prozeß aus, so kommt man gerade zu dem Punkt

$$q_k + \dot q_k\,\Delta t + \delta(q_k + \dot q_k\,\Delta t),$$

und dies ist, da das letzte Glied als von zweiter Ordnung zu vernachlässigen ist, gerade der Punkt $q_k + \Delta q_k$. Die δq_k sind also die den Δq_k entsprechenden Variationen bei konstant gehaltener Zeit. Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß im q-Raum die Mannigfaltigkeit der zugelassenen Bahnen durch Einführung der Zeitvariation nicht vergrößert wird. Nur kann jetzt auch die Durchlaufungsgeschwindigkeit, die früher durch die Koppelung $\delta t = 0$ mit der wahren Bahn festgelegt war, abgeändert werden.

Ein besonderes Kennzeichen der Δ-Variation ist, daß bei ihr die Vertauschbarkeit mit der Differentiation nach der Zeit auch bei holonomen Koordinaten nicht mehr gilt. Wir haben nämlich nach (5)

$$\frac{d}{dt}\delta q_k = \frac{d}{dt}(\Delta q_k - \dot q_k\,\Delta t) = \frac{d}{dt}\Delta q_k - \ddot q_k\,\Delta t - \dot q_k\frac{d\Delta t}{dt}.$$

Nun ist nach (4) mit $\varphi = \dot q_k$

$$\Delta\dot q_k = \delta\dot q_k + \ddot q_k\,\Delta t,$$

und wir erhalten damit, da d und δ vertauschbar sind, als Vertauschungsrelation für d und Δ

$$\Delta\frac{dq_k}{dt} = \Delta\dot q_k = \frac{d}{dt}\Delta q_k - \dot q_k\frac{d\Delta t}{dt}, \tag{6}$$

also auch für die rechtwinkligen Koordinaten

$$\Delta\dot x_i = \frac{d}{dt}\Delta x_i - \dot x_i\frac{d\Delta t}{dt}. \tag{6a}$$

Man kann auch noch auf andere Weisen jeder Δ-Verrückung eine δ-Verrückung zuordnen, z. B. durch die Definition

$$\delta^* x_i = \Delta x_i - \frac{\partial x_i}{\partial t}\,\Delta t, \tag{7}$$

wo x_i als Funktion der allgemeinen Lageparameter q_k und t zu denken ist. Auch δ^* ist wegen

$$\Delta x_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\Delta q_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}\Delta t, \quad \text{also} \quad \delta^* x_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\Delta q_k$$

eine virtuelle Verschiebung mit $\delta^* q_k = \Delta q_k$, doch können dann nach (1) und (2) nicht gleichzeitig Δ und δ^* echte Variationen darstellen, was wohl der hier verwandten Definition (5) den Vorrang gibt. Natürlich kann man auch mit (7) oder noch einer anderen Definition der virtuellen Verrückungen weiter operieren und analog wie in der nächsten Ziffer durch Umformung des d'Alembertschen Ausdrucks zu den allgemeinen Integralprinzipien übergehen, wenn man nur stets auf richtige Grenzbedingungen achtet. So benutzte HÖLDER[1]) in seiner grundlegenden Arbeit die Zuordnung (7), während (5) von VOSS[2]) eingeführt wurde. Wir haben diesen Punkt so ausführlich erörtert, weil in der Literatur vielfach Unklarheit über ihn bestand[3]).

24. Allgemeine Transformation des d'Alembertschen Prinzips. Mit Hilfe des allgemeinen Δ-Prozesses und Integration über die Zeit suchen wir nun eine möglichst allgemeine Umformung des d'Alembertschen Prinzips in eine Integralformel. Diese wird uns dann dazu dienen, die Integralprinzipe einerseits aus dem d'Alembertschen Prinzip abzuleiten und andererseits die Zusammenhänge zwischen ihnen selbst klarzustellen. Hierzu wenden wir den Δ-Prozeß zuerst auf die kinetische Energie

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2$$

an. Nach Formel (6a) von Ziff. 23 wird für die wahren Koordinaten x_i

$$\Delta T = \Delta \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2 = \sum_i m_i \dot{x}_i \Delta \dot{x}_i = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{d\Delta x_i}{dt} - \sum_i m_i \dot{x}_i^2 \frac{d\Delta t}{dt},$$

$$\Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt} = \sum m_i \dot{x}_i \frac{d\Delta x_i}{dt}. \tag{1}$$

Nun ist

$$\dot{x}_i \frac{d\Delta x_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i \Delta x_i) - \ddot{x}_i \Delta x_i$$

und damit

$$-\sum_i m_i \ddot{x}_i \Delta x_i = \Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt} - \frac{d}{dt}\sum m_i \dot{x}_i \Delta x_i. \tag{2}$$

Ferner ist noch nach (5) von Ziff. 23

$$\left.\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{x}_i \Delta x_i &= \sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i + \sum_i m_i \ddot{x}_i \dot{x}_i \Delta t\\ &= \sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i + \frac{dT}{dt}\Delta t.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Wir müssen uns jetzt aber noch von der Bezugnahme auf die speziellen rechtwinkligen Koordinaten frei machen.

[1]) O. HÖLDER, Göttinger Nachr. 1896, S. 122.
[2]) A. VOSS, Göttinger Nachr. 1900, S. 322.
[3]) S. insbesondere die Diskussion zwischen M. RÉTHY (Math. Ann. Bd. 58, S. 169. 1905 u. Bd. 64, S. 156. 1906) und PH. E. B. JOURDAIN (ebenda Bd. 62, S. 413 u. Bd. 65, S. 513. 1904). Die letzte Arbeit brachte die völlige Klärung; vgl. ferner auch H. BRELL, Wiener Ber. (IIa) Bd. 122, S. 1031. 1913.

Eine Umformung von $\sum_i m_i \dot x_i \Delta x_i$ auf allgemeine Koordinaten erhalten wir durch Zurückgehen auf die explizite Form der kinetischen Energie. Sei in völlig freien Koordinaten, die dafür auch Quasikoordinaten und rheonom sein dürfen,

$$\dot x_i = \sum_k \alpha_{ik} \dot q_k + \alpha_i ,$$

so ist nach unserer Definition

$$\Delta x_i = \sum_k \alpha_{ik} \Delta q_k + \alpha_i \Delta t ,$$

wo die Δq_k, Δt völlig frei sind. Ferner haben wir hiermit

$$\left.\begin{aligned} 2T &= \sum_{ikl} m_i \alpha_{ik} \alpha_{il} \dot q_k \dot q_l + 2\sum_{ik} m_i \alpha_{ik} \alpha_i \dot q_k + \sum_i m_i \alpha_i^2 \\ &= 2T_2 + 2T_1 + 2T_0 , \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

was sich für skleronome Systeme, d. h. $\alpha_i = 0$, auf eine homogene Funktion zweiten Grades reduziert. Mit diesen Ausdrücken verifiziert man durch Einsetzen leicht die Identität

$$\sum_i m_i \dot x_i \Delta x_i = 2T\Delta t + \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}(\Delta q_k - \dot q_k \Delta t) = 2T\Delta t + \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k . \qquad (5)$$

Nach (2), (3) und (5) wird somit endlich

$$-\sum_i m_i \ddot x_i \delta x_i + \frac{d}{dt}\left(2T\Delta t + \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\right) = \Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt}\Delta t .$$

Addieren wir hier noch auf beiden Seiten die Arbeit der äußeren Kräfte bei der virtuellen Verschiebung δq_k

$$\sum_i X_i \delta x_i = \sum_k Q_k \delta q_k = \delta A ,$$

und integrieren nach der Zeit zwischen den Grenzen t_1 und t_2, so erhalten wir folgende ganz allgemein, also auch für nichtholonom-rheonome Systeme gültige Identität

$$\left.\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2}\left\{\Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt}\Delta t + \delta A\right\}dt \\ &\qquad = \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_i (X_i - m_i \ddot x_i)\,\delta x_i\right]dt + \left\{2T\Delta t + \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\right\}\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} , \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

die als Stammformel aller Integralprinzipe anzusprechen ist.

Hier steht unter dem Integral auf der rechten Seite genau der Ausdruck (2) von Ziff. 8 des d'Alembertschen Prinzips, so daß es für alle Bewegungen verschwindet, und man bekommt so als eine mit dem d'Alembertschen Prinzip äquivalente Aussage

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2}\left\{\Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt}\Delta t + \delta A\right\}dt &= \left\{2T\Delta t + \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\right\}\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} \\ &= \left\{2T\Delta t + \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}(\Delta q_k - \dot q_k \Delta t)\right\}\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} , \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Aus ihr erhält man, wie in der nächsten Ziffer ausgeführt wird, durch Spezialisieren eine Reihe von Eigenschaften der mechanischen Bahnkurven, die diese im Vergleich mit bestimmten Scharen von Nachbarbahnen eindeutig charakterisieren und sonach geeignet sind, als Prinzipe der Dynamik zu dienen.

Man kann natürlich in (6) auch noch den Ausdruck des d'Alembertschen Prinzips nach den bei den Differentialprinzipen benutzten Methoden selbst mit umformen. Die allgemeinste Form in allgemeinen Koordinaten haben wir in Gleichung (8) von Ziff. 19 kennengelernt, so daß wir auch schreiben können

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_i (X_i - m_i \ddot{x}_i)\,\delta x_i\right\} dt = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_b \left(Q_b - \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_b}\right)\delta q_b\right\} dt.$$

Diese Form hat BRELL[1]) durch direkte Rechnung erreicht. Andererseits können wir auch von den Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art, am besten in der Form (2) der Ziff. 12 ausgehen. Sie sind äquivalent mit der Identität

$$\sum_i (m_i \ddot{x}_i - X_i)\,\delta x_i = \sum_b \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_b} - \sum_r \lambda_r a_{rb} - Q_b\right\}\delta q_b.$$

Hier fällt nun infolge der Nebenbedingungen

$$\sum_b a_{rb}\,\delta q_b = 0$$

das Glied mit dem Multiplikatoren heraus, und es ergibt sich auch im nichtholonomen Fall die Identität

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_i (m_i \ddot{x}_i - X_i)\,\delta x_i\right\} dt = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_b \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_b} - Q_b\right]\delta q_b\right\} dt, \qquad (8)$$

wenn die q_b wahre Koordinaten sind. Durch Einsetzen von (8) in (6) erhält man so eine Integralumrechnung der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art selbst, die zuerst von Voss aufgestellt wurde.

25. Allgemeinste Form des Hamiltonschen Prinzips und des Prinzips der kleinsten Wirkung[2]). Nach diesen Vorbereitungen gehen wir jetzt zu der Aufstellung der Integralprinzipe selbst über. Wählt man in (7) in Ziff. 24 die Verschiebungen Δq_b, Δt bzw. δq_b so, daß die integralfreien Glieder auf der rechten Seite an den Integrationsgrenzen verschwinden, so erhält man das zuerst von Voss aufgestellte allgemeinste Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\Delta T + 2T\frac{d\,\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt}\Delta t + \delta A\right\} dt = 0, \qquad (1)$$

wobei die zugelassenen Bewegungen nur den Randbedingungen

$$\left\{2T\,\Delta t + \sum_b \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b}(\Delta q_b - \dot{q}_b\,\Delta t)\right\}\Bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0 \qquad (2)$$

genügen müssen. Sie sind z. B. gewährleistet, wenn alle Δq_b, Δt für $t = t_1$ und $t = t_2$ verschwinden, also alle verglichenen Bahnkurven durch dieselben Anfangs- und Endpunkte zu derselben Zeit gehen.

[1]) H. BRELL, Wiener Ber. (IIa) Bd. 122, S. 933.
[2]) S. außer den zu Ziff. 23 genannten grundlegenden Arbeiten noch H. BRELL u. E. [illegible], Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 15, S. 1082. 1913 u. Bd. 16, S. 479. 1914.

Schreiben wir jetzt die linke Seite von Ziff. 24, Gleichung (7) in der Form

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt} + 2\frac{dT}{dt}\Delta t - \frac{dT}{dt}\Delta t + \delta A\right\}dt$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\Delta T - \frac{dT}{dt}\Delta t + \delta A\right\}dt + 2T\Delta t\Big|_{t=t_1}^{t=t_2},$$

so hebt sich das integrierte Glied $2T\Delta t$ gegen das entsprechende auf der rechten Seite jener Gleichung fort, und wir erhalten unter Berücksichtigung von

$$\Delta T - \frac{dT}{dt}\Delta t = \delta T,$$

was aus (4) von Ziff. 23 folgt,

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta A)\,dt = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}. \qquad (3)$$

Dies ist aber genau das Hamiltonsche Prinzip in seiner allgemeinsten Form, das also mit dem Prinzip (7) von Ziff. 24 völlig identisch ist. Das Integral verschwindet unter den Grenzbedingungen

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = 0, \qquad (4)$$

also z. B. für $\delta q_k^0 = 0$, $\delta q_k^1 = 0$, d. h. wenn alle Kurven durch die gleichen Anfangs- und Endpunkte hindurchgehen. Es ist sehr bemerkenswert, daß die Variation der Zeit hier ganz von selbst herausfällt und ihre Einführung also eigentlich gar keine Verallgemeinerung mit sich bringt. Dies rührt natürlich daher, daß auch im d'Alembertschen Prinzip die Zeit nicht mit zu variieren ist.

Eine wesentlich neue Form erhalten wir aber, wenn wir den Bereich der zur Konkurrenz zugelassenen Bahnen dadurch verringern, daß wir in jedem Augenblick

$$\delta A = \delta T = \Delta T - \frac{dT}{dt}\Delta t \qquad (5)$$

fordern. Dies bedeutet, daß bei dem Übergang zu der Nachbarbahn die Energie konstant bleiben soll, da ja die Änderung der Energie gleich der Differenz der kinetischen Energie und der geleisteten Arbeit bei dieser Verschiebung ist. Damit ist nicht gesagt, daß die Energie während der ganzen Bewegung konstant bleiben, also der Energiesatz gelten soll, sondern nur, daß der wahren Bahn stets Bahnen mit punktweise entsprechender Energie als Nachbarbahnen zugeordnet werden sollen, also nur für die Übergangsbewegungen der Energiesatz bestehen soll. Drücken wir nun vermittels der eben genannten Übergangsbedingungen (5) die Arbeit δA in Gleichung (7) von Ziff. 24 durch ΔT aus, so erhalten wir einfach

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{2\Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt}\right\}dt = \left\{2T\Delta t + \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}(\Delta q_k - \dot q_k\Delta t)\right\}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}. \qquad (6)$$

Für die linke Seite können wir symbolisch

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{2\Delta T + 2T\frac{d\Delta t}{dt}\right\}dt = 2\Delta\int_{t_1}^{t_2} T\,dt \qquad (6a)$$

schreiben, wobei das Zeichen Δ die Differenz der Integrale über die wahre und die variierte Bahnkurve bedeuten soll. In der Tat wird nach Ziff. 23

$$\Delta\int T\,dt = \int T(q_k + \Delta q_k,\, t + \Delta t)\,d(t + \Delta t) - \int T\,dt = \int \Delta T\,dt + \int T\,d\,\Delta t;$$

d. h. die Δ-Variation des Integrals über die kinetische Energie unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (5) verschwindet ebenfalls unter der Grenzbedingung (2).

Hiermit haben wir, da das Integral über die kinetische Energie als **Wirkung** bezeichnet wird, die allgemeinste Form des **Euler-Maupertuisschen Prinzips der kleinsten Wirkung**, das also ebenfalls auf nichtholonom-rheonome Systeme anwendbar ist. Es lautet: **Das Integral über die kinetische Energie nimmt für die wirkliche Bewegung einen Extremwert an gegenüber allen Δ-Variationen der Bahnkurve** (s. Ziff. 23), **die für jeden Punkt der Bahn der Bedingung (5) und an den Endpunkten noch der Randbedingung (2) genügen.**

Allerdings wird das Prinzip gewöhnlich nur für den skleronomen Fall ausgesprochen, da es sich dann noch wesentlich vereinfacht. Dann ist nämlich T nur eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten. Es fallen also T_0 und T_1 fort, und nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen ist

$$2T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\dot q_k,$$

und es wird die Randbedingung (2) einfach

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\Delta q_k\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} = 0, \tag{7}$$

d. h. für Δt ist gar keine Randbedingung vorgeschrieben, während (7) sicher erfüllt ist, wenn wir $\Delta q_k^0 = 0$, $\Delta q_k^1 = 0$ verlangen. Die Vergleichsbahnen sind also die, die von dem Anfangspunkt $q_k = q_k^0$ zu dem Endpunkt $q_k = q_k^1$ in irgendeiner Zeit führen. In dieser Form ist das Prinzip der kleinsten Wirkung zuerst von Helmholtz[1]) streng bewiesen worden. Wesentlich für das Prinzip der kleinsten Wirkung ist also die Variation der Zeit gegenüber der δ-Variation beim Hamiltonschen Prinzip.

Die Bezeichnung des Zeitintegrals über die kinetische Energie als Wirkung findet ihre Berechtigung darin, daß es sich als ein Integral über die Impulse darstellen läßt. Sei nämlich s_n die Bogenlänge auf der Bahn des n-ten Massenpunktes und seine Geschwindigkeit also

$$v_n = \frac{ds_n}{dt},$$

so wird

$$\int T\,dt = \int \sum_n m_n v_n \frac{ds_n}{dt}\,dt = \int \sum_n m_n v_n\,ds_n = \int \sum_n p_n\,ds_n.$$

Anhangsweise sei noch bemerkt, daß man an sich versuchen könnte, entsprechende Umformungen wie in Ziff. 24 auch mit dem Jourdainschen und dem Gaußschen Prinzip vorzunehmen. Man würde dann zu neuen Integralprinzipien gelangen, bei denen entsprechend nicht die Koordinaten, sondern die Geschwindigkeiten bzw. die Beschleunigungen zu variieren wären, was nur natürlich nicht so anschaulich ist, wenn man die variierte Bahn als Ganzes betrachtet. Einen Schritt

[1]) H. v. Helmholtz, Ber. Berl. Akad. 1887, S. 225.

in dieser Richtung hat Schenkl[1]) getan, der aus dem Gaußschen Prinzip das dem Hamiltonschen Prinzip analoge Prinzip

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\frac{d^2 T}{dt^2}-\frac{d^2\delta A}{dt^2}\right\}dt=0$$

ableitet, wo das Zeichen δ jetzt die Gaußsche Variation der Beschleunigungen bei festgehaltenen Lagen und Geschwindigkeiten bedeutet.

26. Das Jacobische Prinzip und das Hertzsche Prinzip. Man kann nun noch weiter gehen und auch den Energiesatz für die wirkliche Bahn voraussetzen, wobei man sich natürlich auf konservative Systeme beschränken muß. Es bestehe also das Energieintegral

$$T+U=\text{konst.}=E\,.$$

Mit seiner Hilfe kann man die Zeit aus Gleichung (6) von Ziff. 25 eliminieren, so daß nunmehr eine Funktion der Bahnkurve unter dem Integralzeichen steht. Die kinetische Energie ist wieder als eine homogene quadratische Funktion in den Geschwindigkeiten vorauszusetzen:

$$2T=\sum_{kl}a_{kl}\frac{dq_k}{dt}\frac{dq_l}{dt}\,. \tag{1}$$

Also wird

$$dt^2=\frac{\sum a_{kl}\,dq_k\,dq_l}{2T}\,.$$

Benutzen wir noch die Energiebeziehung $T=E-U$ und setzen dies in Gleichung (6) von Ziff. 25 ein, so erhalten wir die **Jacobische Form des Prinzips der kleinsten Wirkung:**

$$\Delta\int_A^B\sqrt{E-U}\sqrt{\sum_{kl}a_{kl}\,dq_k\,dq_l}=0\,. \tag{2}$$

Für die praktische Verwendung ist es zweckmäßig, einen neuen Parameter τ einzuführen, nach dem integriert wird. Man kann dann schreiben

$$\Delta\int_{\tau_0}^{\tau_1}\sqrt{E-U}\sqrt{\sum_{kl}a_{kl}\frac{dq_k}{d\tau}\frac{dq_l}{d\tau}}\,d\tau=0\,. \tag{3}$$

Als Integrationsgrenzen sind dabei die festgewählten Anfangs- und Endpunkte der Bahn zu nehmen, an denen auch die Variationen der Koordinaten verschwinden müssen. Da die Zeit gar nicht auftritt, so erhält man aus dem Jacobischen Prinzip, das wieder ein echtes Variationsprinzip darstellt, nur die Bahnkurve selbst, während dann der zeitliche Ablauf der Bewegung durch die Energiegleichung bestimmt ist. Bezeichnen wir die Ableitungen nach τ mit einem Strich und den Integranden mit $F(q_k, q_k', \tau)$,

$$F=\sqrt{E-U}\sqrt{\sum_{kl}a_{kl}\,q_k'\,q_l'}\,, \tag{4}$$

so sind die Gleichungen der Bahnkurve nach den Regeln der Variationsrechnung

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k'}\right)-\frac{\partial F}{\partial q_k}=0\,. \tag{5}$$

[1]) E. Schenkl, Wiener Ber. (IIa) Bd. 122, S. 721. 1913.

Von dem Jacobischen Prinzip kommt man leicht zu einer Integralform des Hertzschen Prinzips der gradesten Bahn. Wählt man nämlich als Parameter die in Ziff. 17 definierte Bogenlänge [vgl. (1) mit Ziff. 17, Gleichung (9)]

$$ds = \sqrt{\sum_{kl} a_{kl}\, dq_k\, dq_l},$$

so geht (5) in

$$\Delta \int_{s_1}^{s_2} (E - U)\, ds = 0 \tag{6}$$

über. Sind insbesondere keine äußeren Kräfte vorhanden, so wird also

$$U = 0, \qquad E = \text{konst.},$$

und (6) reduziert sich auf

$$\Delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0,$$

d. h. die Länge der Bahn zwischen den Anfangs- und Endpunkten ist für die wahre Bahn ein Extremum, und zwar, wie sich auch zeigen läßt, für genügend kleinen Abstand sogar ein wirkliches Minimum. Das Extremum ist dabei natürlich unter allen den Bahnkurven zu suchen, die mit den kinematischen Nebenbedingungen verträglich sind, z. B. also bei der Bindung eines Massenpunktes an eine Fläche alle Kurven, die auf dieser Fläche liegen. Damit kommen wir genau auf das Hertzsche Prinzip der geradesten Bahn zurück, denn nach bekannten Sätzen der Geometrie sind die kürzesten Linien eben die geodätischen Linien, die gleichzeitig auch die Eigenschaft haben, Kurven kleinster Krümmung zu sein, also geradeste Bahnen im Sinne von Hertz sind.

27. Ableitung der Bewegungsgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip. Wenn wir auch allgemein gezeigt haben, daß die Integralprinzipe mit dem d'Alembertschen Prinzip äquivalent sind und daher mit den Bewegungsgleichungen verträglich sein müssen, so bleibt uns noch der umgekehrte Schritt zu tun, nämlich wieder die Bewegungsgleichungen aus den Integralprinzipen auch für die allgemeinsten Fälle herzuleiten und somit diese eigentlich erst fruchtbar zu machen. Wir beschränken uns dabei auf das Hamiltonsche Prinzip als das allgemeinste und einfachste.

Für den Fall des Vorhandenseins eines kinetischen Potentials war diese Aufgabe bereits in Ziff. 22 durch Heranziehung der Regeln der Variationsrechnungen gelöst, jedoch noch nicht unter allgemeineren Voraussetzungen. Das Prinzip lautete in seiner allgemeinsten Fassung (5), Ziff. 25

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)\, dt = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\, \delta q_k \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}. \tag{1}$$

Der Ausdruck von δA ist als bekannt anzusehen:

$$\delta A = \sum_k Q_k\, \delta q_k.$$

Es handelt sich also nur darum, auch für δT eine entsprechende Form zu finden, nämlich einen linearen homogenen Ausdruck $\sum_k P_k \delta q_k$ in den δq_k, damit man aus der Willkür der δq_k Schlüsse ziehen kann.

Zunächst ist

$$\delta T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta \dot q_k + \sum_k \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k ,$$

also

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta \dot q_k + \sum_k \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_k Q_k \delta q_k\Big\}\,dt = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k \Big|_{t=t_0}^{t=t_1}. \qquad (2)$$

Haben wir nun ein holonomes System, so kann das erste Glied durch partielle Integration umgeformt werden, da für diese die Operationen δ und d/dt vertauschbar sind. Man erhält so

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta \dot q_k\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\frac{d\,\delta q_k}{dt}\,dt = \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\delta q_k\Big|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\Big)\delta q_k\,dt . \qquad (3)$$

Setzen wir dies in (2) ein, so heben sich ohne irgendwelche Beschränkung der δq_k an den Integrationsgrenzen die integralfreien Glieder fort, und man bekommt

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_k\Big[\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\Big) + Q_k\Big]\delta q_k\Big\}\,dt = 0 . \qquad (4)$$

Da nun die δq_k ganz beliebige Größen sind, und diese Beziehung auch für beliebige Wahl des Integrationsintervalls gilt, so müssen die eckigen Klammern jede für sich verschwinden, also

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0 \qquad (5)$$

sein. Das sind aber gerade die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art.

Für nichtholonome Systeme reicht diese Betrachtung nicht aus, sondern man muß noch die Nebenbedingungen mitführen. Die q_k seien also nicht mehr freie Koordinaten, sondern noch den kinematischen Nebenbedingungen

$$\sum_k a_{rk}\dot q_k + a_r = 0 \qquad (6)$$

unterworfen, die virtuellen Verrückungen δq_k also den Bedingungen

$$\sum_k a_{rk}\,\delta q_k = 0 . \qquad (6a)$$

Diese Bedingungen dürfen natürlich auch holonom, also die Differentialformen (6) integrabel sein, brauchen es aber nicht; die q_k sollen aber auf alle Fälle wahre Koordinaten sein. Dann bleibt (4) noch richtig, nur daß dann die δq_k nicht mehr frei sind und daher auch nicht mehr aus (4) auf (5) geschlossen werden kann, sondern nur auf

$$\sum_k\Big\{\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k\Big\}\delta q_k = 0 . \qquad (7)$$

Man kann die Nebenbedingungen (6a) jetzt berücksichtigen, indem man sie in bekannter Weise mit unbestimmten Faktoren λ_r multipliziert, zu (7) hinzufügt, und dann die δq_k wie frei behandelt. Damit ergibt sich an Stelle von (7)

$$\sum_k\Big\{\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k + \sum_r \lambda_r a_{rk}\Big\}\delta q_k = 0 ,$$

womit auch (4) erfüllt ist, da sich nach (6a) die λ-Glieder gegenseitig zerstören. Es folgen also nun nach der Schlußweise der Ziff. 5 die Lagrangeschen Gleichungen mit Nebenbedingungen (2) von Ziff. 12

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k + \sum_r \lambda_r a_{rk} = 0,$$

zu denen noch die kinematischen Bedingungen (6) für die $\dot q_k$ hinzuzunehmen sind, womit man dann genügend viele Bestimmungsgleichungen auch für die λ_r erhält.

Das wesentliche an dieser Betrachtung ist, daß von den Nebenbedingungen erst nach der Variation Gebrauch gemacht werden darf. Dies beruht auf der Feststellung von Ziff. 20, wonach die verglichenen Nachbarbahnen für nichtholonome Systeme nicht selbst den Bedingungsgleichungen genügen können, also keine kinematisch möglichen Bahnen darstellen. Würde man hingegen die Nebenbedingungen wie in der Variationsrechnung bereits vorher mitführen, so würde man den Bereich der zur Konkurrenz gehenden Bahnen in unzulässiger Weise beschränken, und das Hamiltonsche Prinzip wäre nicht mehr richtig, da es auf diese Weise, wie man leicht sieht, die falschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} + \sum_r \lambda_r a_{rk}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(T + \sum_r \lambda_r a_{rk} \dot q_k\right) - Q_k = 0$$

liefern würde.

Man kann auch direkt die Quasikoordinaten von Ziff. 13 in das Hamiltonsche Prinzip einführen[1]), wobei man nur beachten muß, daß für diese die Vertauschung von Variation und Differentiation nicht mehr zulässig ist. Sie seien durch die nichtintegrablen Beziehungen (s. Ziff. 13)

$$dq_k = \sum_\varrho \beta_{k\varrho}\, d\pi_\varrho, \qquad \text{also} \qquad \delta q_k = \sum \beta_{k\varrho}\, \delta \pi_\varrho$$

mit den wahren Koordinaten verbunden. In ihnen wird

$$\delta A = \sum_\varrho \Pi_\varrho\, \delta \pi_\varrho,$$

ferner, wenn wir wieder die kinetische Energie als Funktion der $\dot\pi_\varrho$ mit $\mathfrak{T}$ bezeichnen,

$$\delta \mathfrak{T} = \sum_\varrho \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot\pi_\varrho}\, \delta \dot\pi_\varrho + \sum_\varrho \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \pi_\varrho}\, \delta \pi_\varrho,$$

wo allerdings

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \pi_\varrho} = \sum_k \beta_{k\varrho} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q_k}$$

nur als symbolische Abkürzung eingeführt ist, da ja die π_ϱ selbst keine Bedeutung besitzen. Der Ausdruck des Hamiltonschen Prinzips wird also genau wie (2)

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{\sum_\varrho \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot\pi_\varrho}\, \delta \dot\pi_\varrho + \sum_\varrho \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \pi_\varrho}\, \delta \pi_\varrho + \sum_\varrho \Pi_\varrho\right) \delta \pi_\varrho\right\} dt = \sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot\pi_\varrho}\, \delta \pi_\varrho \Big|_{t=t_0}^{t=t_1}. \qquad (8)$$

Um das erste Glied umzuformen, bedienen wir uns jetzt der Vertauschungsrelation (2) von Ziff. 20

$$\delta \dot\pi_\varrho = \frac{d}{dt}\, \delta \pi_\varrho - \sum_{\sigma\tau} \gamma_{\sigma\varrho\tau}\, \dot\pi_\sigma\, \delta \pi_\tau.$$

[1]) Cl. Schaefer, Phys. ZS. Bd. 19, S. 406. 1918.

Hiermit wird

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\varrho} \delta \dot{\pi}_\varrho \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\varrho} \frac{d\,\delta \pi_\varrho}{dt} - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\varrho} \sum_{\sigma\tau} \gamma_{\varrho\sigma\tau} \dot{\pi}_\sigma \delta \pi_\tau \right) dt .$$

Der erste Term rechts läßt sich wieder durch partielle Integration umformen und liefert

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\varrho} \frac{d\,\delta \pi_\varrho}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\varrho} \delta \pi_\varrho \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\varrho} \right) \delta \pi_\varrho \, dt .$$

Setzt man alles in (8) ein, so erhält man durch Zusammenfassen aller Glieder mit demselben $\delta \pi_\varrho$ schließlich unter entsprechender Umbezeichnung der Summationszeiger

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_\varrho \left[\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \pi_\varrho} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\varrho} \right) - \sum_{\sigma\tau} \gamma_{\tau\sigma\varrho} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\sigma} \dot{\pi}_\tau + \Pi_\varrho \right] \delta \pi_\varrho \right\} dt = 0 ,$$

und damit, da wieder die eckigen Klammern wegen der Willkür der $\delta \pi_\varrho$ für sich verschwinden müssen und nach der Definition (6) von Ziff. 13 $\gamma_{\tau\sigma\varrho} = -\gamma_{\varrho\sigma\tau}$ ist, die verallgemeinerten Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art (8) von Ziff. 13

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\varrho} \right) - \sum_{\sigma\tau} \gamma_{\varrho\sigma\tau} \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\pi}_\tau} \dot{\pi}_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \pi_\varrho} - \Pi_\varrho = 0 .$$

Damit sind also die Bewegungsgleichungen vollständig aus dem Hamiltonschen Prinzip abgeleitet.

Man kann diese Ableitungen natürlich auch im umgekehrten Sinne durchlaufen und so direkt von den Lagrangeschen Gleichungen auf das Hamiltonsche Prinzip schließen.

Kapitel 3.

Die Hamilton-Jacobische Theorie der Dynamik.

Von

L. Nordheim, Göttingen und E. Fues, Stuttgart.

1. Allgemeine Fragestellung. Im vorigen Kapitel sind die Prinzipe der Mechanik in ihrer allgemeinsten Form sowie die aus ihnen entspringenden Bewegungsgleichungen aufgestellt und diskutiert worden. Hiernach ist die nächste naturgemäße Frage, wie die wirkliche Integration dieser Gleichungen vorzunehmen ist, und ob im besonderen nicht schon aus ihrem Charakter als Differentialgleichungen der Mechanik sich wesentliche Schlüsse ziehen lassen. Dies ist in der Tat in weitgehendem Maße der Fall, zumal bei den Problemen, für die ein kinetisches Potential existiert (vgl. Kap. 2, Ziff. 10).

Für diese ist die Integrationstheorie in der Hauptsache von Jacobi[1]) und Hamilton[2]) systematisch entwickelt worden. Sie ist von größter Bedeutung einerseits für die Himmelsmechanik und andererseits für diejenige der Atome; da es für beide, wenigstens solange man von den Gezeiten- bzw. Reaktionskräften der Ausstrahlung absehen kann, weder Bindungen noch nichtkonservative Kräfte gibt.

Ihr Aufbau vollzieht sich in drei Schritten. Erstens wird man versuchen, eine möglichst einfache Form für die Differentialgleichungen zu erhalten. Dies führt zu den kanonischen Gleichungen der Mechanik. Zweitens kann man nach den allgemeinen Gesetzen der Transformationen dieser Differentialgleichungen fragen, bei denen sie ihre Gestalt beibehalten. Dies führt zu den kanonischen Transformationen und der Theorie ihrer wichtigsten Invarianten. Drittens ist noch die eigentliche Integrationstheorie der kanonischen Gleichungssysteme darzustellen, die in der Aufstellung und Integration der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung besteht.

Die oben schon eingeführte Beschränkung auf Systeme mit einem kinetischen Potential ist dieselbe, die das Hamiltonsche Prinzip zu einem eigentlichen Variationsprinzip macht. Daher gewährt die Anwendung der Methoden der Variationsrechnung eine sehr große Erleichterung, und auch die tiefere Bedeutung des eigenartigen Hamilton-Jacobischen Integrationsverfahrens wird erst durch sie aufgedeckt, worauf wir am Schluß zurückkommen[3]).

[1]) C. G. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Werke Supplementband, 2. Aufl., Berlin 1884.

[2]) W. R. Hamilton, Brit. Ass. Rep. 1834, S. 513; Phil. Trans. 1835, S. 95.

[3]) Die nachfolgende Darstellung schließt sich in vielen Zügen, insbesondere der Verwendung der Variationsrechnung, an die an, welche der eine von uns (Nordheim) in Vorlesungen von Hilbert gehört hat. Auch an dieser Stelle möchten wir Herrn Geh.-Rat Hilbert für die freundliche Erlaubnis ihrer Benutzung herzlich danken.

Als moderne Darstellung sei vor allem das Buch von WHITTAKER[1]) genannt. Die erste systematische Entwicklung, die auch sachlich von fundamentaler Bedeutung war, gab JACOBI[2]) in seiner berühmten Vorlesung über Dynamik. Viele wichtige Zusammenhänge, besonders hinsichtlich der Theorie der kanonischen Transformationen enthalten auch die Untersuchungen von LIE[3]).

Unser Ausgangspunkt ist das Hamiltonsche Prinzip. Wir nehmen also an, daß ein kinetisches Potential (vgl. Kap. 2, Ziff. 10) existiere, welches eine Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ ist, und es sollen die Bewegungen des Systems dem Hamiltonschen Prinzip (s. Kap. 2, Ziff. 22)

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q_k, \dot{q}_k, t)\, dt = \text{Extremum} \tag{1}$$

genügen. Sie lauten nach den Regeln der Variationsrechnung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots f) \tag{2}$$

L kann dabei von möglichst allgemeiner Gestalt sein, also auch die Zeit t mit enthalten, ebenso sind auch Kräfte zugelassen, die von den Geschwindigkeiten im Sinne von Kapitel 2, Ziff. 10 abhängen. Für ein einzelnes Elektron z. B. ist die Lagrangefunktion im allgemeinsten Fall, d. h. unter Berücksichtigung der speziellen Relativitätstheorie und unter Einfluß beliebiger elektrischer und magnetischer Felder, die aus den Potentialen φ und $\mathfrak{A}$ entspringen

$$L = m_0 c^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\mathfrak{v} - e\varphi. \tag{3}$$

Den Ausdruck links in (2) nennt man Variationsableitung von L nach q_k. Wir wollen ihn zur Abkürzung mit $[L]_{q_k}$ bezeichnen:

$$[L]_{q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k}. \tag{4}$$

2. Reduktion des Problems auf die kanonische Form. Wir nehmen zunächst den ersten Schritt vor und suchen für das Variationsproblem neue einfachere Formen. In Formel (1) von Ziff. 1 ist L eine Funktion der q_k, $\dot{q}_k$ und evtl. noch von t. Offenbar erhielte man ein in gewisser Hinsicht einfacheres Problem, wenn man die Ableitungen $\dot{q}_k$ eliminieren könnte. Zu diesem Zweck führen wir die $\dot{q}_k$ einfach als neue, unabhängig zu variierende Variable ein, indem wir

$$\dot{q}_k - h_k = 0 \tag{1}$$

setzen. Das Variationsproblem lautet dann

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q_k, h_k, t)\, dt = \text{Extremum}, \tag{2}$$

wobei jetzt allerdings die Gleichungen (1) als Nebenbedingungen hinzuzufügen sind. Wir haben also jetzt ein Variationsproblem mit $2f$ Unbekannten und f Nebenbedingungen.

---

[1]) E. T. A. WHITTAKER, Analytical Dynamics, 2. Aufl., Cambridge 1917. Deutsche Übersetzung von F. u. K. MITTELSTEN-SCHEID, Berlin: Julius Springer 1924.

[2]) Siehe Anm. 1 von S. 91.

[3]) S. LIE, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I—III, Leipzig 1888—1890, insbesondere Bd. II.

Letztere lassen sich in bekannter Weise mit der Lagrangeschen Faktorenmethode behandeln[1]). Man multipliziert sie mit noch zu bestimmenden Faktoren λ_k und behandelt das absolute Variationsproblem mit jetzt $3f$ Unbekannten:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{L+\sum_k \lambda_k(\dot q_k - h_k)\right\}dt = \text{Extremum}. \tag{3}$$

Hier kann man die λ_k aus der Forderung bestimmen, daß die Variationsableitungen nach den neuen Variabeln h_l

$$\left[L+\sum_k\lambda_k(\dot q_k-h_k)\right]_{h_l}=0$$

verschwinden müssen. Da nämlich in der Klammer die $\dot h_l$ nicht vorkommen, so reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$\frac{\partial L}{\partial h_l}-\lambda_l=0;\qquad \lambda_l=\frac{\partial L}{\partial h_l}.$$

Damit sind die λ_k bestimmt. Man kann ihren Wert einsetzen und erhält damit ein freies Variationsproblem mit $2f$ unbekannten Funktionen

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{L(q_k,h_k,t)+\sum_k\frac{\partial L}{\partial h_k}(\dot q_k-h_k)\right\}dt=\text{Extremum}. \tag{4}$$

Hierbei ist das Extremum unter allen Funktionen $q_k(t)$ und $h_k(t)$ zu wählen, wobei aber den h_k keine Randbedingungen vorgeschrieben werden dürfen, da ihre Ableitungen nicht in das Integral eingehen und auch (1) von Ziff. 1 keine Bedingungen für die $\dot q_k$ enthält. Daß die Forderung (4) tatsächlich völlig äquivalent mit (1) von Ziff. 1 ist, ersieht man wie folgt. Die Bedingungen für die gesuchten Funktionen lauten

$$\left[L+\sum_k\frac{\partial L}{\partial h_k}(\dot q_k-h_k)\right]_{q_k}=0,$$

$$\left[L+\sum_k\frac{\partial L}{\partial h_k}(\dot q_k-h_k)\right]_{h_k}=-\frac{\partial\left\{L+\sum_k\frac{\partial L}{\partial h_k}(\dot q_k-h_k)\right\}}{\partial h_k}=-\frac{\partial^2 L}{\partial h_k^2}(\dot q_k-h_k)=0.$$

Hier besagt die zweite Zeile nichts anderes, als daß, abgesehen von den hier auszuschließenden singulären Fällen $\partial^2 L/\partial h_k^2=0$, eben $\dot q_k=h_k$ sein muß. Setzen wir dies in die erste Zeile ein, so kommen wir auf die ursprüngliche Form (1) von Ziff. 1 zurück.

Dieser Äquivalenzbeweis ist nötig, da an sich (3) bzw. (4) keineswegs völlig mit (1) von Ziff. 1 übereinstimmt. Denn in (1) von Ziff. 1 ist das Extremum unter allen Größen zu suchen, die durch Einsetzen aller beliebigen Funktionen $q_k(t)$ in L entstehen. Die $\dot q_k$ sind dabei natürlich mit bestimmt. In (3) dagegen sind auch noch die h_k als willkürliche Funktionen zu nehmen. Dementsprechend ist der Bereich, aus dem das Extremum gesucht werden muß, ein viel weiterer. Tatsächlich läßt sich auch zeigen, daß, falls die wirkliche Bahnkurve das Integral (1) von Ziff. 1 zu einem wahren Minimum macht, dies bei (4) gar nicht der

[1]) Bei dem jetzigen Problem sollen natürlich auch die Nachbarkurven den Nebenbedingungen (1) genügen. Man hat von ihnen daher bereits vor der Variation Gebrauch zu machen im Gegensatz zu den gewöhnlichen nichtholonomen Nebenbedingungen, bei denen die Nachbarkurven nicht den Nebenbedingungen genügen, wie in Kap. 2, Ziff. 20 und 27 ausgeführt.

Fall sein kann, sondern daß dann dieses Integral einen Sattelwert annimmt, derart, daß es bei zunächst festgehaltenen, doch beliebig gewählten $q_k(t)$ zu einem Maximum hinsichtlich der $h_k(t)$ zu machen ist und erst nach dieser Bestimmung die $q_k(t)$ so zu wählen sind, daß dann das Integral hinsichtlich ihrer Variationen zu einem Minimum wird. Dies ist von Hilbert in seinen Vorlesungen gezeigt worden.

Für die Zwecke der Mechanik ist jedoch der Charakter des Extremums, d. h. ob Maximum, Minimum oder (wie hier) Sattelwert, ganz gleichgültig. Es kommt allein darauf an, daß die Variationsableitungen für die verschiedenen Formen des Variationsproblems identisch werden, und damit die Kurven, die das Integral zu einem Extremum machen, d. h. eben die gesuchten Bahnkurven. Deshalb sei hier auch nicht weiter darauf eingegangen, sondern nur bemerkt, daß für genügend kleine Bereiche das Hamiltonsche Integral (2) für die wahre Bewegung zu einem wirklichen Minimum wird[1]).

Die Form (4) wird uns später beschäftigen. Hier gehen wir erst noch einen Schritt weiter, indem wir an Stelle der h_k als neue Unbekannte die **verallgemeinerten Impulse** (s. Kap. 2, Ziff. 11)

$$p_k = \frac{\partial L(q_l, h_l)}{\partial h_k} = \frac{\partial L(q_l, \dot{q}_l)}{\partial \dot{q}_k} \tag{5}$$

einführen. Mittels (5) werden die h_k Funktionen der p_k, q_k und evtl. von t, und (4) erhält die Form

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big\{\sum_k p_k \dot{q}_k - H(p_k, q_k, t)\Big\} dt = \text{Extremum}, \tag{6}$$

wobei

$$H = -L + \sum_k h_k \frac{\partial L}{\partial h_k} \equiv -L + \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{7}$$

die sog. **Hamiltonsche Funktion** bedeutet. Dabei sind in H die h_k durch die p_k, q_k, t ausgedrückt zu denken. Die Gleichung (6) hat nun die einfachste Form, die ein absolutes Variationsproblem annehmen kann, indem nur die Ableitungen der einen Reihe von Variablen auftreten, und auch diese nur linear und mit den anderen Variablen selbst multipliziert. Es wird deshalb auch **kanonisch** genannt. Dementsprechend nennt man die q_k und p_k auch **kanonische Variable** und insbesondere die p_k die zu den q_k **kanonisch konjugierten Impulse**. Ein Äquivalenzbeweis von (4) mit (6) ist hier natürlich nicht mehr nötig, da (6) durch eine direkte Transformation aus (4) hervorgeht.

Von den Variablen p_k, q_k kommt man übrigens leicht wieder zu den Variablen h_k (bzw. $\dot{q}_k$), q_k zurück. Hierzu differenzieren wir H partiell nach den p_k

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}\Big(-L + \sum_l h_l p_l\Big) = -\sum_l \frac{\partial L}{\partial h_l}\frac{\partial h_l}{\partial p_k} + \sum_l \frac{\partial h_l}{\partial p_k} p_l + h_k = h_k. \tag{8a}$$

Hieraus folgt weiter

$$\left.\begin{aligned} H &= -L + \sum_k h_k p_k = -L + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} p_k, \\ L &= -H + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} p_k. \end{aligned}\right\} \tag{8b}$$

---

[1]) Siehe z. B. das in Anm. 1 von S. 92 zitierte Buch von Whittaker, Analytische Dynamik, S. 265.

Es ist also der Übergang von L zu H von derselben Form wie der umgekehrte von H zu L. Man bezeichnet ihn als Legendresche Transformation, die auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik und Physik eine Rolle spielt. So vermittelt sie z. B. in der Thermodynamik den Übergang zwischen den verschiedenen thermodynamischen Potentialen.

In den neuen Variablen erhalten die Differentialgleichungen des Variationsproblems, d. h. die Bewegungsgleichungen des Systems, eine besonders einfache Gestalt. Sie lauten zunächst

$$\Big[\sum_l p_l\dot{q}_l - H\Big]_{p_k} = 0\,,$$
$$\Big[\sum_l p_l\dot{q}_l - H\Big]_{q_k} = 0$$

und reduzieren sich, wie man sofort sieht, auf

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_k}\,,\\ \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}\,.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Dies sind die sog. kanonischen Gleichungen der Mechanik, die den Ausgangspunkt für die meisten Untersuchungen der höheren Dynamik bilden. An Stelle des Systems 2. Ordnung der f Lagrangeschen Differentialgleichungen (2) von Ziff. 1 für die q_k bilden sie ein System 1. Ordnung von $2f$ Differentialgleichungen für die q_k und p_k. Sie sind nach ihrer Ableitung jedoch völlig äquivalent mit den ersteren.

Man kann die Transformation der Differentialgleichungen eines mechanischen Systems auf die kanonische Form auch dann noch ausführen, wenn noch nicht alle Nebenbedingungen eliminiert sind, sondern einige getrennt mitgeführt werden. Sind diese Nebenbedingungen

$$\varphi_r(q_k, t) = 0\,,$$

so lauten die entsprechenden Hamiltonschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}\,,\\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_k}\,.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Sind die Bedingungen von der nichtholonomen Form

$$\sum_r a_{rk}\,\delta q_k = 0\,,$$

so tritt an Stelle der zweiten Reihe in (10)

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum_r \lambda_r a_{rk}\,. \tag{10a}$$

Doch bringt die Verwendung dieser Gleichungen kaum Vorteile, da ihre Symmetrie verlorengegangen ist[1]).

---

[1]) Siehe hierzu T. Pöschl, C. R. Bd. 156, S. 1829. 1913; S. Dautheville, S. M. T. Bull. Bd. 37, S. 120. 1909.

Wir fragen nun nach der mechanischen Bedeutung der Größe H. Ist, wie in der Regel, die kinetische Energie T eine homogene quadratische Funktion der $\dot{q}_k$, so gilt nach dem Eulerschen Satz für homogene Funktionen

$$T = \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k. \tag{11}$$

Es wird also, da voraussetzungsgemäß $L = T - U$ sein soll,

$$\sum p_k \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T,$$

falls die potentielle Energie V nicht von den Geschwindigkeiten abhängt. Demnach ist unter den genannten Einschränkungen

$$H = -L + \sum_k p_k \dot{q}_k = -T + U + 2T = T + U \tag{12}$$

die gesamte Energie des Systems.

Das Rezept für die Aufstellung der kanonischen Gleichungen ist also denkbar einfach. Man braucht nur die Energie als Funktion der Koordinaten und Impulse zu kennen, um sie sofort hinschreiben zu können. Nach (12) ist allerdings zu beachten, daß diese einfache mechanische Bedeutung von H nur unter der Voraussetzung (11) gilt. Für andere Fälle, z. B. bei der Bezugnahme auf ein rotierendes Koordinatensystem, ist H keineswegs mehr die Energie, und man muß zur Bestimmung der Hamiltonschen Funktion auf Gleichung (7) zurückgehen[1]).

Ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen erhält man sofort, wenn die Hamiltonsche Funktion die Zeit nicht explizit enthält. Multipliziert man die kanonischen Gleichungen (9) bezüglich mit $\dot{q}_k$ bzw. $\dot{p}_k$, so folgt aus ihnen

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k = \sum_k \dot{q}_k \dot{p}_k - \sum_k \dot{p}_k \dot{q}_k = 0. \tag{13}$$

$$H = \text{konst.} = W$$

ist also ein Integral der kanonischen Gleichungen. In dem oben genannten einfachsten Fall ist dies nichts anderes als der Energiesatz.

Enthält ferner die Hamiltonsche Funktion eine Koordinate, z. B. q_1 nicht explizit, so folgt sofort

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0, \qquad p_1 = \text{konst.} \tag{14}$$

Wir haben also wieder ein Integral der kanonischen Gleichungen. Auf solche Weise folgt z. B. der Flächensatz $p_\varphi = $ konst. bei der Keplerbewegung, deren Hamiltonsche Funktion sich in ebenen Polarkoordinaten r, φ

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{a}{r}. \tag{15}$$

schreibt. Wohl im Anschluß an dieses Beispiel, in welchem φ die Bedeutung des Azimuts in der Bahnebene hat, nennt man solche Koordinaten, von denen die Hamiltonsche Funktion unabhängig ist, zyklische Variable. Dieser Fall tritt immer ein, wenn die Energie von dem zufälligen Wert einer Koordinate nicht ab-

[1]) Über die Hamiltonsche Funktion und Integrationstheorie in der relativistischen Mechanik siehe Kap. 10 ds. Bd. ds. Handb. Ferner J. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik Kap. 10, S. 330ff. Berlin 1926.

hängt, also z. B. sich bei einer Translation oder Rotation des ganzen Systems nicht ändert. Man erhält so für freie Systeme z. B. ohne weiteres die Schwerpunkt und Flächensätze. Hierauf kommen wir in Ziff. 9 und 11 von allgemeinerem Standpunkt aus zurück. (Vgl. auch Ziff. 11 des vorangegangenen Kap. 2.)

3. **Kanonische Transformationen.** Wir gehen jetzt zu unserer zweiten Frage über und untersuchen, was für Transformationen der Variablen unter Erhaltung der kanonischen Form der Bewegungsgleichungen vorgenommen werden können. Wir suchen also Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} q_l &= q_l(Q_k, P_k, t), \\ p_l &= p_l(Q_k, P_k, t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

die das Variationsproblem (6), Ziff. 2, in ein äquivalentes mit einer neuen Hamiltonschen Funktion K

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_k P_k\dot{Q}_k - K(P_k, Q_k, t)\Big\}\,dt = \text{Extremum} \tag{2}$$

überführen. Dabei ist nicht verlangt, daß die beiden Integrale selbst identisch werden, sondern nur, daß sie gleichzeitig ihr Extremum annehmen; d. h. wenn das Integral (6) von Ziff. 2 für die Funktionen $q_k(t)$, $p_k(t)$ seinen Extremalwert annimmt, so soll es das Integral (2) für diejenigen Funktionen $Q_k(t), P_k(t)$, auch tun, die aus den q_k und p_k vermöge der zu (1) inversen Substitution hervorgehen.

Dies ist dann und nur dann gewährleistet, wenn sich die beiden Integranden lediglich um die vollständige Ableitung einer sonst beliebigen Funktion $\Phi(Q_k, P_k, t)$ nach t unterscheiden. Für eine solche wird ja das Integral vom Wege unabhängig und liefert auf alle Fälle bei festgehaltenen Integrationsgrenzen einen konstanten Beitrag, der das Eintreten eines Extremums in keiner Weise beeinflußt. Die Bedingung, welche die Q_k und P_k erfüllen müssen, lautet also

$$\sum_k p_k\dot{q}_k - H = \sum P_k\dot{Q}_k - K + \frac{d\Phi}{dt}(P, Q, t). \tag{3}$$

Diese Bedingung muß natürlich auch für alle nichtmechanischen, variierten Integrationswege im p, q, t-Raum gelten. Da nun zwischen den q_k keine kinematischen Bedingungen bestehen sollen, so kann man für (3) auch deutlicher

$$\sum_k p_k\Delta q_k - H\Delta t = \sum_k P_k\Delta Q_k - K\Delta t + \Delta\Phi \tag{4}$$

schreiben, welche Beziehung für ganz beliebige Wahl der Differentiale $\Delta q_k, \Delta Q_k, \Delta t$ erfüllt sein muß. Hierbei ist $\Delta\Phi$ durch

$$\Delta\Phi = \sum_k \frac{\partial\Phi}{\partial Q_k}\Delta Q_k + \sum_k \frac{\partial\Phi}{\partial P_k}\Delta P_k + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Delta t$$

erklärt, wobei aber die ΔP_k bereits durch die Δq_k, ΔQ_k, Δt festgelegt sind, da (bei einem bestimmten Δt) offenbar zwischen den $4f$ Differentialen Δq_k, Δp_k, ΔQ_k, ΔP_k stets die $2f$ Beziehungen

$$\begin{aligned} \Delta q_k &= \sum_l \frac{\partial q_k}{\partial Q_l}\Delta Q_l + \sum_l \frac{\partial q_k}{\partial P_l}\Delta P_l + \frac{\partial q_k}{\partial t}\Delta t, \\ \Delta p_k &= \sum_l \frac{\partial p_k}{\partial Q_l}\Delta Q_l + \sum_l \frac{\partial p_k}{\partial P_l}\Delta P_l + \frac{\partial p_k}{\partial t}\Delta t \end{aligned}$$

bestehen. Die Funktionaldeterminante der Transformation (1) nehmen wir natürlich hier als $\neq 0$ an.

Um aus (4) wirkliche Bedingungen für die Transformationsgleichungen (1) zu gewinnen, führen wir in Φ an Stelle der P_k die q_k ein, indem wir die Beziehungen

$$q_k = q_k(P_l, Q_l, t)$$

nach den P_k aufgelöst denken:

$$P_k = P_k(q_l, Q_l, t).$$

Wir nehmen an, daß diese Auflösung möglich sei. Φ geht dabei in eine Funktion $V(q_k, Q_k, t)$ über. Dann wird aus (4)

$$\sum_k p_k \Delta q_k - H(p_k, q_k, t)\Delta t = \sum_k P_k \Delta Q_k - K(P_k, Q_k, t)\Delta t + \Delta V(q_k, Q_k, t) \quad (4a)$$

mit

$$\Delta V = \sum_k \frac{\partial V}{\partial q_k}\Delta q_k + \sum_k \frac{\partial V}{\partial Q_k}\Delta Q_k + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t.$$

Damit Gleichung (4a) identisch erfüllt ist, müssen die Faktoren der Δq_k, ΔQ_k, Δt auf beiden Seiten gleich sein:

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial V}{\partial q_k}, \\ P_k &= -\frac{\partial V}{\partial Q_k}, \\ K &= H + \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Da man aus den Gleichungen der zweiten Zeile im allgemeinen die q_k, aus denen der ersten Zeile dann die p_k als Funktionen der P_k, Q_k ausrechnen kann, so geben die Gleichungen (5) bei beliebiger Wahl der Funktion $V(q_k, Q_k, t)$ stets eine kanonische Transformation, wobei die neue Hamiltonsche Funktion K durch die dritte Zeile geliefert wird. Die Funktion V heißt die Erzeugende der Transformation. Die neuen kanonischen Gleichungen lauten

$$\frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \qquad \frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}; \qquad K = H + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Enthält insbesondere V die Zeit nicht explizit, so wird einfach

$$K = H.$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß die kanonischen Transformationen unabhängig von den speziellen mechanischen Problemen sind. Die Eigenschaft einer Transformation, kanonisch zu sein, hängt also gar nicht von der Natur des betrachteten Problems ab, sondern ist ihr selbst eigentümlich.

Wir haben oben in der Erzeugenden V die Variabeln q_k, Q_k bevorzugt. Ebenso könnten wir irgend f der Variablen q_k, p_k und f der Q_k, P_k nehmen. Das allgemeinste Resultat läßt sich dann wie folgt aussprechen[1]): Sei $V(x_k, X_k, t)$ eine willkürliche Funktion der $2f+1$ Variablen x_k, X_k, t, wobei die x_k, $(k = 1, \ldots f)$ irgendwelche der Variablen q_k, p_k, die X_k irgendwelche der Q_k, P_k sind, so ist

$$\left.\begin{aligned} y_k &= \pm\frac{\partial V}{\partial x_k}, \\ Y_k &= \mp\frac{\partial V}{\partial X_k}, \\ K &= H + \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

[1]) Siehe M. Born, Vorlesungen über Atommechanik, S. 35. Berlin 1925; vgl. außerdem die Einleitung im folgenden Kap. 4, Ziff. 3, ds. Bd. des Handbuchs.

eine kanonische Transformation. Dabei ist y_k zu x_k, Y_k zu X_k konjugiert, und es gilt das obere Zeichen, wenn nach einer Koordinate, das untere, wenn nach einem Impuls differenziert wird. Sehr häufig braucht man z. B. die kanonische Transformation in der Form

$$\left.\begin{aligned} V &= V(q_k, P_k, t), \\ p_k &= +\frac{\partial V}{\partial q_k}, \\ Q_k &= +\frac{\partial V}{\partial P_k}. \end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Eine jede Transformation der Lagekoordinaten allein

$$q_k = q_k(Q_l, t),$$

die als **Punkttransformation** bezeichnet wird, da sie jeden Punkt im Lagenraum der q_k wieder in einen solchen überführt, ist auch kanonisch. Man braucht als Transformationsfunktion nur

$$V = -\sum q_k(Q_l)\, p_k \tag{7}$$

zu nehmen, dann wird nach (6)

$$q_k = -\frac{\partial V}{\partial p_k} = q_k(Q_l).$$

Die identische Transformation ist mit

$$V = -\sum_k Q_k p_k \tag{8}$$

darin enthalten.

Darüber hinaus gestattet die Theorie der kanonischen Transformationen die Einführung allgemeinerer dynamischer Koordinaten in so außerordentlich freier Weise, daß ihre Wahl jedem Problem aufs genaueste angepaßt werden kann. Bei den allgemeinen Transformationen (6) geht natürlich der Charakter der Variablen $Q_k P_k$ als Lage- und Impulskoordinaten verloren. Nur in ihrer Gesamtheit geben sie ein Bild der Lage und des Bewegungszustandes des betrachteten Systems. Wegen ihrer mathematischen Verwandtschaft mit den Berührungstransformationen der Geometrie werden diese Transformationen häufig auch mit dem Namen **Berührungstransformationen** belegt.

Man kann auch noch kanonische Transformationen ausführen, die gewisse Nebenbedingungen erfüllen, wenn letztere sich auf die Form einer Beziehung zwischen den alten und neuen Koordinaten

$$\Omega_r(q_k, Q_k, t) = 0 \tag{9}$$

bringen lassen. Diese können einfach mit Lagrangeschen Multiplikatoren λ_r zu der Identität (4) hinzugefügt werden, und man erhält dann als Bestimmungsgleichungen der entsprechenden kanonischen Transformationen

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \frac{\partial V}{\partial Q_k} + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Omega_r}{\partial Q_k}, \\ p_k &= -\frac{\partial V}{\partial q_k} - \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Omega_r}{\partial q_k}, \\ K &= H + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_r \lambda_r \frac{\partial \Omega_r}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

die zusammen mit den Beziehungen (9) gerade zur Bestimmung der Größen q_k, p_k, λ_r als Funktionen der Q_k, P_k ausreichen. Ein Spezialfall hiervon ist z. B. das Bestehen einer Nebenbedingung

$$\varphi(q_k, t) = 0$$

für die ursprünglichen Koordinaten.

Schließlich hätte man die linke Seite von (3) auch noch mit einem konstanten Faktor λ multiplizieren können, ohne die Eigenschaft der Transformation, kanonisch zu sein, zu zerstören. Das führt z. B. auf Transformationen der Art

$$P_k = p_k, \qquad Q_k = \lambda q_k, \qquad K = \lambda H, \tag{11}$$

die manchmal gebraucht werden. Dagegen ist die in der Geometrie übliche allgemeine Form der Berührungstransformation — λ eine beliebige Funktion der Variabeln — hier nicht anwendbar.

Die kanonischen Transformationen sind, wie gesagt, von der Wahl der speziellen Hamiltonschen Funktion unabhängig. Will man daher nur die Bedingungen für die Transformation der p_k, q_k in die P_k, Q_k selbst haben, so kann man in (4) sich auf die Variationen mit $\Delta t = 0$ beschränken, d. h. t wie einen konstanten Parameter behandeln. Kennzeichnen wir diese Variationen zum Unterschied mit einem δ, so kann man die Bedingungen für kanonische Transformationen auch in der Form

$$\sum_k p_k \delta q_k = \sum_k P_k \delta Q_k + \delta \Phi(P_k, Q_k, t) \tag{12}$$

schreiben, in der gar keine Bezugnahme auf das spezielle mechanische Problem mehr vorkommt. Die Variationen Δ und δ sind dabei bezüglich durch

$$\left.\begin{aligned} \Delta F(p_k, q_k, t) &= \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \Delta q_k + \sum_k \frac{\partial F}{\partial p_k} \Delta p_k + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t, \\ \delta F(p_k, q_k, t) &= \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_k \frac{\partial F}{\partial p_k} \delta p_k \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

erklärt[1]). Gleichung (12) hat dabei für die Charakterisierung der Transformation denselben Grad der Allgemeinheit wie (4), und man braucht die letztere Form nur zur Bestimmung der neuen Hamiltonschen Funktion. Natürlich kann man auch in Φ wie vorhin an Stelle der P die q einführen und die expliziten Transformationsgleichungen (5) mit Hilfe der Funktion $V(q_k, Q_k, t)$ erhalten.

Mit der Einführung der kanonischen Transformationen ist schon der wichtigste Schritt für die Integrationstheorie der mechanischen Gleichungen getan, die in den Ziff. 12ff. dargestellt wird. Zu ihrem Verständnis ist die Kenntnis der Ziff. 4 bis 11, die weitere Ausführungen über die Eigenschaften der kanonischen Transformationen enthalten, nicht unbedingt erforderlich. Diese können daher beim ersten Studium überschlagen werden.

4. Einführung der Zeit als kanonische Veränderliche. Über das kanonische Variationsproblem hinaus kann man zu einer noch symmetrischeren Form des allgemeinen Variationsprinzips der Mechanik gelangen, indem man die Zeit ihrer besonderen Rolle entkleidet. Zunächst kann man formal aus dem Integral in Gleichung (6), Ziff. 2 die dort noch stehengebliebene Hamiltonsche Funktion $H(p, q, t)$ eliminieren, indem man eine Nebenbedingung hinzunimmt und

$$\int\Bigl(\sum_k p_k \dot{q}_k - W\Bigr)\,dt = \text{Extremum} \tag{1}$$

[1]) Die Zeichen Δ und δ sind in Analogie zu den allgemeinen und den virtuellen Verrückungen in Kap. 2, Ziff. 23 gewählt. Der Unterschied ist lediglich, daß jetzt auch die p_k mit variiert werden, da sie auch als Variable im Variationsproblem auftreten.

unter der Nebenbedingung

$$W = H(p, q, t)$$

fordert. Führen wir jetzt an Stelle von t einen neuen Parameter τ ein, $t = t(\tau)$, z. B. die Bogenlänge auf der Bahnkurve oder in der Relativitätstheorie die Eigenzeit, so erhalten wir die Form

$$\int\left\{\sum_k p_k \frac{dq_k}{d\tau} - W\frac{dt}{d\tau}\right\}d\tau = \text{Extremum}, \tag{2}$$

mit

$$W = H(p, q, t)$$

als Nebenbedingung. Diese Form legt nahe, t selbst als eine neue kanonische Variable $\mathfrak{q}$ einzuführen, zu der $\mathfrak{p} = -W$ als Impuls konjugiert ist, womit wir die ganz symmetrische Form erhalten.

$$\int\{\sum p_k q_k' + \mathfrak{p}\mathfrak{q}'\}d\tau = \text{Extremum}, \tag{3}$$

während nebenbei

$$F(p_k, q_k, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}_i) = H + \mathfrak{p} = H - W = 0, \tag{4}$$

Hierbei kennzeichnet der Strich die Ableitung nach τ. Das mechanische System ist dann nicht mehr durch eine Funktion, die Hamiltonsche Funktion, sondern eine Gleichung, nämlich eben

$$F(p_k, q_k, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = H - W = 0 \tag{4}$$

zwischen den $2f + 2$ kanonischen Variablen und Impulsen gekennzeichnet. Diese Form des Variationsproblems kann auch z. B. auf die Relativitätstheorie übertragen werden. Im allgemeinen kann an Stelle von $F = H - W$ eine beliebige Funktion $F(p, q, W, t) = 0$ treten, doch läßt sich durch Auflösung nach W immer die kanonische Form (4) erzwingen.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen werden nach der Multiplikatorenvorschrift von Ziff. 2

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_k}{d\tau} &= +\lambda\frac{\partial F}{\partial p_k}, & \frac{dt}{d\tau} &= +\lambda\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{p}} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial W}, \\ \frac{dp_k}{d\tau} &= -\lambda\frac{\partial F}{\partial q_k}, & \frac{d\mathfrak{p}}{d\tau} &= -\frac{dW}{d\tau} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

die sich für die kanonische Form $F = H - W$ wegen

$$\frac{dt}{d\tau} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial W} = -\lambda\frac{\partial(H-W)}{\partial W} = \lambda$$

auf die gewöhnlichen kanonischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_k}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} &= \frac{\partial(H-W)}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, & \frac{dW}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} &= \frac{\partial(H-W)}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{dp_k}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} &= -\frac{\partial(H-W)}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, & \frac{dt}{d\tau} &= \lambda \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

reduzieren.

Auch die kanonischen Transformationen kann man so verallgemeinern, daß sie die Zeit mit umfassen. Dazu ist die notwendige und hinreichende Bedingung offenbar, daß die Differentialform

$$\sum_k p_k \delta q_k + \mathfrak{p}\,\delta t,$$

bei der noch die Variablen $p_k, q_k, \mathfrak{p}, t$ durch die Nebenbedingung

$$H + \mathfrak{p} = 0 \tag{7}$$

verknüpft sind, in eine Differentialform

$$\sum P_k \Delta Q_k + \mathfrak{P} \Delta T + \Delta \Phi$$

übergehen soll, deren Variablen durch eine entsprechende Nebenbedingung

$$K + \mathfrak{P} = 0$$

verknüpft sind. Dies leistet jede beliebige kanonische Transformation der $2f + 2$ Veränderlichen $q_k, p_k, t, \mathfrak{p}$ in $Q_k, P_k, T, \mathfrak{P}$, die also durch eine willkürliche Funktion $V^*(q_k, Q_k, t, T)$ erzeugt wird. Dabei ist die Funktion K so zu bestimmen, daß man die Transformation in der Gleichung (7) vornimmt und die so gewonnene Beziehung nach $\mathfrak{P}$ auflöst und so

$$\mathfrak{P} = -K(Q_k, P_k, T)$$

findet.

Soll speziell t nicht transformiert werden, d. h. t in T übergehen, so hat V^* die Form

$$V^* = \mathfrak{P} t + V(q_k, Q_k, t),$$

da dann nach Ziff. 5, Gleichung (6)

$$T = \frac{\partial V^*}{\partial \mathfrak{P}} = t, \qquad \mathfrak{p} = -W = \frac{\partial V^*}{\partial t} = \mathfrak{P} + \frac{\partial V}{\partial t},$$

d. h.

$$-\mathfrak{P} = K(Q_k, P_k, t) = W + \frac{\partial V}{\partial t} = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

wird. Man kommt so natürlich auf die Formeln von Ziff. 5 zurück.

6. Integralinvarianten. Wie bei jeder Transformation, so ist auch bei der kanonischen Transformation die Frage nach den Invarianten von großer Wichtigkeit, d. h. nach den Funktionen, die bei der Transformation ihren Wert nicht ändern. Man kann eine Reihe solcher Invarianten aller kanonischen Transformationen angeben. Wir besprechen zunächst die von POINCARÉ[1]) erstmals betrachteten Integralinvarianten.

Das Integral

$$J_1 = \iint \sum_k dp_k \, dq_k, \tag{1}$$

erstreckt über ein beliebiges zweidimensionales Gebiet des $2f$-dimensionalen Phasenraumes der p_k und q_k ist eine Invariante der kanonischen Transformationen. Um das zu beweisen, stellen wir dieses zweidimensionale Gebiet dadurch her, daß wir p_k und q_k als Funktionen zweier Parameter u und v angeben. In diesen wird

$$J_1 = \iint \sum_k \begin{vmatrix} \frac{\partial p_k}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial p_k}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv. \tag{2}$$

Die kanonischen Transformationen nehmen wir in der Form

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial V(q_k, P_k, t)}{\partial q_k}, \\ Q_k &= \frac{\partial V(q_k, P_k, t)}{\partial P_k} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1]) H. POINCARÉ, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Bd. III, Kap. 22/24. Paris 1899. Beweis nach E. BRODY, ZS. f. Phys. Bd. 6, S. 224. 1921.

an und führen mittels der Gleichungen der ersten Zeile die p_k als Funktionen der q_k, P_k in J_1 ein, wobei der Wert von t in (3) festzuhalten, also t als konstanter Parameter zu behandeln ist. Dann wird

$$\sum_k \begin{vmatrix} \frac{\partial p_k}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial p_k}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_k \begin{vmatrix} \sum_l \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \sum_l \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_{kl} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial P_l} \begin{vmatrix} \frac{\partial P_l}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial P_l}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Durch Vertauschung der Zeiger ergibt sich hierfür

$$\sum_{lk} \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial P_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial P_k}{\partial u} & \frac{\partial q_l}{\partial u} \\ \frac{\partial P_k}{\partial v} & \frac{\partial q_l}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Führen wir jetzt mit Hilfe der zweiten Reihe der Gleichungen (3) die q_k, P_k in die Q_k, P_k über, so wird hieraus

$$\sum_k \begin{vmatrix} \frac{\partial P_k}{\partial u} & \sum_l \frac{\partial^2 V}{\partial P_k \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial u} \\ \frac{\partial P_k}{\partial v} & \sum_l \frac{\partial^2 V}{\partial P_k \partial q_l} \frac{\partial q_l}{\partial u} \end{vmatrix} = \sum_k \begin{vmatrix} \frac{\partial P_k}{\partial u} & \frac{\partial Q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial P_k}{\partial v} & \frac{\partial Q_k}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Es wird also endlich

$$\sum_k \begin{vmatrix} \frac{\partial p_k}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial p_k}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix} = \sum_k \begin{vmatrix} \frac{\partial P_k}{\partial u} & \frac{\partial Q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial P_k}{\partial v} & \frac{\partial Q_k}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

womit auch die Invarianz des Integrals (1) bewiesen ist.

Ganz analog läßt sich die Invarianz von

$$J_2 = \iiiint \sum_{kl} dp_k dp_l dq_k dq_l \tag{5}$$

und allgemein die von

$$J_n = \int \overset{2n}{\cdots} \int \sum_{k_1 \ldots k_n} dp_{k_1} \ldots dp_{k_n} dq_{k_1} \ldots dq_{k_n} \tag{6}$$

beweisen. Das letzte Integral dieser Reihe ist das Volumen im Phasenraum der p_k und q_k

$$J_f = \int \overset{2f}{\cdots} \int dp_1 \ldots dp_f dq_1 \ldots dq_f, \tag{7}$$

das also auch eine Invariante gegenüber kanonischen Transformationen ist. Damit ist gleichzeitig auch gezeigt, daß die Funktionaldeterminante einer kanonischen Transformation gleich 1 ist.

Wie sich später (Ziff. 9) ergeben wird, läßt sich die zeitliche Änderung der Koordinaten und Impulse eines mechanischen Systems auch als eine kanonische Transformation derselben auffassen. Alle Invarianten kanonischer Transformationen sind daher auch Bewegungsinvarianten. Dies ist so zu verstehen, daß die Punkte der entsprechenden $2n$-dimensionalen Gebiete im Phasenraum als Bildpunkte einer entsprechenden Mannigfaltigkeit gleicher mechanischer Systeme mit etwas verschiedenen Anfangslagen zu denken sind. Durch die Bewegung dieser Systeme wird der ursprüngliche Wertebereich der p, q, über den zu integrieren ist, in einen anderen übergeführt, der nach unserem Satze dasselbe Volumen hat. Im pqt-Raum bilden also die Weltlinien dieser Systeme

eine Röhre von konstantem Querschnitt. Für J_f ist dies der für die statistische Mechanik fundamentale **Liouvillesche Satz**.

Die Integralinvarianten (1) und (6) bis (7) werden **absolute** genannt, weil in ihnen über das Integrationsgebiet keinerlei Voraussetzungen gemacht sind. Sie lassen sich mit Hilfe der mehrdimensionalen Verallgemeinerungen des Stokesschen Satzes in **relative**, d. h. über geschlossene Integrationsgebiete zu erstreckende Integralinvarianten umformen, deren Ordnung, d. h. Zahl der Integrationen, niedriger ist. Z. B. tritt an Stelle von (1) die Invarianz des über eine geschlossene Kurve des pq-Raumes (die im pqt-Raum auf einer Ebene $t =$ konst. zu liegen hätte) zu führenden Integrals

$$J_1 = \oint \sum_k p_k dq_k . \tag{8}$$

Aus der Existenz der Integralinvariante (8) bzw. (2) für ein System von Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(Q_k P_k t), \\ p_i &= p_i(Q_k P_k t) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

folgt übrigens rückwärts, wie in Ziff. 6 gezeigt werden wird, daß sie sich auf die Form Ziff. 5, Gleichung (6) bringen lassen, daß also die benutzte Transformation kanonisch ist.

Wählt man als Integrationsgebiet in (1) das von zwei infinitesimalen Vektoren des pq-Raumes, deren Komponenten dq_k, dp_k bzw. δq_k, δp_k seien, aufgespannte Parallelogramm, so folgt die Invarianz der zur Differentialform $\sum p_k dq_k$ gehörigen **bilinearen Kovariante**

$$\sum_k (\delta p_k dq_k - dp_k \delta q_k) . \tag{10}$$

Auch ihre Invarianz ist nach dem oben Gesagten hinreichend für die kanonische Natur einer Transformation. Übrigens gilt die Invarianz von (10), nach dem, was wir zu Gleichung (3) bemerkt haben, nur dann, wenn entweder V von t unabhängig ist, oder die beiden kleinen Vektoren samt ihren Bildern im PQt-Raum auf Ebenen $t =$ konst. liegen, d. h. wenn sie δ-Variationen im Sinne von Ziff. 5 sind. Andernfalls ist nicht (10) invariant, sondern die zur Differentialform $\sum p_k dq_k - H dt$ gehörige Kovariante

$$\sum_k (\Delta p_k dq_k - dp_k \Delta q_k) - (\Delta H dt - dH \Delta t) . \tag{11}$$

6. Die Bedingungen für kanonische Transformationen, ausgedrückt vermittels der Lagrangeschen und der Poisson-Jacobischen Klammersymbole. Man bezeichnet die in Ziff. 5 (4) auftretenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} [u, v] &= \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial u} \frac{\partial p_k}{\partial v} - \frac{\partial p_k}{\partial u} \frac{\partial q_k}{\partial v} \right) \\ &= -\sum_k \begin{vmatrix} \frac{\partial p_k}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial p_k}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

als **Lagrangesche Klammerausdrücke**. Sie sind, wie wir dort gesehen haben, invariant gegenüber kanonischen Transformationen. Unter u und v wären in Ziff. 5 irgendwelche, den Koordinatenwerten eines zweidimensionalen Ausschnitts des pq-Raumes zugeordnete Parameter verstanden. Als solche

können natürlich auch die Koordinatenwerte selbst dienen. Dies führt auf die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} [p_i, p_k] &= [q_i, q_k] = 0, \\ [q_i, p_k] &= \delta_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & \text{für} & i \neq k \\ 1 & \text{für} & i = k \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ihre Invarianz bedeutet die Richtigkeit auch der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} [P_i, P_k] &= [Q_i, Q_k] = 0, \\ [Q_i, P_k] &= \delta_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wenn immer die Transformation $(p, q) \to (P, Q)$ kanonisch ist. Umgekehrt genügen die Gleichungen (3) wiederum, um den kanonischen Charakter der Transformation sicherzustellen, wie wir gleich zeigen werden. Sie sind also die charakteristischen Differentialgleichungen, denen die p, q als Funktionen der P, Q genügen müssen, damit die Transformation kanonisch ist. Der Beweis ergibt sich wie folgt:

Die Gleichungen (3) lauten ausführlich geschrieben

$$[Q_k, P_j] = \sum_l \left(\frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \frac{\partial p_l}{\partial P_j} - \frac{\partial p_l}{\partial Q_k} \frac{\partial q_l}{\partial P_j} \right) = \delta_{jk},$$

$$[Q_k, Q_j] = \sum_l \left(\frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \frac{\partial p_l}{\partial Q_j} - \frac{\partial p_l}{\partial Q_k} \frac{\partial q_l}{\partial Q_j} \right) = 0,$$

$$[P_k, P_j] = \sum_l \left(\frac{\partial q_l}{\partial P_k} \frac{\partial p_l}{\partial P_j} - \frac{\partial p_l}{\partial P_k} \frac{\partial q_l}{\partial P_j} \right) = 0.$$

Sie lassen sich wie folgt umschreiben

$$\frac{\partial}{\partial P_j} \left(\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} - P_k \right) - \frac{\partial}{\partial Q_k} \left(\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial P_j} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_j} \left(\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} - P_k \right) - \frac{\partial}{\partial Q_k} \left(\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial Q_j} - P_j \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial P_j} \left(\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \right) - \frac{\partial}{\partial P_k} \left(\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial P_j} \right) = 0.$$

Diese Gleichungen bedeuten aber, daß eine Funktion $\Phi(Q_k, P_k, t)$ existiert, für welche

$$\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} - P_k = \frac{\partial \Phi}{\partial Q_k}$$

und

$$\sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial P_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial P_k},$$

ist. Bildet man nun die δ-Variation von Φ

$$\delta \Phi = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial Q_k} \delta Q_k + \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} \delta P_k.$$

$$= \sum_{kl} p_l \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \delta Q_k + \sum_{kl} p_l \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \delta P_k - \sum_k P_k \delta Q_k,$$

und berücksichtigt

$$\delta q_l = \sum_k \frac{\partial q_l}{\partial Q_k} \delta Q_k + \sum_k \frac{\partial q_l}{\partial P_k} \delta P_k,$$

so erhält man

$$\delta\Phi = \sum_k p_k \delta q_k - \sum_k P_k \delta Q_k.$$

Es besteht also für die Transformationsformeln

$$q_k = q_k(Q_l, P_l, t), \qquad p_k = p_k(Q_l, P_l, t) \tag{4}$$

die Beziehung (12), Ziff. 3:

$$\sum_k p_k \delta q_k = \sum_k P_k \delta Q_k + \delta\Phi(P, Q, t).$$

Mit anderen Worten, die Transformation (4) ist kanonisch.

Damit ist zugleich der Beweis für die früher im Anschluß an Ziff. 5 (8) aufgestellte Behauptung nachgeholt, daß die Existenz der Invariante Ziff. 5 (8) oder Ziff. 5 (2) hinreicht, um den kanonischen Charakter der Transformation (4) sicherzustellen; denn jene Invariante hat die Gleichungen (3) zur Folge.

Mit den Lagrangeschen Klammerausdrücken eng verwandt sind die nach POISSON oder JACOBI benannten Symbole

$$(u, v) = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k} \right). \tag{5}$$

Der Zusammenhang beider besteht darin, daß für irgend $2f$ unabhängige Funktionen $u_1, \ldots, u_{2f}$ der p_k, q_k die Gleichungen gelten

$$\sum_{l=1}^{2f} (u_l, u_r)\,[u_l, u_s] = \delta_{rs}. \tag{6}$$

Man bestätigt sie sofort durch direkte Ausrechnung unter Berücksichtigung, daß die Summen

$$\sum_{l=1}^{2f} \frac{\partial u_l}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u_l}$$

nur dann von Null verschieden und gleich Eins sind, wenn x und y dieselbe von den Größen p_k, q_k bedeutet.

Die Gleichungen (3) und (6) ergeben als weiteres notwendiges und hinreichendes Kennzeichen einer kanonischen Transformation das System

$$\begin{aligned} (P_l, P_k) = (Q_l, Q_k) &= 0, \\ (Q_l, P_k) &= \delta_{lk}, \end{aligned} \tag{7}$$

indem man für die u_l die P_k und Q_k selbst nimmt. Sie stellen die Differentialgleichungen dar, welche die neuen Variabeln P, Q als Funktionen der ursprünglichen p, q (also die Umkehrformeln der Transformation), erfüllen müssen, damit diese kanonisch ist. Die Gleichungen (7) sind gleichbedeutend mit der Invarianz der betreffenden speziellen Klammersymbole. Mit Hilfe von (6) ist aber auch die Invarianz der Poissonschen Klammer (u, v) für irgend zwei Funktionen u und v der q_k, p_k aus der Invarianz von $[u, v]$ bewiesen.

7. Weitere Eigenschaften der Klammersymbole; die Sätze von POISSON und LAGRANGE. Die Poissonschen Klammersymbole haben in neuester Zeit infolge ihrer Übertragung in die Quantenmechanik[1]) besondere Bedeutung erlangt. Es sollen daher einige weitere auf sie bezügliche Rechenregeln und Sätze hier Platz finden.

---

[1]) Vgl. besonders die Arbeiten von P. A. M. DIRAC in den Proc. Roy. Soc. London (A), Bd. 109, S. 642, 1925; 110, S. 561, 1926; 111, S. 281, 405, 1926.

Zunächst gelten nach der Definition (5) von Ziff. 6 die Identitäten

$$\left.\begin{aligned} &(u, u) = 0, \qquad (u, v) = -(v, u), \\ &\frac{\partial u}{\partial q_j} = (u, p_j) = -(p_j, u), \qquad \frac{\partial u}{\partial p_j} = (q_j, u) = -(u, q_j). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ferner ist identisch

$$(u, (v, w)) + (v, (w, u)) + (w, (u, v)) = 0. \tag{2}$$

Die linke Seite ist nämlich offenbar linear und homogen in den zweiten Ableitungen der u, v, w. Wir fassen nun die Glieder zusammen, die die zweiten Ableitungen von u enthalten. Das erste Glied von (2) enthält sicher nur erste Ableitungen. Das zweite und dritte lassen sich nach (1) in der Gestalt

$$(v, (w, u)) + (w, (u, v)) = (v, (w, u)) - (w, (v, u))$$

schreiben. Führen wir die Differentialoperatoren

$$D_1(f) = (v, f), \quad D_2(f) = (w, f)$$

ein, so lassen sich die Glieder, die die zweiten Ableitungen enthalten können, in der Form

$$(D_1 D_2 - D_2 D_1) u$$

zusammenfassen. Eine solche Kombination zweier linearer Differentialoperatoren enthält aber niemals zweite Ableitungen. Ist nämlich etwa

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

so wird

$$D_1 D_2 = \sum_{kl} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{kl} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2 D_1 = \sum_{kl} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{kl} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Daher ist

$$D_1 D_2 - D_2 D_1 = \sum_l \left[\sum_k \left(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_l}$$

auch nur ein Operator, der nur erste Ableitungen enthält. Folglich können in (2) überhaupt keine Glieder mit den zweiten Ableitungen von u eingehen, und da dasselbe für v und w gelten muß, so muß der ganze Ausdruck identisch verschwinden. Gl. (2) ist die sogenannte Jacobische Identität.

Infolge von (1) ist es möglich, den kanonischen Bewegungsgleichungen [vgl. Ziff. 2 (9)]

$$\dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \qquad \dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{3}$$

die Gestalt

$$\dot p_k = (p_k, H), \qquad \dot q_k = (q_k, H) \tag{4}$$

zu geben, welche in sinngemäßer Übertragung in der Quantenmechanik verwendet wird.

Berücksichtigt man (3), so sieht man ferner, daß für jedes Integral $F(q, p) = a$ der Bewegung, welches die Zeit t nicht explizit enthält,

$$(F, H) = 0 \tag{5}$$

ist. Dieser Satz bedeutet nämlich nur, daß der Gradient der Hyperfläche $F(q, p) = \text{const}$ im $2f$-dimensionalen pq-Raum auf dem Phasenbahnelement

$$dq_k = \dot{q}_k dt = \frac{\partial H}{\partial p_k} dt$$
$$dp_k = \dot{p}_k dt = -\frac{\partial H}{\partial q_k} dt$$

senkrecht steht, das Element also ganz in der Fläche liegt.

Schließlich leiten wir noch einen merkwürdigen und wichtigen Satz von Poisson ab, der allerdings erst von Jacobi in seiner vollen Bedeutung erkannt wurde. Er erlaubt es in einigen Fällen, neue Integrale der mechanischen Gleichungen zu finden. Er besagt: Sind $F = \text{konst.}$ und $G = \text{konst.}$ zwei zeitunabhängige Integrale der kanonischen Gleichungen (3), so ist ihr Poissonscher Klammerausdruck

$$(F, G) = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right) = \text{konst.}, \tag{6}$$

Gleichung (6) also wieder ein Integral.

Der Beweis folgt unmittelbar aus (2), wenn man bedenkt, daß nach (5)

$$(H, F) = 0 \qquad \text{und} \qquad (H, G) = 0.$$

Es ergibt sich nämlich

$$(H, (F, G)) = 0, \tag{7}$$

d. h. auch $(F, G) = \text{konst.}$ ist ein Integral der kanonischen Gleichungen.

Natürlich bekommt man durch diesen Prozeß nicht immer neue Integrale, da es deren ja überhaupt nur eine beschränkte Anzahl gibt, sondern man erhält oft nur ein triviales oder eines, das eine Funktion der beiden ersten F, G ist.

Auch für die Lagrangeschen Klammern gibt es ein Analogon zum Satz (6). Benutzen wir den schon erwähnten, später zu begründenden Satz, daß die Koordinatenänderung eines mechanischen Systems im Laufe seiner Bewegung als Entfaltung einer kanonischen Transformation aufgefaßt werden kann, so erhält man aus der Invarianz der Klammern den **Satz von Lagrange**. Er besagt, daß für irgendeine zweidimensionale Lösungsschar

$$q_l = q_l(a, b, t), \qquad p_l = p_l(a, b, t)$$

der kanonischen Gleichungen, wo also a und b beliebige Integrationskonstanten sind, für alle Zeiten, d. h. längs der ganzen mechanischen Bahn die entsprechenden Lagrangeschen Klammern

$$[a, b] = \text{konst.} \tag{8}$$

sind.

Alle obigen Sätze kann man leicht auf Systeme bzw. Integrale verallgemeinern, die die Zeit explizit enthalten, indem man nach Ziff. 4 auch die Zeit als kanonische Variable auffaßt. Als Definition für die Poissonschen Klammern, die wir jetzt zur Unterscheidung mit geschweiften Klammern schreiben, hat man dann

$$\left.\begin{aligned} \{u, v\} &= (u, v) - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial W} + \frac{\partial u}{\partial W}\frac{\partial v}{\partial t} \\ &= (u, v) + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Entsprechend kann man auch die Lagrangeschen Klammern erweitern. Die Betrachtungen dieser Ziffer und von Ziff. 6 lassen sich dann wörtlich übertragen, nur daß statt H überall $H - W$ bzw. $H + p$ zu setzen ist.

Der Form (4) der kanonischen Gleichungen entspricht jetzt also

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_k &= \{p_k, (H-W)\} = -\frac{\partial(H-W)}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \dot{q}_k &= \{q_k, (H-W)\} = \frac{\partial(H-W)}{\partial p_k} \quad = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{t} &= \{t, (H-W)\} \quad = 1, \\ \dot{W} &= \{W, (H-W)\} = \frac{\partial(H-W)}{\partial t} \quad = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aus ihnen folgt für beliebige Funktionen $F(p_k, q_k, W, t)$

$$\dot{F} = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k\right) + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial W}\dot{W} = \{F, (H-W)\}. \tag{11}$$

Jedes Integral der Bewegungsgleichungen erfüllt also die zu (5) analoge Bedingung

$$\{F, (H-W)\} = 0, \tag{12}$$

die sich für Integrale, die von W unabhängig sind, auf

$$(F, H) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{13}$$

reduziert. Der Poissonsche Satz besagt jetzt, daß mit $F =$ konst. und $G =$ konst. auch

$$\{F, G\} = \text{konst.} \tag{14}$$

ein Integral der kanonischen Gleichungen (10) ist. Aus Gleichung (14) folgt die einfache Form (6), wenn nur F und G beide von W unabhängig sind. Die Beschränkung auf zeitunabhängige Integrale ist also für (6) nicht wesentlich.

8. Kontinuierliche Transformationsgruppen. Die Frage, was für eine Bedeutung die Integrale der kanonischen Gleichungen für das Variationsproblem haben, läßt sich in sehr eleganter Weise mit Hilfe der Theorie der Transformationsgruppen behandeln. Hierzu müssen wir einige Sätze derselben vorausschicken.

Wir unterwerfen das mechanische System einer Transformation der Form[1])

$$\left.\begin{aligned} P_k &= P_k(p_l, q_l, \alpha) = p_k + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n p_k^{(n)}(p_l, q_l), \\ Q_k &= Q_k(p_l, q_l, \alpha) \;= q_k + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n q_k^{(n)}(p_l, q_l). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Diese Transformation enthält also noch einen Parameter, nach dem sie sich in Potenzreihen entwickeln läßt, und geht für $\alpha = 0$ in die identische Transformation über. Ist α sehr klein, so haben wir eine Transformation in der Nachbarschaft der identischen. Man nennt sie dann eine infinitesimale Transformation. Für jeden Wert von α haben wir eine bestimmte Transformation. Durch (1) ist also eine ganze Schar von Transformationen bestimmt.

Wir wollen nun von diesen Transformationen zunächst verlangen, daß sie eine Gruppe bilden, d. h., daß zwei der Transformationen mit irgendwelchen Werten α_1, α_2 hintereinander ausgeführt, wieder eine Transformation der Schar ergeben. Lie[2]) hat gezeigt, daß die linearen Glieder der Entwicklung (1),

---

[1]) Es ist hierbei ganz gleichgültig, ob man die p_k, q_k oder die P_k, Q_k als die ursprünglichen Variablen auffaßt. Der bequemeren Anwendung in Ziff. 9 halber schreiben wir sie in der obigen Form, die der Auflösung einer Transformation $p_k = p_k(P, Q)$, $q_k = q_k(P, Q)$ entspricht.

[2]) S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. I, S. 51ff., Leipzig 1888.

die wir mit $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{q}_k$ bezeichnen wollen, auf Grund dieser Forderung auch alle folgenden Glieder vollständig bestimmen und somit schon allein für die Transformation charakteristisch sind. Zu einem Satz solcher Glieder gehört also nur eine Gruppe. Ein Beweis würde hier zu weit führen. Wir beschränken uns darauf, die Transformationen anzugeben, also zu zeigen, wie man die höheren Glieder aus denen der ersten Ordnung gewinnt.

Man bildet mit Hilfe der $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{q}_k$ folgenden Differentialoperator:

$$D = \sum_k \mathfrak{p}_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \sum_k \mathfrak{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}, \tag{2}$$

den man als das **erzeugende Symbol der Gruppe** bezeichnet. Mit den $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{q}_k$ ist also auch D gegeben. Man kann nun auf drei verschiedene Weisen die die Gruppe bildenden Transformationen definieren, welche natürlich zu identischen Resultaten führen.

a) Man bildet die Reihen

$$\left.\begin{aligned} P_k &= [p_k] = p_k + \alpha D p_k + \frac{\alpha^2}{2} D^2 p_k + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D^n p_k, \\ Q_k &= [q_k] = q_k + \alpha D q_k + \frac{\alpha^2}{2} D^2 q_k + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D^n q_k; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dabei sind die D^n Operatoren, die durch n-malige Anwendung von D entstehen. Zur Abkürzung führen wir hier das Symbol

$$[F] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D^n F \tag{4}$$

ein. Die Reihen (3) sind also nur durch Differentiation und Multiplikation mit Hilfe der $\mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{q}_k$ bestimmbar und, wie sich leicht zeigen läßt, auch für genügend kleine α konvergent. Für eine beliebige Funktion $F(p_k, q_k)$ gilt ferner offensichtlich

$$F(P_k, Q_k) = F([p_k], [q_k]) = [F(p_k, q_k)]. \tag{5}$$

Aus der Darstellung (3) sieht man auch, daß die allgemeine Transformation (1) durch dauernde Wiederholung der linearen (infinitesimalen) Transformation

$$P_k = p_k + \alpha \mathfrak{p}_k, \qquad Q_k = q_k + \alpha \mathfrak{q}_k$$

aufgebaut werden kann.

b) Man bildet die partielle Differentialgleichung für die Funktion F der $2f + 1$ Variabeln p_k, q_k, α

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = DF = \sum_k \mathfrak{p}_k \frac{\partial F}{\partial p_k} + \sum_k \mathfrak{q}_k \frac{\partial F}{\partial q_k}, \tag{6}$$

und sucht diejenigen Integrale $F(p_k, q_k, \alpha)$, die für $\alpha = 0$ in die Variabeln p_k, q_k selbst übergehen. Dann sind die $2f$ so bestimmten Integrale $P_k(\alpha, p_k, q_k)$, $Q_k(\alpha, p_k, q_k)$ gerade wieder die gesuchten Transformationsfunktionen. Daß diese Definition mit der ersten übereinstimmt, sieht man aus der Definition (4), nach der für jede Funktion $[F]$

$$D[F] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D^{n+1} F,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}[F] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D^{n+1} F$$

folgt. Jede Funktion $[F]$ genügt also von selbst der Differentialgleichung (6). Daher müssen die auf beide Arten definierten Funktionen $P_k(p_l, q_l)$, $Q_k(p_l, q_l)$ auch für $\alpha = 0$ übereinstimmen, was sie mit der Differentialgleichung (6) zusammen eindeutig festlegt.

c) Die die Transformation darstellenden Funktionen sind auch die Lösungen des Systems von $2f$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_k}{d\alpha} &= \mathfrak{p}_k(P_l, Q_l), \\ \frac{dQ_k}{d\alpha} &= \mathfrak{q}_k(P_l, Q_l), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

die für $\alpha = 0$ die Werte p_k, q_k annehmen. Hierbei sind auf der rechten Seite die neuen Variabeln vermittels (3) eingeführt zu denken, während die alten Variablen als Integrationskonstante des Systems (7) auftreten. Daß auch diese Definition mit der ersten und damit auch der zweiten übereinstimmt, erkennt man mit Hilfe der Reihenentwicklungen (3) und der Definitionen (2), (4) und (5); denn man hat nacheinander z. B.

$$\begin{aligned} \frac{dP_k}{d\alpha} = \frac{d[p_k]}{d\alpha} &= [D\,p_k] = [\mathfrak{p}_k] \\ &= \mathfrak{p}_k([p_l], [q_l]) = \mathfrak{p}_k(P_l, Q_l). \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Transformationen der Gruppe ist ebenfalls ein sehr einfacher, wie mit Hilfe der Darstellung (2) zu zeigen. Sind nämlich $f_1, f_2, \ldots f_r$ Lösungen einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung wie (6), so ist es bekanntlich auch eine beliebige Funktion $F(f_1 \ldots f_r)$ ebenfalls. Da nun z. B. $[p_k]_{\alpha=\alpha_1}$ eine Lösung von (6), so ist es auch $\big[[p_k]_{\alpha_1}\big]_{\alpha=\alpha_2}$, und da $[p_k]_0$ die identische Transformation ist, so wird $\big[[p_k]_0\big]_{\alpha_2} = [p_k]_{\alpha_2}$. Dieselbe Eigenschaft, für $\alpha_1 = 0$ gleich $[p_k]_{\alpha_2}$ zu werden, hat aber auch die Lösung $[p_k]_{\alpha_1+\alpha_2}$, da es aber nur eine Lösung der partiellen Differentialgleichung gibt, die für $\alpha_1 = 0$ gleich $[p_k]_{\alpha_2}$ ist, so muß

$$\big[[p_k]_{\alpha_1}\big]_{\alpha_2} = [p_k]_{\alpha_1+\alpha_2}$$

sein, d. h. die Transformationen mit den Parametern α_1 und α_2 nacheinander ausgeführt, ergeben die Transformation mit dem Parameter $\alpha_1 + \alpha_2$. Damit ist auch nachgewiesen, daß unsere Transformationen wirklich eine Gruppe bilden.

Betrachtet man nun eine Funktion $f(P_k, Q_k)$ und wendet auf sie die Transformation (3) an, so geht sie über in

$$f(P_k, Q_k) = [f(p_k, q_k)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D^n f(p_k, q_k).$$

Geht hierbei f in sich selbst über, so nennt man eine derartige Funktion eine Invariante der Gruppe. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß

$$D f(p_k, q_k) = 0$$

identisch in den p_k, q_k wird, da dann alle höheren Glieder der Potenzentwicklung verschwinden und nur das Nullglied, d. h. der Einheitsoperator, übrigbleibt. Die Invarianten der Gruppe genügen also der partiellen Differentialgleichung

$$D f = \sum_k \mathfrak{p}_k \frac{\partial f}{\partial p_k} + \sum_k \mathfrak{q}_k \frac{\partial f}{\partial q_k} = 0. \tag{8}$$

9. Die Bedeutung der Integrale der kanonischen Gleichungen. Nach diesem vorbereitenden Exkurs kehren wir zur Mechanik zurück und fragen jetzt, wann eine solche Transformationsgruppe kanonisch ist, also nur kanonische Transformationen enthält. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall, daß die unabhängige Veränderliche t in der Hamiltonschen Funktion des Systems nicht auftritt. Sonst müßte, wie in Ziff. 4, t ebenfalls als kanonische Variable behandelt und mit transformiert werden.

Die Bedingung für kanonische Transformationen war [Gleichung (12), Ziff. 5]

$$\sum_k p_k \delta q_k = \sum P_k \delta Q_k + \delta\Phi, \tag{1}$$

wo die Operation δ durch

$$\delta f(p_k q_k) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial p_k}\delta p_k + \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\delta q_k$$

definiert war. Führen wir hierin die Entwicklungen (3) von Ziff. 8 ein, so kommt unter Berücksichtigung von Gleichung (2) von Ziff. 8

$$\left.\begin{aligned}\sum_k p_k \delta q_k = \sum_k \Big(p_k + \alpha \mathfrak{p}_k + \frac{\alpha^2}{2!} D\mathfrak{p}_k + \cdots\Big)\Big(\delta q_k + \alpha\delta \mathfrak{q}_k + \frac{\alpha^2}{2!}\delta D \mathfrak{q}_k + \cdots\Big)\\ + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \delta\Phi_n,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wo auch Φ als Potenzreihe in α angesetzt ist:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \Phi_n .$$

Damit die Beziehung (2) identisch erfüllt ist, müssen alle Potenzen von α für sich auf beiden Seiten gleiche Koeffizienten haben. Es muß also zunächst $\Phi_0 = 0$ sein. Die linearen Glieder liefern

$$\sum_k \mathfrak{p}_k \delta q_k + \sum_k p_k \delta \mathfrak{q}_k = \delta\Phi_1 \tag{3}$$

identisch in den p_k, q_k. Hat man $\mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_k$ so gewählt, daß diese Beziehung erfüllt ist, so ergeben sich die höheren Potenzen durch entsprechende wiederholte Anwendung der Operation D auf diese erste Beziehung, und man sieht leicht, daß Gleichung (2) allgemein erfüllt ist, wenn man

$$\Phi = \alpha\Phi_1 + \frac{\alpha^2}{2!} D\Phi_1 + \frac{\alpha^3}{3!} D^2\Phi_1 + \cdots$$

setzt.

Führen wir nun statt Φ_1 die Funktion

$$\begin{aligned} -\Psi(p_k, q_k) &= \Phi_1 - \sum_k p_k \mathfrak{q}_k ,\\ -\delta\Psi &= \delta\Phi_1 - \sum_k p_k \delta\mathfrak{q}_k - \sum_k \mathfrak{q}_k \delta p_k \end{aligned}$$

ein, so geht (3) in die Bedingung

$$\sum_k \mathfrak{p}_k \delta q_k - \sum_k \mathfrak{q}_k \delta p_k = -\delta\Psi \tag{4}$$

über. Sie ist dann und nur dann identisch in den p_k, q_k erfüllt, wenn

$$\mathfrak{p}_k = -\frac{\partial\Psi}{\partial q_k}, \qquad \mathfrak{q}_k = +\frac{\partial\Psi}{\partial p_k}$$

ist. $\Psi(p_k, q_k)$ ist selbst ganz willkürlich wählbar, und man erhält also die allgemeinste Gruppe kanonischer Transformationen vermittels des Operators

$$D = \sum_k \frac{\partial \Psi}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \sum_k \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \tag{5}$$

wobei nach Gleichung (2) und (3) von Ziff. 8 die Transformationsformeln selbst durch

$$\left.\begin{aligned} P_k &= p_k - \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} + \frac{\alpha^2}{2!} D \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} - \cdots \\ Q_k &= q_k + \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial p_k} + \frac{\alpha^2}{2!} D \frac{\partial \Psi}{\partial p_k} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

gegeben werden. Diese Transformationsfunktionen sind nach den Ergebnissen von Ziff. 9 gleichzeitig die Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = DF, \tag{7}$$

die für $\alpha = 0$ bezüglich in p_k, q_k übergehen. Ferner sind sie diejenigen Lösungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{d P_k}{d\alpha} = -\frac{\partial \Psi}{\partial Q_k}, \qquad \frac{d Q_k}{d\alpha} = \frac{\partial \Psi}{\partial P_k}, \tag{8}$$

die für $\alpha = 0$ die Werte q_k, p_k annehmen. Die kanonischen Gruppen hängen in Übereinstimmung mit Ziff. 5 von einer einzigen willkürlichen Funktion, nämlich Ψ, ab, die als die **erzeugende Funktion** der Gruppe bezeichnet wird.

Vermittels der kanonischen Gruppen geht im allgemeinen natürlich die Hamiltonsche Funktion eines mechanischen Problems in eine andere Funktion über. Wir fragen nun — das ist der wesentliche Kern der folgenden Untersuchung —, ob es auch Gruppen gibt, die das Problem in sich überführen, d. h. denen gegenüber H invariant ist. Dazu ist nach Gleichung (8) von Ziff. 8 nötig, daß H der partiellen Differentialgleichung

$$DH = \sum_k \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial \Psi}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = (\Psi, H) = 0 \tag{9}$$

genügt, wo (Ψ, H) das Poissonsche Klammersymbol (s. Ziff. 6) bedeutet.

Wollen wir also zu einer vorgegebenen Hamiltonschen Funktion H die Transformationsgruppen bestimmen, denen gegenüber sie invariant ist, so müssen wir nur die jeweiligen Funktionen Ψ aufsuchen, die der partiellen Differentialgleichung (9) genügen. Dies sind dann die erzeugenden Funktionen der Gruppe. **Es gibt also so viele kanonische Transformationen des Problems in sich, als es Integrale dieser Differentialgleichung gibt.**

Nach Ziff. 7 (5) bedeutet Gleichung (9), daß Ψ ein Integral der Bewegungsgleichungen ist. Wir haben so den fundamentalen Satz gewonnen, daß **die erzeugenden Funktionen derjenigen kanonischen Transformationsgruppen, welche H invariant lassen, Integrale der kanonischen Gleichungen sind.** Umgekehrt erzeugt offenbar auch jedes solche Integral eine Gruppe kanonischer Transformationen des Problems in sich. **Die Kenntnis von Transformationsgruppen des Systems ist also äquivalent mit der Kenntnis von Integralen.**

Wie man aus (8) sieht, haben die Formeln, die eine Transformationsgruppe vermitteln, genau die Form von kanonischen Gleichungen. **Diese lassen sich daher umgekehrt auch als eine kanonische Transformation deuten, bei der t die Rolle des Parameters α spielt und H selbst die erzeugende Funktion bildet.** Diese Transformation ordnet jedem Wertsystem

p_l^0, q_l^0 zu einer bestimmten Zeit t_0 dasjenige Wertsystem p_l^0, q_l^0 zu, in dem sich das mechanische System durch Ablauf der Bewegung von dem Anfangszustand p_l^0, q_l^0, t_0 nach der Zeit $t - t_0$ befinden würde. Man kann also den Verlauf der Bewegung des mechanischen Systems als Entfaltung einer kanonischen Transformation auffassen. Diesen Satz haben wir schon in den Ziff. 5 und 7 benutzt.

Der einfachste Spezialfall ist der der zyklischen Koordinaten (vgl. Kap. 2, Ziff. 11). Ist etwa q_1 zyklisch, tritt also nicht in der Hamiltonschen Funktion auf, so ist

$$q_1 = Q_1 + \alpha, \quad q_l = Q_l, \quad p_k = P_k \quad (l = 2, \ldots f), \ (k = 1, \ldots f)$$

eine Transformation des Systems in sich und

$$p_1 = \text{konst.}$$

das entsprechende Integral der kanonischen Gleichungen.

Mit Hilfe der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen sieht man auch ohne weiteres die Bedeutung der zehn allgemeinen Integrale der Systeme freier Massenpunkte[1]) ein; denn für diese Systeme sind eben die Verschiebungen, Galileischen Transformationen und Drehungen Transformationen des Systems in sich, die die Energie nicht verändern. Ihnen entsprechen gerade die Schwerpunkts-, Impuls- und Flächensätze. Dem Energiesatz selbst entspricht die Transformation $T = t +$ konst., die auch das System in sich selbst überführt, aber die Zeit mit enthält.

Seien z. B. x_n, y_n, z_n die x, y, z-Koordinaten des n-ten Massenpunktes, so lautet die erste Gruppe der Transformationen

$$\begin{aligned} x_n &= X_n + \alpha_n, & p_{x_n} &= P_{x_n}, \\ y_n &= Y_n, & p_{y_n} &= P_{y_n}, \\ z_n &= Z_n, & p_{z_n} &= P_{z_n}; \end{aligned}$$

sie bedeutet eine einfache Verschiebung des Systems in der x-Richtung. Das entsprechende Symbol der Gruppe ist nach (5) und (6)

$$\Psi = \sum_n p_{x_n}, \qquad D = \sum_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Das entsprechende Integral lautet also

$$\sum_n p_{x_n} = \text{konst.}$$

Dies ist aber das erste Schwerpunktsintegral. Ebenso findet man die beiden anderen

$$\sum_n p_{y_n} = \text{konst.}, \qquad \sum_n p_{z_n} = \text{konst.}$$

Die zweite Gruppe der Schwerpunktsintegrale

$$\sum_n m_n x_n = t \sum_n p_{x_n} + \text{konst.}$$

enthält die Zeit explizit. Zu ihrer Behandlung müßten deshalb die vorigen Betrachtungen auf Transformationen, die die Zeit enthalten, ausgedehnt werden.

[1]) Siehe Kap. 7, Ziff. 24 ds. Bd. des Handb. Man vgl. auch: F. Engel, Über die zehn allgemeinen Integrale der klassischen Mechanik. Göttinger Nachr. 1916 u. 1917.

Zu den Flächensätzen gehört die Gruppe der Drehungen

$$\begin{aligned} X_s &= x_s \cos\alpha + y_s \sin\alpha, \\ Y_s &= -x_s \sin\alpha + y_s \cos\alpha, \\ P_{x_s} &= p_{x_s} \cos\alpha + p_{y_s} \sin\alpha, \\ P_{y_s} &= -p_{x_s} \sin\alpha + p_{y_s} \cos\alpha. \end{aligned}$$

Das entsprechende Symbol ist, wie man durch Entwicklung nach α leicht nachweist,

$$D = \sum_s \left(y_s \frac{\partial}{\partial x_s} - x_s \frac{\partial}{\partial y_s} + p_{x_s} \frac{\partial}{\partial p_{y_s}} - p_{y_s} \frac{\partial}{\partial p_{x_s}} \right).$$

Dazu gehört das Integral

$$\Psi = \sum_s (p_{y_s} x_s - p_{x_s} y_s) = \text{konst.},$$

und dies ist das Flächenintegral für die z-Achse. Entsprechendes gilt für die x- und y-Achse.

10. Reduktion der Ordnung mit Hilfe bekannter Integrale. Die kanonischen Transformationen setzen uns auch instand, eventuelle Vorkenntnisse von Integralen der kanonischen Gleichungen zu verwerten und damit die Ordnung des Differentialgleichungssystems herabzusetzen. In sehr vielen Fällen existieren z. B. das Energieintegral und die Schwerpunkts- und Flächenintegrale. Im Problem der drei Körper kommt man mit ihrer Hilfe von der 18. auf die 6. Ordnung herunter[1]). Im allgemeinen kann man mit Hilfe eines bekannten Integrals ein kanonisches Paar eliminieren, also jedesmal die Zahl der Variablen um zwei vermindern.

Es sei also ein Integral

$$G(p_k, q_k) = \text{konst.} = g$$

bekannt. Die Aufgabe ist, durch Transformation auf geeignete neue Variable zu erreichen, daß ein Paar, z. B. P_1, Q_1, aus dem Hamiltonschen Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_k (P_k \dot{Q}_k - K)\, dt = \text{Extremum}$$

herausfällt. Dies ist offenbar erreicht, wenn es gelingt, die neue Variable

$$P_1 = G(p_k, q_k) = g \tag{1}$$

zu machen. Denn dann wird P_1 konstant, also $\dot{P}_1 = 0$ gerade ein Integral des transformierten Problems; und wegen

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial K}{\partial Q_1} = 0, \qquad \dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial P_1}$$

muß dann Q_1 aus K herausfallen, während P_1 nur mehr die Rolle eines konstanten Parameters spielt. Die Variablen $Q_l, P_l, (l = 2, \ldots, f)$ bilden also für sich ein kanonisches System mit der Hamiltonschen Funktion K.

Damit nun (1) gilt, muß die Transformationsfunktion V, die die gesuchte kanonische Transformation erzeugen soll, nach Ziff. 9, Gleichung (5) der Bedingung

$$P_1 = -\frac{\partial V}{\partial Q_1} = G\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}, q_k\right) \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. Kap. 7, Ziff. 24, 27 und 28 ds. Bd. ds. Handb.

genügen. Dies ist eine partielle Differentialgleichung, die entsprechende Integrale besitzt, womit die Möglichkeit der Reduktion gezeigt ist. Sie läßt sich sogar durchführen, ohne daß man wirklich eine Lösung der partiellen Differentialgleichung suchen muß. Hat man nämlich erst V gemäß (2) bestimmt, so fällt bei der entsprechenden kanonischen Transformation Q_1 von selbst aus K heraus. Man kann also Q_1 zum Zwecke der Transformation irgendeinen beliebigen Wert, insbesondere den Wert Null, erteilen und muß doch zu der richtigen Funktion K kommen. Daher braucht man die Abhängigkeit der Funktion V von Q_1 gar nicht erst zu kennen; vielmehr genügt es, ihren Wert $V(q_k, 0, Q_2, \ldots Q_f)$ für $Q_1 = 0$ zu besitzen. Dieser ist aber ganz willkürlich; denn nach dem Existenzsatz für partielle Differentialgleichungen kann man stets ein Integral von (2) angeben, das für $Q_1 = 0$ in eine willkürliche gegebene Funktion $V(q_k, Q_2, \ldots Q_f)$ übergeht.

Wir können also folgendermaßen vorgehen. Wir nehmen eine, bis auf eine gleich sich ergebende Einschränkung, willkürliche Funktion $V(q_k, Q_2, \ldots Q_f)$ der $2f-1$ Variablen $q_1, \ldots q_f, Q_2, \ldots Q_f$ und evtl. noch von t und drücken zunächst die p_k vermittels der Gleichungen

$$p_k = \frac{\partial V}{\partial q_k} = p_k(q_1, \ldots q_f, Q_2, \ldots Q_f) \tag{3}$$

als Funktionen der q_k und Q_k aus. Diese Werte setzen wir in die Nebenbedingung (4) ein, so daß wir erhalten

$$G\left(q_1, \ldots q_f, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \cdots \frac{\partial V}{\partial q_f}\right) = G(q_1, \ldots q_f, Q_2, \ldots Q_f) = g = P_1. \tag{4}$$

Diese Gleichung nehmen wir an Stelle von $P_1 = \partial V/\partial Q_1$, was nach der obigen Limesbetrachtung zulässig ist. Setzen wir nun noch

$$P_l = -\frac{\partial V}{\partial Q_l} = P_l(q_1, \ldots q_f, Q_2, \ldots Q_f), \qquad (l = 2, \ldots f) \tag{5}$$

dann sind (3), (4) und (5) zusammen die gesuchten Transformationsformeln für die p, q in die P, Q. V unterliegt dabei also nur der Beschränkung, daß die Gleichungen (3) und (4) nach den q_k auflösbar sein müssen. Die neue Hamiltonsche Funktion wird dann wie gewöhnlich

$$K = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

und enthält nicht die Variable Q_1, jedoch $P_1 = g$, das als konstanter Parameter zu betrachten ist.

Der einfachste Spezialfall ist wieder der der zyklischen Koordinaten. Es sei etwa q_1 zyklisch, trete also in L und damit auch in H nicht auf, dagegen wohl $\dot q_1$ bzw. p_1. Dann ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = p_1 = \text{konst.} = c$$

das Integral, und das kanonische Problem hat bereits die Form, die wir suchen. Wir können also einfach p_1 und q_1 unterdrücken, so daß wir als Variationsproblem

$$\int_1^2 \left\{\sum_l p_l \dot q_l - K(p_l, q_l, c)\right\} dt = \text{Extremum}, \qquad (l = 2, \ldots f)$$

bekommen, wo $H(p_1, p_l, q_l) = K(c, p_l, q_l)$ gesetzt ist. Das ganze Verfahren dieser Ziffer bedeutet eben, daß man mit Hilfe eines Integrals eine Variable zu einer zyklischen machen kann.

11. Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Integralprinzipen. Die eben durchgeführten Überlegungen gestatten auch, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Integralprinzipien in sehr instruktiver Weise klarzulegen, indem man die Energiegleichung als Nebenbedingung verwertet. Diese Betrachtungen, die sich eng an die des vorigen Kapitels anlehnen, seien hier einschaltungsweise nachgeholt, da hier erst der nötige mathematische Apparat zur Verfügung steht.

Zuerst müssen wir von dem kanonischen Variationsproblem zu dem Hamiltonschen zurückgelangen. Wir nehmen dabei an, wir hätten im ersteren die Nebenbedingungen durch Einführung von zyklischen Variablen wie in voriger Ziffer eliminiert, und wenden jetzt die Legendresche Transformation Ziff. 2, Gleichung (8b) an. Danach wird die neue Lagrangesche Funktion, — es sei q_1 zyklisch, —

$$L^* = \sum_l p_l \frac{\partial K}{\partial p_l} - K. \qquad (l = 2, \ldots f)$$

Andererseits war

$$L = p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \sum_l p_l \frac{\partial H}{\partial p_l} - H = \sum_l p_l \frac{\partial K}{\partial p_l} + c\dot{q}_1 - K.$$

Also ist

$$L^* = L - c\dot{q}_1,$$

und das Variationsproblem erhält zunächst die Form

$$\int_A^B \{L(q_l, \dot{q}_l) - c\dot{q}_1\} dt = \text{Extremum.} \tag{1}$$

Hierin ist der Größe q_1, die selbst gar nicht auftritt, im Gegensatz zu den anderen Koordinaten keine Randbedingung mehr auferlegt, und $\dot{q}_1$ daher eine vollkommen willkürliche Funktion. Man kann deshalb das Problem so auffassen, als ob es eine Unbekannte $\dot{q}_1$ mehr enthielte, deren Ableitung nicht auftritt und deren entsprechende Lagrangesche Gleichung daher

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - c = 0 \tag{2}$$

lautet, während die übrigen Lagrangeschen Gleichungen sich nicht ändern, also dieselben Extremalen geben. Da (2) immer erfüllt sein muß, so kann man diese Beziehung auch als Nebenbedingung fordern und dann ebenso wie in Ziff. 2 behandeln. Es ergibt sich offenbar, daß (1) dem relativen Minimalprinzip

$$\int_A^B \left\{L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1\right\} dt = \text{Extremum} \tag{3}$$

mit Gleichung (2) als Nebenbedingung äquivalent ist.

Endlich kann man nun noch $\dot{q}_1$ ganz eliminieren, indem man (2) nach $\dot{q}_1$ auflöst und in (1) einsetzt. Dann erhalten wir tatsächlich wieder ein einfaches Minimalprinzip

$$\int_A^B F(c, p_l, q_l) dt = \text{Extremum}, \qquad (l = 2, \ldots f) \tag{3a}$$

nur mit einer gesuchten Funktion weniger.

Man kann, wie schon gesagt, diese Überlegungen benutzen, um von dem Hamiltonschen Prinzip zu den übrigen Integralprinzipen

überzugehen, indem man sie auf den Energiesatz anwendet. Dies Verfahren hat allerdings nur für konservative Systeme Geltung. In diesem Fall ist t selbst zyklisch, da es in dem kinetischen Potential nicht auftritt. Um die obige Methode anwenden zu können, müssen wir wie früher (Ziff. 4) eine Parameterdarstellung einführen, welche t den übrigen Variablen gleichstellt. Nehmen wir alle Größen als Funktionen eines Hilfsparameters τ an:

$$t = t(\tau), \qquad q_k = q_k(\tau),$$

derart, daß $t(\tau_1) = t_1$, $t(\tau_2) = t_2$ wird, und bezeichnen die Ableitung nach τ durch einen Strich, so wird

$$\dot{q}_k = \frac{q_k'}{t'},$$

und daher die kinetische Energie T, die wir als homogene quadratische Funktion der $\dot{q}_k$ voraussetzen,

$$T(\dot{q}_k) = \frac{1}{t'^2} T(q_k').$$

Das Hamiltonsche Prinzip geht also in

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{1}{t'} T(q_k') - U(q_k) t' \right\} d\tau = \text{Extremum}$$

über, wobei als Randbedingung zu fordern ist, daß für $\tau = \tau_1$ bzw. $\tau = \tau_2$ die q_k und t in bestimmte Werte $q_k^{(1)}$ und $t^{(1)}$ bzw. $q_k^{(2)}$, $t^{(2)}$ übergehen. Jetzt ist t nicht mehr ausgezeichnet, und wir können daher die vorigen Überlegungen anwenden. t tritt an die Stelle von q_1 und τ an die von t, während

$$L = \frac{1}{t'} T - U t'$$

wird. Ein Integral dieses Variationsproblems wird

$$\frac{\partial L}{\partial t'} = -\frac{1}{t'^2} T(q_k') - U = -E, \tag{4}$$

also natürlich das Energieintegral. Mit seiner Hilfe erhält man als Äquivalent mit dem Hamiltonschen Prinzip die Form (1), die hier

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{1}{t'} T(q_k') - U t' + E t' \right\} d\tau = \text{Extremum} \tag{5}$$

lautet, wo also die Randwerte von t nicht mehr vorgeschrieben sind. Führen wir wieder rückwärts t als Variable ein, so wird daraus

$$\int_A^B (T - U + E)\, dt = \text{Extremum}. \tag{6}$$

Dies ist ein neues, mit dem Hamiltonschen äquivalentes Prinzip der Mechanik, das in der Literatur wohl noch nicht bekannt ist und **Hilbertsches Prinzip** genannt werden soll. Es besagt:

Ein Punktsystem bewegt sich so, daß von allen Bewegungen, die mit irgendeinem zeitlichen Verlauf von dem Anfangsort A mit den Koordinaten $q_k = q_k^{(1)}$ zu dem Endpunkt B mit den Koordinaten $q_k = q_k^{(2)}$ führen, die wirklich eintretende Bewegung das In-

tegral (6) **zum Extremum machen**, wo E der im Anfangspunkt gegebene Wert der Totalenergie ist.

Aus dem Prinzip folgt natürlich der Energiesatz, da t nicht explizit im Integranden auftritt. Es erfordert ihn aber nicht als Nebenbedingung und steht dementsprechend in der Mitte zwischen dem Hamiltonschen Prinzip und dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

Da E konstant ist, kann man für (6) auch schreiben

$$\int_A^B (T-U)\,dt + E(t_2 - t_1) = \text{Extremum},$$

wo $t_2 - t_1$ die noch unbekannte Zeit ist, die das System für seinen Weg braucht. Zum Hamiltonschen Prinzip gelangt man also zurück, wenn man die Zeit $t_2 - t_1$ der Bewegung gibt.

Zu dem Prinzip der kleinsten Wirkung gelangt man, indem man den aus (6) bereits folgenden Energiesatz $T + U = E$ als Nebenbedingung hinzufügt. Man kommt so zu der Form (3), die wegen (4) die Gestalt

$$2\int_A^B T\,dt = \text{Extremum} \qquad \text{während} \qquad T + U = E$$

annimmt, also genau zu dem Prinzip der kleinsten Wirkung (siehe Kap. 2, Ziff. 25). Das Extremum ist unter allen Funktionen zu suchen, die in irgendeiner Zeit von dem Anfangs- zu dem Endpunkt führen und dabei dem Energiesatz genügen.

Endlich kann man noch t ganz eliminieren, also die Form (3a) erreichen. Hierzu verwendet man passend wieder die Parameterdarstellung. Dies ist aber genau das Verfahren, das in Kapitel 2, Ziff. 26 zu dem Jacobischen Prinzip führte, das sich also auch in diese Überlegungen einordnen läßt.

12. Die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung. Wir wenden uns jetzt der Integrationstheorie der kanonischen Bewegungsgleichungen

$$H = H(q_k, p_k, t), \qquad \dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{1}$$

zu. Bruchstücke einer solchen sind uns mehrmals schon (in den Ziff. 2, 7, 9 und 10) begegnet, doch fehlt noch das wichtigste: ein systematisches Verfahren, das im folgenden beschrieben werden soll. Dabei wird von den kanonischen Transformationen weitgehender Gebrauch gemacht.

Nach Ziff. 5 (5) wird die neue Hamiltonsche Funktion bei einer kanonischen Transformation des Problems (1)

$$K = H + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Wir fragen, ob es möglich ist, durch geeignete Wahl der Funktion V zu erreichen, daß **die neue Hamiltonsche Funktion** K **des Systems verschwindet**. Dann ist gewissermaßen das mechanische Problem auf ein Gleichgewichtsproblem transformiert. Die Funktion, die dies leistet, wollen wir zum Unterschied von anderen Erzeugenden mit R bezeichnen.

Nun soll R eine Funktion von den q_k, Q_k und t sein und

$$p_k = \frac{\partial R}{\partial q_k}, \qquad P_k = -\frac{\partial R}{\partial Q_k}, \qquad K = H + \frac{\partial R}{\partial t} \tag{2}$$

werden. Die Bedingung, die R erfüllen muß, damit K verschwindet, lautet also

$$\frac{\partial}{\partial t} R(q_k, Q_k, t) + H(q_k, p_k, t) = 0$$

oder nach (2)

$$\frac{\partial R}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial R}{\partial q_k}, t\right) = 0. \tag{3}$$

Dies ist eine **partielle Differentialgleichung erster Ordnung** für R, **die zuerst von HAMILTON aufgefunden wurde.** Sie entsteht, indem man in der Hamiltonschen Funktion H die p_k durch die Ableitungen von R nach den entsprechenden q_k ersetzt. Da (3) für alle beliebigen Werte der Q_k bestehen muß, so spielen diese die Rolle von Integrationskonstanten.

Die Bedeutung der partiellen Differentialgleichung (3) liegt im folgenden. Nehmen wir an, wir hätten ein f willkürliche Konstanten $\alpha_1, \ldots \alpha_f$ enthaltendes Integral von (3)

$$R(q_1 \ldots q_f, \alpha_1, \ldots \alpha_f, t) = 0$$

gefunden, also eine Funktion, die für alle Werte der Integrationskonstanten der Differentialgleichung genügt. Dies ist natürlich nicht die allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichung, die ja eine willkürliche Funktion enthalten müßte, sondern ein sogenanntes vollständiges Integral. Wir können dann diese Konstanten α_k als neue Variable Q_k einführen, da ja R eine Funktion der alten und neuen Lageparameter sein soll. Die Transformationsformeln (5) von Ziff. 3 liefern in diesem Fall

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial R}{\partial q_k}, \\ P_k &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k} = +\beta_k, \\ K &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und die neuen kanonischen Gleichungen werden infolge der dritten Zeile einfach

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{d\alpha_k}{dt} = 0, \qquad \frac{dP_k}{dt} = \frac{d\beta_k}{dt} = 0.$$

Also sind sowohl die α_k als auch die β_k konstante Größen für das mechanische System, denen beliebige Werte erteilt werden können. Sie heißen die **kanonisch konjugierten Konstanten.** Damit ist die Integration der Differentialgleichungen des mechanischen Problems vollkommen durchgeführt; denn die Gleichungen (4) liefern die ursprünglichen Koordinaten des Systemes als Funktionen der Zeit und der $2f$ willkürlichen Konstanten α_k und β_k.

Die Integration der kanonischen Gleichungen ist also zurückgeführt auf die Auffindung eines f Konstanten enthaltenden Integrals der partiellen Differentialgleichung (3). Hiermit scheint zunächst nicht viel gewonnen, da partielle Differentialgleichungen in der Regel schwieriger zu behandeln sind als gewöhnliche. Es hat sich aber in der Mechanik gezeigt, daß für viele wichtige Fälle die partielle Differentialgleichung relativ einfache Formen annimmt, so daß ihre Einführung tatsächlich einen großen Fortschritt bedeutet[1]).

Nur ein einziger Schritt sei hier noch ausgeführt. **Enthält die Hamiltonsche Funktion H die Zeit nicht explizit, so läßt sich die Differentialgleichung (3) etwas vereinfachen.** Machen wir für R folgenden Ansatz:

$$R = S(q_k, \alpha_1, \ldots \alpha_f) - \alpha_1 t, \tag{5}$$

wo S nicht mehr von t abhängen soll, und gehen wir mit diesem Ansatz in (3) ein, so kommt

$$\alpha_1 = H\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = W, \tag{6}$$

[1]) Siehe hierzu das folgende Kap. 4 über die Störungstheorie.

wodurch die Zeit t eliminiert wird. α_1 wird dabei im allgemeinen die Energiekonstante und als solche mit W bezeichnet. Haben wir nun ein Integral S der partiellen Differentialgleichung (6) gefunden, das außer von α_1 noch von $f-1$ weiteren unabhängigen Konstanten abhängt, so sind die Lösungen der Bewegungsgleichungen

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad \beta_l = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_l}, \quad t - \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}. \qquad (l = 2, \ldots f) \qquad (7)$$

Die Gleichungen (3) und (6) sind die einfachsten Formen der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung, die Formeln (4) und (7) enthalten die Lösungen des Bewegungsproblems in der durchsichtigsten Gestalt. Doch werden praktisch mannigfache Variationen des beschriebenen Verfahrens angewandt. So kann man an Stelle von (3) auch verlangen, daß die neue Hamiltonsche Funktion K, anstatt zu verschwinden, eine beliebige Zeitfunktion $f(t)$ werde. Man hat hierzu als Erzeugende der kanonischen Transformation die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = f(t) \qquad (8)$$

zu nehmen. R ist dann mit T durch die Beziehung

$$R = T - \int f(t)\,dt \qquad (9)$$

verknüpft. Z. B. kann man

$$f(t) = \text{konst.} = \alpha_1$$

fordern. (Dies liegt nahe, wenn es sich um eine kleine von außen kommende Störung eines sonst abgeschlossenen Systems handelt, das ohne sie konstanten Energieinhalt besitzt.) Damit wird aus den Gleichungen (8) und (9)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = \alpha_1, \qquad (8\text{a})$$

$$R = T - \alpha_1 t. \qquad (9\text{a})$$

Hängt speziell H nicht explizit von t ab, so kann man auch T als von t unabhängig annehmen und kommt damit auf (6) bzw. (5) zurück.

Ferner ist es im Fall eines abgeschlossenen Systems zwar am einfachsten, aber nicht immer zweckmäßig, die Energiekonstante selbst als eine der Integrationskonstanten des vollständigen Integrals S zu wählen. Aus Normierungsgründen werden in der Theorie bedingt periodischer Systeme (vgl. Kap. 4) und deren Anwendungen in der Quantentheorie andere Integrationskonstante gewählt — wir wollen sie J_k nennen —, in welchen sich die neue Hamiltonsche Funktion

$$\alpha_1 = K(J_1 \ldots J_f) \qquad (10)$$

schreibt. Man kann jedoch leicht mit einer Erzeugenden der Form $V = \sum_k \alpha_k(J_1 \ldots J_f)\beta_k$ die Variablen α_k, β_k auf die neuen Konstanten J_k und die ihnen kanonisch konjugierten Variablen w_k transformieren. Die letzteren sind wegen (10) und $\dot{w}_k = \frac{\partial K}{\partial J_k} =$ konst. lineare Funktionen der Zeit.

In allen Fällen bleibt für die Aufstellung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung der Gesichtspunkt bestehen, daß auf neue Variable transformiert werden soll, deren eine Schar Bewegungskonstante sind, deren konjugierte Schar also in K nicht vorkommt. Mit anderen Worten: man sucht eine Erzeugende einer kanonischen Transformation auf *zyklische* Variable, zu deren Auffindung eben die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung führt.

Anhangsweise sei noch bemerkt, daß die Form (1) der Hamiltonschen Differentialgleichung formal ganz der Form (6) entspricht, wenn man nach Ziff. 4 die Zeit ebenfalls als kanonische Variable behandelt.

13. Die einfachsten Fälle der Integration. Die Lösung der Bewegungsaufgabe Ziff. 12 (1) ist jetzt auf die Integration der partiellen Differentialgleichung Ziff. 12 (5) oder (6) zurückgeführt. Es ist ein mit f Integrationskonstanten α_k versehenes vollständiges Integral derselben zu suchen. Ein stets zum Ziel führendes Verfahren läßt sich nicht angeben. Hier seien nur zwei einfache Fälle der Behandlung von Ziff. 12 (6) besprochen.

Der erste Fall, der eine einfache Integration erlaubt, liegt vor, wenn alle Variablen mit Ausnahme einer einzigen (q_1) zyklisch sind. Man kennt alsdann die $f-1$ ersten Integrale

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \alpha_k \qquad (k = 2, \ldots f)$$

und findet

$$S = \sum_{k=2}^{f} \alpha_k q_k + S_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_f).$$

Die Differentialgleichung Ziff. 12 (6) reduziert sich, da H von den zyklischen Variablen $q_2 \ldots q_f$ unabhängig ist, auf eine gewöhnliche

$$H\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}, q_1, \alpha_2, \ldots \alpha_f\right) = W = \alpha_1,$$

aus der dann S_1 durch Quadratur gewonnen wird.

Der andere Fall, der eine leichte Integration gestattet, tritt ein, wenn die Differentialgleichung Ziff. 12 (6) sich in den Variablen p_k, q_k separieren läßt. Dies bedeutet, daß bei dem Ansatz

$$S = \sum_k S_k(q_k, \alpha_1, \ldots \alpha_f)$$

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial S_k(q_k)}{\partial q_k}$$

— d. h. wenn S als eine Summe von Funktionen angesetzt wird, die einzeln nur je von einer Koordinate q_k abhängen, — die Differentialgleichung Ziff. 12 (6) in f verschiedene Differentialgleichungen für die S_k zerfällt. Dazu ist erforderlich, daß sich schon innerhalb der Gleichung

$$H(p_1, \ldots p_f, q_1, \ldots q_f) = W$$

jeder Impuls p_k als Funktion der zugehörigen Koordinate q_k allein auffassen läßt, sich also diese Gleichung in f einzelne

$$H_k(p_k, q_k) = A_k(\alpha_1, \ldots \alpha_f)$$

zerspaltet. Die f verschiedenen Differentialgleichungen für die S_k lauten dann

$$H_k\left(\frac{\partial S_k}{\partial q_k}, q_k\right) = A_k.$$

Sie erlauben die Berechnung der S_k durch bloße Quadraturen.

Die Bedingung dafür, daß H in den benutzten Koordinaten separierbar ist, läßt sich nach LEVI-CIVITA[1]) schreiben

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial H}{\partial q_j} & \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \frac{\partial H}{\partial q_k} & \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_k} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_k} \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} & \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_k} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} j, k = 1, 2, \ldots f \\ j \neq k. \end{cases}$$

[1]) T. LEVI-CIVITA, Math. Ann. Bd. 59, S. 383. 1904; F. A. DALL'ACQUA, ebenda Bd. 66, S. 398. 1908; H. KRUSE, ebenda Bd. 84, S. 277. 1921.

Meist ist die Separierbarkeit freilich der Funktion H anzusehen. Sie ist abhängig vom Koordinatensystem und es bedarf im allgemeinen der Einführung besonderer Separationskoordinaten, um die gewünschte Aufspaltung zu erreichen. In manchen Fällen ist das Separationssystem durch die Grenzen des Bahnbereichs physikalisch ausgezeichnet. Doch trifft dies nicht immer zu[1]); in der Tat hat BURGERS[2]) gezeigt, daß bei der Bewegung eines elektrisch geladenen Oszillators im Magnetfeld das Separationssystem nur durch eine Berührungstransformation eingeführt werden kann.

Beispiele für die Integration durch Separation sind unter anderen jede Zentralbewegung [wie aus Ziff. 2 (15) zu sehen], ferner das Zweizentrenproblem, das, wie schon JACOBI gezeigt hat, in elliptischen Koordinaten mit den beiden festen Zentren als Brennpunkten separierbar ist[3]). Es ist ferner WEINACHT gelungen[4]), für den Fall eines einzigen Massenpunktes in einem konservativen Kraftfeld alle überhaupt durch Punkttransformation separierbaren Systeme zu finden. Das wichtigste Ergebnis ist, daß die allgemeinsten für die Separation der Variablen in Betracht kommenden Lagekoordinaten in diesem Fall diejenigen des dreiachsigen Ellipsoids sind (einschließlich ihrer Ausartungen). Auch die zugehörigen Funktionen für die potentielle Energie lassen sich angeben und sind naheliegende Verallgemeinerungen der obenerwähnten Fälle. Ferner erlaubt jede kleine Schwingung eines beliebig zusammengesetzten Systems um eine stabile Gleichgewichtslage Separation nach der Methode der Eigenschwingungen. Für die Bewegung eines starren Körpers sind separierbar die Fälle des allgemeinsten kräftefreien Kreisels (evtl. noch mit eingebautem Schwungrad) und der des symmetrischen Kreisels in einem Schwerefeld[5]).

14. Der Unabhängigkeitssatz der Variationsrechnung; das Eikonal. Zum Schlusse des Kapitels über die Hamilton-Jacobische Mechanik wollen wir noch einen Einblick in die tiefgehenden Gedankengänge zu geben versuchen, welche die Schöpfer dieser Theorie geleitet und welche in neuester Zeit in den Arbeiten von DE BROGLIE, SCHRÖDINGER u. a. zu einer fundamentalen Weiterführung der Mechanik geführt haben. Um diesen eigentlichen Kern der Hamilton-Jacobischen Theorie wirklich zu verstehen, ist es nützlich, noch einmal einige Theoreme der Variationsrechnung heranzuziehen. Hierzu gehen wir von der Form (4) von Ziff. 2 des Variationsproblems

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{L+\sum_k \frac{\partial L}{\partial h_k}(\dot q_k-h_k)\right\}dt=\text{Extremum} \tag{1}$$

aus. Das Integral hat hier die einfache Form

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left(A+\sum_k B_k\frac{dq_k}{dt}\right)dt \tag{2}$$

mit

$$A=L-\sum_k\frac{\partial L}{\partial h_k}h_k,\qquad B_k=\frac{\partial L}{\partial h_k}.$$

---

1) E. FUES, ZS. f. Phys. Bd. 34, S. 788. 1925.

2) J. M. BURGERS, Het Atoommodel van Rutherford-Bohr, Leiden 1918.

3) Eine genaue Diskussion und Anwendung auf das H_2^+-Molekül geben W. PAULI JR., Ann. d. Phys. Bd. 68, S. 177. 1922 und K. F. NIESSEN, Dissert. Utrecht 1922. Einen Spezialfall der Separation in elliptischen Koordinaten bildet die Behandlung des Starkeffektes in parabolischen Koordinaten durch SCHWARZSCHILD, Berl. Ber. 1916, S. 548 und P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. Bd. 50, S. 489. 1916.

4) J. WEINACHT, Math. Ann. Bd. 91, S. 279. 1924.

5) Vgl. G. KOLOSSOFF, Math. Ann. Bd. 60, S. 232. 1905; F. REICHE, Phys. ZS. Bd. 19, S. 394. 1918; P. S. EPSTEIN, Verh. d. D. Phys. Ges. Bd. 17, S. 398. 1916; Phys. ZS. Bd. 20, S. 289. 1919; H. A. KRAMERS, ZS. f. Phys. Bd. 13, S. 343. 1923.

Der Integrand ist also ein linearer Ausdruck in den Ableitungen $\dot{q}_k$ der q_k. Daneben treten noch die von den q_k unabhängig zu variierenden Funktionen h_k auf, aber nicht ihre Ableitungen. Diese Form erinnert an die vollständige Ableitung

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

einer Funktion Φ nach der Zeit. Sie legt daher die Frage nahe, ob es nicht bei spezieller Wahl der h_k als Funktionen der q_k und t möglich ist, das Integral (2) vom Wege im $q\,t$-Raum unabhängig zu machen, so daß es für alle möglichen Funktionen $q_k(t)$ denselben Wert erhält, also aus einer Funktionenfunktion im Sinne der Variationsrechnung zu einer reinen Ortsfunktion der Integrationsgrenzen degeneriert. Die Werte der h_k bilden dann eine Belegung des $q\,t$-Raumes, derart, daß jedem Punkt ein bestimmter Wert der h_k zugeordnet ist. Man nennt eine solche Belegung ein Feld, und es ist die Frage, ob es Belegungen gibt, bei denen das Integral (2) vom Wege unabhängig wird. Notwendig und hinreichend ist hierfür, daß die B_k und A als partielle Ableitungen der Funktion $\Phi(q_k, t)$ erscheinen:

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad B_k = \frac{\partial \Phi}{\partial q_k}.$$

Dann wird das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \Big(A + \sum_k B_k \dot{q}_k\Big)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \dot{q}_k\Big)\, dt = \Phi(t_2, q_k^{(2)}) - \Phi(t_1, q_k^{(1)})$$

eine reine Funktion der Integrationsgrenzen im $q\,t$-Raum. Hierfür müssen die A und B_k die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial A}{\partial q_k} = \frac{\partial B_k}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_k}{\partial q_l} = \frac{\partial B_l}{\partial q_k}$$

erfüllen.

Die allgemeine Antwort, wie man das h-Feld zu wählen hat, damit diesen Bedingungen genügt wird, liefert der Unabhängigkeitssatz von Hilbert:

Das Integral (2) wird dann vom Wege unabhängig, wenn man irgend ein System intermediärer Integrale

$$\frac{dq_k}{dt} = \psi_k(q_1, \ldots q_f, t)$$

der Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$[L]_{q_k} = 0 \tag{3}$$

nimmt und für jeden Punkt $q_1, \ldots q_f, t$ die h_k gleich den entsprechenden ψ_k wählt.

Wir beweisen diesen Satz hier nur für Systeme mit einem einzigen Freiheitsgrad, d. h. nur einem Paar p, q bzw. h. Dann besteht nur eine einzige Integrabilitätsbedingung, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial q}\Big(L - h\frac{\partial L}{\partial h}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial h}\Big). \tag{5}$$

Differenzieren wir aus, so erhalten wir als Bedingung für die Unabhängigkeit des Integrals (1) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für $h(q, t)$

$$\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial q} - h\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial h\, \partial q} + \frac{\partial^2 L}{\partial h^2}\frac{\partial h}{\partial q}\Big) = \frac{\partial^2 L}{\partial t\, \partial h} + \frac{\partial^2 L}{\partial h^2}\frac{\partial h}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial^2 L}{\partial h^2}\Big(\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial h}{\partial q}\Big) + h\frac{\partial^2 L}{\partial h\, \partial q} + \frac{\partial^2 L}{\partial h\, \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{6}$$

welche die dem Variationsproblem **adjungierte partielle Differentialgleichung** heißt. Diese Differentialgleichung ist nun, das ist die Behauptung, dann und nur dann erfüllt, wenn $h(q, t)$ ein intermediäres Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung

$$[L]_q = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\ddot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\,\partial q}\dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\,\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{7}$$

ist.

Sei nämlich $\dot{q} = h(q, t)$ ein solches Integral von (7), d. h. (7) sei identisch erfüllt, wenn man für q die allgemeine Lösung

$$q = q(t, \alpha) \tag{8}$$

der Differentialgleichung $\dot{q} = h(q, t)$ einsetzt, die noch die Konstante α enthält, so gilt

$$\ddot{q} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial q}\dot{q},$$

identisch in t und α. Setzen wir dies in (7) ein,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial q}\dot{q}\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\,\partial q}\dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\,\partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

und schreiben wieder h für $\dot{q}$, so bekommt man eine Beziehung, die formal genau wie die adjungierte partielle Differentialgleichung (6) aussieht, aber zunächst eine gewöhnliche Gleichung in t und α darstellt, die identisch für alle Werte von t und α erfüllt sein muß. Führt man aber an Stelle von α vermittels (8) q ein, so muß sie auch identisch in t und q gelten, d. h. aber, alle intermediären Integrale $\dot{q} = h(q, t)$ der Lagrangeschen Differentialgleichung genügen auch der adjungierten, partiellen Differentialgleichung.

Ist umgekehrt $h(q, t)$ eine Lösung der adjungierten, partiellen Differentialgleichung (6) und genügt $q(t)$ der Gleichung $\dot{q} = h(q, t)$, so können wir $\partial h/\partial t + h \cdot \partial h/\partial q = \ddot{q}$ einsetzen und kommen damit, wenn wir wieder $\dot{q}$ für h schreiben, auf die Lagrangesche Differentialgleichung (7) zurück, womit unser Satz vollständig bewiesen ist. Für mehrere Freiheitsgrade läßt sich dann der Satz durch Zurückführung auf diesen Spezialfall verallgemeinern[1].

Die Lösungen eines Variationsproblems, also die Kurven, die den Lagrangeschen Differentialgleichungen genügen, werden gewöhnlich als Extremalen bezeichnet. Mit Hilfe einer f-parametrigen Schar von Extremalen läßt sich also immer ein Unabhängigkeitsfeld herstellen. Um dies in möglichst allgemeiner Weise auszuführen, also jedem Wertsystem $q_1, \ldots q_f, t$ ein Wertsystem $h_1, \ldots h_f$ zuzuordnen und damit die Bedingung des Unabhängigkeitsintegrals zu erfüllen, geht man wie folgt vor. Wir wählen ganz willkürlich irgendeine Funktion $F(q_k, t)$, die, gleich Null gesetzt, eine f-dimensionale Hyperfläche in dem Raum der q_k, t darstellt:

$$F(q_1, \ldots q_f, t) = 0, \tag{9}$$

und bestimmen zunächst die h_k für alle Punkte der Fläche aus der Forderung, daß für sie der Integrand des Unabhängigkeitsintegrales

$$L + \sum_k \frac{\partial L}{\partial h_k}(\dot{q}_k - h_k)$$

---

[1]) D. Hilbert, Math. Ann. Bd. 62, S. 351. 1905.

verschwindet. Dies erreichen wir, indem wir die f Größen h_k jeweilig aus den f Gleichungen

$$\left(L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial h_k} h_k\right) : \frac{\partial L}{\partial h_1} : \frac{\partial L}{\partial h_2} : \cdots \frac{\partial L}{\partial h_f} = \frac{\partial F}{\partial t} : \frac{\partial F}{\partial q_1} : \frac{\partial F}{\partial q_2} : \cdots \frac{\partial F}{\partial q_f} \tag{10}$$

berechnen, da dann der Integrand bis auf einen gleichgültigen Faktor gleich

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{dF}{dt}$$

wird, also in der Tat für die Fläche verschwindet. Sodann lassen wir von jedem Punkt der Fläche eine solche Kurve $q_k = q_k(t)$ ausgehen, deren Richtungsfaktoren $\dot{q}_k$ dort gerade gleich den eben bestimmten h_k sind, und im weiteren Verlauf den Lagrangeschen Differentialgleichungen (5) genügen. Dies ist stets möglich, da sich ja immer in einem gegebenen Punkt mit gegebener Richtung für eine beliebige Differentialgleichung zweiter Ordnung eine solche Integralkurve finden läßt. Dies heißt nichts anderes, als daß wir gerade die Integralkurven nehmen, die zu der Fläche transversal stehen, welche Bedingung meistens mit einer Orthogonalität im gewöhnlichen Sinne identisch ist.

Da die Fläche $F = 0$ selbst f-dimensional ist, so haben wir also eine f-parametrige Kurvenschar bestimmt, die gerade den $f+1$-dimensionalen $q\,t$-Raum überall dicht erfüllt, da im allgemeinen, abgesehen von etwaigen singulären Punkten, durch jeden Raumpunkt gerade eine Kurve hindurchgeht. Die Werte der h_k in einem beliebigen Punkt bestimmen wir einfach aus der Tangentenrichtung der durch ihn gehenden Extremale, setzen also

$$h_k = \dot{q}_k .$$

Gerade dieses h-Feld macht nach dem Unabhängigkeitssatz das Integral (2) zu einer reinen Ortsfunktion.

Die Bedeutung des Unabhängigkeitsintegrals sieht man nun, wie folgt, ein. Wir denken uns in das Feld noch alle transversalen Flächen eingezeichnet, d. h. die Flächen $F =$ konst., die den Bedingungen (10) genügen. Das Integral J, erstreckt zwischen irgend zwei Punkten einer solchen Fläche, ist offenbar gleich Null. Wir berechnen es jetzt weiter für einen Weg, der von dem Anfangspunkt A der wirklichen Bewegung zu dem Endpunkt B führt. Wegen der Unabhängigkeit vom Weg, können wir diesen möglichst passend wählen. Wir gehen zunächst auf der Transversalfläche, auf der der Anfangspunkt liegt, vorwärts bis zu dem Punkt C, in dem die Extremale mündet, die auch durch den Endpunkt B geht und dann auf dieser Extremalen weiter. Der erste Teil $A\,C$ liefert keinen Beitrag zu dem Integral. Für den zweiten Teil $C\,B$ sind überall die $h_k = \dot{q}_k$, und J reduziert sich also auf $\int\limits_C^B L(q_k, \dot{q}_k, t)\,dt$, da ja gerade die $\dot{q}_k = h_k(t)$ so bestimmt waren, daß sie den Lagrangeschen Differentialgleichungen genügen. J ist also nichts anderes als der Extremalwert des Integrals des Hamiltonschen Prinzips zwischen den beiden Transversalflächen, die durch den Anfangs- und den Endpunkt gehen. Da J für Wege auf diesen Flächen verschwindet, so sind sie also auch Flächen konstanter Wertdifferenz des Hamiltonschen Integrals zwischen korrespondierenden Punkten, d. h. Punkten, die auf derselben Extremale liegen. Die Größe J, die für ein gegebenes Extremalenfeld eine Funktion des Anfangs- und Endpunktes ist, hat für viele Gebiete der Mathematik und Physik eine große Bedeutung, und wird gewöhnlich mit der in der Optik üblichen Bezeichnung als Eikonal benannt.

Natürlich gibt es eine große Mannigfaltigkeit von Eikonalen, da sie ja von einer willkürlichen Funktion abhängen, nämlich der Ausgangsfläche $F = 0$. Unter allen möglichen Ausgangsflächen gibt es speziell solche, die in einen Punkt, nämlich den Anfangspunkt des Integrationsweges, ausgeartet sind. Auch von ihm aus bekommt man ein den ganzen Raum überdeckendes Feld, indem man sämtliche Extremalen, die durch ihn hindurchgehen, als Erzeugende des Feldes nimmt. Das Eikonal für einen Punkt, der vom Anfangspunkt im Verlauf der Bewegung erreicht wird, ist also offenbar gleich dem Extremalwert des Hamiltonschen Integrals selbst, genommen über die wirkliche Bahnkurve.

15. Anwendung auf die Mechanik; die Bedeutung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung. Für alle möglichen Eikonale läßt sich nun eine partielle Differentialgleichung aufstellen. Aus der Definition (2) von Ziff. 14 ergibt sich sofort, daß die Ableitungen von J durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= L - \sum_k \frac{\partial L}{\partial h_k} h_k, \\ \frac{\partial J}{\partial q_k} &= \frac{\partial L}{\partial h_k} \end{aligned}\right| \tag{1}$$

gegeben sind. Die rechten Seiten sind noch Funktionen der h_k, also des gewählten Feldes. Aus diesen $f + 1$ Beziehungen lassen sich aber gerade die f Größen h_k eliminieren, und es bleibt dann eine Bedingung zwischen den Ableitungen von J, also eine partielle Differentialgleichung, übrig. Diese Elimination läßt sich ohne weiteres durch die Legendresche Transformation, also den Übergang zu kanonischen Koordinaten, ausführen. Wir hatten ja in (5) und (7), Ziff. 2

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial h_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k},$$
$$H = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \dot q_k - L$$

gesetzt, und wir erhalten also aus (1) durch Elimination der p_k

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H\left(q_k, \frac{\partial J}{\partial q_k}, t\right) = 0 \tag{2}$$

als partielle Differentialgleichung für die Eikonale. Dies ist aber gerade die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung (3) von Ziff. 12. Durch diesen fundamentalen Zusammenhang ist die Bedeutung des Integrals der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung als Wert des Hamiltonschen Integrals zwischen den Transversalflächen des Feldes aufgedeckt.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses läßt sich sofort der Hauptsatz von Ziff. 12 auf neue Art ableiten. Wir denken uns in der Definitionsgleichung Ziff. 14 (9) der Ausgangsfläche f Parameter α_k eingeführt, so daß wir im ganzen eine f-parametrige Schar von Flächen haben, deren eine unsere Ausgangsfläche ist. Zu jeder anderen Fläche dieser Schar gibt es ebenfalls ein nach unserer Konstruktion bestimmbares Unabhängigkeitsfeld, so daß wir auch eine f-parametrige Schar solcher Felder haben. D. h. wir nehmen zur Definition des Feldes eine Schar von intermediären Integralen der Lagrangeschen Gleichungen, die schon f Integrationskonstante enthält

$$h_k = \dot q_k(q_i, \alpha_i, t).$$

Zu jedem Wertsystem der α_k gehört dann ein Eikonal, und die Gesamtheit dieser Eikonale läßt sich offenbar in eine einzige Funktion $J(\alpha_k)$, die außer von den Anfangs- und Endpunkten noch von den f Parametern abhängt, zusammenfassen:

$$J = \int_A^B \left\{ L(q_l, h_l(q_l, \alpha_l, t), t) + \sum_k \frac{\partial L}{\partial h_k}(\dot{q}_k - h_k) \right\} dt.$$

Mit J müssen aber auch die Ableitungen nach den Parametern α_l reine Ortsfunktionen werden, und zwar ergibt sich wegen

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_l} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial h_k} \frac{\partial h_k}{\partial \alpha_l}$$

einfach

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_l} = \int_A^B \sum_k (\dot{q}_k - h_k) \frac{\partial^2 L}{\partial h_k \partial \alpha_l} dt. \tag{3}$$

Die Integrale rechter Hand verschwinden nun bei einem Fortschreiten auf den Integralkurven selbst, da für diese ja stets $\dot{q}_k = h_k$ ist, d. h. die $\partial J/\partial \alpha_l$ stellen Funktionen der q_k und t dar, die auf den Integralkurven selbst konstant sind. Sie müssen also, gleich Konstanten $-\beta_l$ gesetzt,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_l} = -\beta_l, \tag{4}$$

selbst Integrale der Lagrangeschen Differentialgleichungen sein, was zu beweisen war.

Durch Umkehrung dieses Satzes erhält man ebenfalls ein wichtiges mechanisches Theorem. Kennen wir die Hälfte der Integrale eines mechanischen Systems, so läßt sich die andere Hälfte durch bloße Quadraturen finden. In der Tat, seien f Funktionen

$$\varphi_f(\dot{q}_k, q_k, t, \alpha_1, \ldots \alpha_f) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_f(p_k, q_k, t, \alpha_1, \ldots \alpha_f) = 0$$

bekannt, so kann man durch Auflösung nach den $\dot{q}_k$ diese als Funktionen der q_k, t und der f ersten Integrationskonstanten α_f finden, mithin auch ein f-parametriges Extremalenfeld

$$h_k = \dot{q}_k(q_l, t, \alpha_l).$$

Setzen wir diese Werte in das Integral (4) von Ziff. 14 ein, so wird nach dem Gesagten der Integrand ein vollständiges Differential. Es läßt sich also das zugehörige Eikonal durch Quadraturen ausrechnen, und man hat dann in (4) die restlichen Bewegungsintegrale. Benutzt man die kanonische Form der Differentialgleichungen, hat also als Integrale die p_k und nicht die $\dot{q}_k$ als Funktionen der q_k, t und α_k gefunden, so braucht man sich nicht erst die $\dot{q}_k$ auszurechnen, sondern transformiert direkt mit Hilfe der Legendreschen Transformation das Integral J auf die p_k und q_k. Mit (5) und (7) von Ziff. 2 findet man sofort

$$J = \int_A^B \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - H\right) dt. \tag{5}$$

Es wird also unter unserer Voraussetzung

$$dJ = \sum_k p_k\, dq_k - H\, dt \tag{6}$$

ein vollständiges Differential.

Nach dem oben bewiesenen Satz ist z. B. jedes mechanische Problem mit einem Freiheitsgrad durch Quadraturen lösbar, wenn es das Energieintegral besitzt, und jedes Problem mit zwei Freiheitsgraden, wenn außer dem Energieintegral noch ein weiteres Integral bekannt ist.

Auch das Integral S der bereits nach der Zeit integrierten Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (6) von Ziff. 12 für Systeme, die die Zeit nicht explizit enthalten, hat eine einfache Bedeutung. Es ist nämlich gerade der Extremalwert des Integrals des Prinzips der kleinsten Wirkung, also die Wirkungsfunktion, und damit auch des für konservative Systeme mit ihm identischen Integrals des Jacobischen Prinzips. Wir haben, da wir den Energiesatz voraussetzen,

$$2T = T - U + T + U = T - U + \alpha_1,$$

wo α_1 die Energiekonstante ist. Infolgedessen wird nach (5) von Ziff. 12

$$2\int_A^B T\, dt = \int_A^B (T - U)\, dt + \alpha_1 t = J + \alpha_1 t = S; \tag{7}$$

d. h. S steht zum Prinzip der kleinsten Wirkung in der Jacobischen Form in derselben Beziehung wie J zum Hamiltonschen Prinzip.

Die Betrachtungen dieser Ziffer zeigen, daß die Integration einer partiellen Differentialgleichung der Hamilton-Jacobischen Form, was keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, mit der Integration der entsprechenden kanonischen Gleichungen äquivalent ist. Es ist dies nichts anderes als die Jacobische Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, und die Extremalkurven des Hamiltonschen Prinzips, also die mechanischen Bahnkurven, stellen die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung dar. In der Tat kann man, wenn die kanonischen Gleichungen gelöst, also alle Extremalen gefunden sind, zu jeder Funktion $F(q_k, t) = 0$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung finden, die für $t = t_1$, $q_k = q_k^0$ in F übergeht. Tatsächlich verfährt man aber, wie gesagt, meistens umgekehrt, indem man mit Hilfe von Integralen der partiellen Differentialgleichung (2) die Lagrangeschen oder kanonischen Gleichungen integriert.

Dies war der Ausgangspunkt, der Jacobi zu seiner Theorie führte. Der andere Entdecker dieser Zusammenhänge, Hamilton, ging von der geometrischen Bedeutung des Eikonals aus, die in der Tat höchst bemerkenswert ist. Gehen wir nämlich von der Darstellung des Eikonals in Ziff. 14 (Beschreibung im $q\,t$-Raum) über zu einer Konstruktion im f-dimensionalen q-Raum allein, so erhalten wir ein System von bewegten Eikonalflächen $J(q_k, t) = c$ und im allgemeinen gleichfalls im Fluß befindlichen Extremalen (Bahnkurven) als ihre Trajektorien. Letztere liegen fest in dem oben [Gleichung (7)] besprochenen Fall einer zeitunabhängigen Hamiltonschen Funktion. Die Eikonalflächen schreiten nach $J = S - W_1 t$ dann über die festliegenden Flächen $S =$ konst. hinweg, derart, daß sie immer wieder mit einer neuen S-Fläche zur Deckung kommen. Das Bild ist dasjenige einer Wellenausbreitung, wie man es etwa von optischen Vorgängen her gewohnt ist.

Nehmen wir die Ausgangsfläche $F = 0$ als Erregungsfläche eines optischen Vorganges, so sind die Extremalen die Lichtstrahlen im Sinne der geometrischen Optik, und die fortschreitenden Eikonalflächen Flächen gleicher Phase, also eine Art Wellenflächen im Sinne des Huygensschen Prinzips. Das Prinzip der kleinsten Wirkung entspricht dann genau dem Fermatschen Prinzip des kürzesten Lichtweges, wenn wir den Brechungsindex in dem q-Raum als proportional zu der Wurzel aus der kinetischen Energie, die gleich $W - U$, also auch eine reine Ortsfunktion ist, annehmen. Damit ist die Lösung des mechanischen Problems auf die des korrespondierenden optischen zurückgeführt. Die Bahnkurven fallen zusammen mit den Strahlen der Optik. Die Hamilton-Jacobische Theorie entspricht also der geometrischen Optik. Diese Betrachtungen sind neuerdings die Grundlage geworden für die Weiterentwicklung der Quantenmechanik durch Schrödinger[1]), die auf dem Gedanken beruht, daß man für die Mechanik der Atome nicht mit der zur Strahlenoptik äquivalenten Mechanik ausreicht, sondern eine Erweiterung im Sinne der eigentlichen Wellentheorie zugrunde legen muß[2]).

---

[1]) E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik. Leipzig 1927.

[2]) Nähere Ausführungen über diese Zusammenhänge, die hier nur gestreift werden konnten, siehe den Artikel „Optik und Mechanik" von A. Landé in Bd. XX ds. Handb.

Kapitel 4.

Störungsrechnung.

Von

E. FUES, Stuttgart.

Mit 4 Abbildungen.

I. Einleitung.

1. Die Bedeutung der Störungstheorie für die Physik. Die Methoden der analytischen Mechanik reichen in Strenge nur zur Bewältigung der allereinfachsten Bewegungsprobleme von Punktsystemen aus. Zwar gelingt es beim Zweikörperproblem mit verhältnismäßig einfachen Mitteln, die berühmten Keplerschen Gesetze nachzuweisen[1], doch entzieht sich schon das Dreikörperproblem der exakten mathematischen Integration[2]. Seit langem sind die Astronomen bemüht, diese scheinbar unüberwindliche Schranke unserer Analyse einzureißen; es hat sich aber gezeigt, daß die Schwierigkeit nicht in der Unvollkommenheit mathematischer Methoden liegt, sondern im Mechanismus der Bewegung selbst begründet ist. POINCARÉ hat bewiesen, daß das Dreikörperproblem nicht die genügende Anzahl eindeutiger Integrale zuläßt, die notwendig sind, um für beliebige Zeit die Koordinaten als mehrfach periodische Funktionen der Zeit darzustellen. Kein Wunder also, daß die über ein Jahrhundert alten Versuche in dieser Richtung erfolglos waren.

Unter dem Zwang dieser Unmöglichkeit hat man früh zu Näherungsmethoden gegriffen. Die Kleinheit der auf einen Planeten von seinen Nachbarplaneten her einwirkenden Kräfte gegenüber der Sonnenanziehung erlaubt es, die Bewegungsgleichungen nach dem kleinen Verhältnis der Massen in Potenzreihen zu entwickeln, und daraus läßt sich eine gleichartige Entwicklung der Integrale herleiten. Es hat sich weiter gezeigt, daß dies Vorgehen nicht auf den Fall beschränkt ist, in dem die Natur des mechanischen Problems strenge eindeutige Integrale zuläßt, sondern daß sie formal auch weiterbesteht, wenn das betrachtete System von solcher Art ist, wie etwa das Dreikörperproblem. Allerdings kommt diesen formalen Lösungen keine absolute Konvergenz zu — darin äußert sich die Unmöglichkeit exakter Integration — doch sind sie in der praktischen Himmelsmechanik von der größten Bedeutung wegen der ihnen eigenen Semikonvergenz. Nichts anderes beabsichtigt der unter dem Namen Störungs-

[1] Vgl. Kap. 7, Ziff. 25 ds. Bandes ds. Handb.
[2] Vgl. Kap. 7, Ziff. 26ff. ds. Bandes.

theorie[1]) zusammengefaßte Zweig der Mechanik, als für beliebige mechanische Probleme, die sich als „Störungen" eines bekannten, integrierbaren Mechanismus auffassen lassen, ein formales Integrationsverfahren aufzustellen. Die Entwicklung dieser Methode ist vor allem geknüpft an die Namen Lagrange, Delaunay in einer früheren Periode und in weit größerer Vollkommenheit zu späterer Zeit an die der Astronomen Gyldén, Lindstedt, Bohlin sowie des Mathematikers Poincaré.

Die Physik hatte früher wenig Veranlassung, sich für diese Rechenweise zu interessieren, bis durch die Aufstellung des Bohrschen Atommodells plötzlich eine nahe Verwandtschaft der Atomtheorie zur kosmischen Astronomie geschaffen wurde[2]). Als erster hat denn auch Bohr selbst auf das Hilfsmittel aufmerksam gemacht, das, von den Astronomen gefertigt, für die Zwecke der Atomforschung bereit lag. Der Einfluß eines äußeren elektrischen Feldes und derjenige der relativistischen Trägheitskräfte auf die Keplerbahnen im Wasserstoffatom ließen sich mit der Methode der säkularen Störungen berechnen. Allein beim Mehrkörperproblem der Bohrschen Atome und Moleküle liegen die Verhältnisse viel ungünstiger als in der Himmelsmechanik. Der Entwicklungsparameter, das Verhältnis der Elektronenladung zur Kernladung, ist hier bei weitem nicht so klein wie dort, was die Konvergenz der Reihen ungünstig beeinflußt. Zum zweiten sind die Zeiträume, für welche man sich interessiert — gemessen an den Eigenperioden des Systems—, ungeheuer viel größer als in der Astronomie. Trotzdem sind eine Reihe von Atomproblemen störungstheoretisch behandelt worden. An der Übertragung der astronomischen Methoden in die Atomphysik haben vor allem mitgewirkt einerseits Epstein, andererseits Born und seine Mitarbeiter (Brody, Pauli, Heisenberg, Nordheim). Die direkte Ausbeute war nicht so groß, als man wohl zunächst gehofft hatte, oder vielmehr sie fiel in andere Richtung. Neben allgemeinen Erkenntnissen über Entartung und Entfaltung der Bewegung, über die „Effekte" in den Spektren, über Phasenbeziehungen und den allgemeinen Bewegungscharakter im Molekülverband ergab sich kein Verständnis des Heliumspektrums oder des Wasserstoffmolekülions, dagegen die immer sicherere Erkenntnis, daß die klassische Mechanik auch im Verein mit „Quantenbedingungen" nicht imstande ist, zu einem genauen Verständnis der komplizierten Atome zu führen. War aber auch der direkte Erfolg in der Hauptsache negativ, so war doch ein mathematisches Hilfsmittel geschaffen, das auf einen stets wachsenden Kreis von Aufgaben angewandt wird und sich gewiß in heute noch fernliegenden Gebieten der Physik einmal bewähren wird.

Inzwischen hat die Atommechanik eine neue Formulierung erfahren. Nach Heisenbergs Vorgang haben Born, Jordan, Dirac u. a. eine Theorie der

---

[1]) Von ausführlichen Lehrbüchern über den Gegenstand seien genannt: H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste. 3 Bände. Paris: Gauthier Villars 1905; H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. 3 Bände. Paris: Gauthier Villars 1892; C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. 2 Bände. Leipzig: Veit & Co. 1907; E. T. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Deutsch von Mittelsten Scheid. Berlin: Julius Springer 1924. Die nachfolgenden Lehrbücher und Abhandlungen behandeln den Gegenstand schon mit Rücksicht auf die Anwendungen in der (Bohrschen) Atomtheorie: J. M. Burgers, Het Atoommodel van Rutherford-Bohr. Dissert. Leiden. Haarlem: Erven Loosjes 1918; A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 4. Aufl. Braunschweig: Vieweg 1924; N. Bohr, Quantentheorie der Linienspektren. Braunschweig: Vieweg 1923; am ausführlichsten: M. Born, Vorlesungen über Atommechanik, Sammlung Struktur der Materie. Berlin: Julius Springer 1925.

Der Verf. verdankt zahlreiche Anregungen und Hinweise der Einsicht in einen ungedruckten Artikel von W. Pauli jun., der ursprünglich als Einleitung zu dessen Artikel Quantentheorie in diesem Handbuch Bd. XXIII gedacht war.

[2]) Vgl. den Artikel Quantentheorie von W. Pauli jun., ds. Handb. Bd. XXIII.

Spektralfrequenzen und -intensitäten geschaffen[1]), die zwar äußerlich der früheren Mechanik sehr ähnlich ist, aber so fremdartigen Rechenregeln folgt, daß sie nur mit Hilfe veränderter Grundbegriffe verstanden werden kann. SCHRÖDINGER konnte später nachweisen[2]), daß diesem Formalismus das Eigenschwingungsproblem eines Kontinuums zugeordnet ist, also etwas ganz anderes, als die Ausgangsgleichungen vermuten ließen. Doch besteht ein innerer Zusammenhang zwischen der „Wellenmechanik" der atomaren Welt und ihrem makroskopischen Grenzgesetz, der Punktmechanik, der die nahe formale Verwandtschaft beider verstehen läßt. Auch die Wellenmechanik hat ihre Störungstheorie, doch kann im vorliegenden Kapitel hierauf nicht eingegangen werden.

Die Betrachtungen dieses Kapitels machen durchweg Gebrauch von der in Kapitel 3 dargestellten, von HAMILTON und JACOBI erdachten Behandlung mechanischer Fragen. Sie knüpfen daher an die kanonische Form der Bewegungsgesetze eines mechanischen Systems von f Freiheitsgraden an (vgl. Kap. 3, Ziff. 2)

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \qquad (k = 1, 2, \ldots f) \tag{1}$$

Das Integrationsverfahren wird stets in einer Integration der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung bestehen (vgl. Kap. 3, Ziff. 12), und es wird die Theorie der kanonischen Umformung eines Problems (Kap. 3, Ziff. 3) benutzt werden.

Ehe auf den eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels, die Störungsrechnung, eingegangen werden kann, ist es notwendig, einige Bemerkungen über Bewegungsformen vorauszuschicken, und über die ausgezeichnete Rolle, welche die periodischen und bedingt periodischen Bewegungen in der höheren Mechanik spielen.

II. Mehrfach periodische Bewegungen.

2. Die Bedeutung eindeutiger Integrale. Man denke sich den Zustand des mechanischen Systems zu einer beliebigen Anfangszeit t_0 bezeichnet durch die Lage eines Bildpunktes im $2f$-dimensionalen Phasenraum der p_k, q_k, die folgende Systemveränderung durch die Wanderung des Bildpunktes auf der aus den Gleichungen (1), Ziff. 1 zu berechnenden Phasenbahn. Dabei seien für den jetzigen Zweck einige vereinfachende Voraussetzungen gemacht. Es handle sich um ein abgeschlossenes System, für welches die Hamiltonsche Funktion H zeitunabhängig, also

$$H(p, q) = W \tag{1}$$

ein Integral ist, nämlich im allgemeinen das Energieintegral. Die Phasenbahn verläuft dann auf der durch Gleichung (1) gegebenen $(2f-1)$-dimensionalen Hyperfläche, die wir kurzweg Energiefläche nennen wollen, unbekümmert darum, daß W nicht in allen Fällen die Systemenergie bedeutet. Ferner setzen wir voraus, daß die Energiefläche und mit ihr die Phasenbahn ganz im Endlichen verlaufe. Das schließt einerseits alle ins Unendliche des gewöhnlichen Anschauungsraums verlaufenden Bewegungen (z. B. hyperbolische Planetenbewegungen) aus und enthält andererseits auch eine Annahme über die Koordinatenwahl: Es sollen alle winkelartigen Koordinaten, die trotz begrenzter Systemlage unbegrenzt anwachsen können, für den Augenblick nicht verwendet werden, sondern nur solche, die eindeutig mit der Systemlage zusammenhängen.

[1]) Vgl. M. BORN, Probleme der Atomdynamik. Berlin: Julius Springer 1926.
[2]) Vgl. E. SCHRÖDINGER, Abhandlungen zur Wellenmechanik. J. A. Barth, Leipzig 1927. Vgl. den Artikel „Optik und Mechanik" von A. LANDÉ, ds. Handb. Bd. XX.

Konstruiert man die Phasenbahnen zu allen möglichen Anfangszuständen des Systems, so erfüllen sie den Phasenraum dicht und derart, daß, abgesehen von gewissen singulären Punkten, durch jeden Phasenpunkt nur ein Bahnelement hindurchgeht. Jede Phasenbahn bleibt in ihrem weiteren Verlauf dauernd in der ihr zugehörigen Energiefläche; sie teilt dieses Schicksal mit allen Phasenbahnen, die man durch Anfangspunkte mit derselben Systemenergie hindurchlegen kann. Z. B. kann man von dem zuerst gewählten Anfangspunkt ausgehend noch in $(2f-2)$ Dimensionen transversal zur Phasenbahn zu Nachbarpunkten fortschreiten, ohne die Integralfläche $H = W$ zu verlassen. Vielmehr wird deren Flächenelement gerade durch die gewählte Punktmenge und die durch sie hindurchgehenden Bahnelemente erfüllt. Man kann aber unter Benutzung der Dimension senkrecht zur Energiefläche ebensogut eine *andere* $(2f-2)$-fache Punktmenge und deren Bahnelemente zum Element einer Hyperfläche zusammenfassen. Setzt man dieselbe stetig in der Weise fort, daß sie den einmal in ihr liegenden Phasenbahnen *dauernd* folgt, so ist durch diese Konstruktion eine neue *Integralfläche*

$$F(p, q) = \alpha$$

gewonnen. Man bildet sich leicht die Vorstellung, daß im ganzen $(2f-1)$ unabhängige Scharen solcher Integralflächen existieren. Die Phasenbahnen sind die Schar ihrer Schnittlinien. Die Gleichungen der Integralflächen zusammen mit einer Gleichung für den zeitlichen Ablauf der Bewegung sind die $2f$ möglichen Integrale des mechanischen Problems.

Greifen wir eine der Energieflächen heraus und verfolgen auf ihr eine Phasenbahn immer weiter. Man hat dann Grund zu der Erwartung[1], daß sie im allgemeinen durch Einreihung von mehr und mehr Bahnschlingen die ganze Energiefläche erfüllt. (Der Ausdruck „Fläche“ stört hier in besonders starkem Maße die Anschauung. Es handelt sich bereits bei zwei Freiheitsgraden um einen dreidimensionalen Energieraum.) Sie verläuft dann quasiergodisch, um eine Bezeichnung aus der statistischen Mechanik hier anzuwenden, d. h. sie kommt im Lauf der Zeit jedem Punkt auf der Energiefläche oder auf einem zusammenhängenden Teil von ihr beliebig nahe[2]). Jede Integralfläche $F_2 = \alpha_2$, die $H = W$ schneidet, muß, da sie den Phasenbahnen folgt, selbst in unaufhörlicher Verschlingung schließlich ein $2f$-dimensionales Gebiet dicht erfüllen. Daher durchdringen sich die verschiedenen Flächen einer Schar, *der Wert von α_2 in einem bestimmten Phasenbahnelement wird unendlich vieldeutig. Es existieren außer $H = W$ keine eindeutigen Integrale.*

Dieser Möglichkeit steht gegenüber der andere Fall. Erfüllt eine Phasenbahn ihre Energiefläche oder ein $(2f-1)$-dimensionales Gebiet auf ihr *nicht* dicht, sondern nur einen $(2f-n)$-dimensionalen Ausschnitt, so kann sie entstanden gedacht werden als Schnitt von n *nicht unendlich vielfach verschlungenen Integralflächen* F_1 bis F_n mit der Energiefläche. Benachbarte Flächen solcher Scharen durchdringen sich nicht oder nur an gewissen singulären Stellen, jedem Bahnelement kommt nur ein Parameterwert α_2 zu. *Es existieren n weitere, von $H = W$ unabhängige, die Zeit nicht explizit enthaltende, eindeutige Integrale.*

Die Bedeutung unendlich vieldeutiger Integrale ist eine ganz andere als die der eindeutigen. Diese beschränken die Bewegung in viel stärkerem Maße als

[1]) Diese stützt sich hauptsächlich auf Betrachtungen der statistischen Mechanik, insbesondere den im Kap. 3 · Ziff. 5 bewiesenen Liouvilleschen Satz. Einen Beweis versucht E. Fermi, Phys. ZS. Bd. 24, S. 261. 1923.

[2]) Ein Beispiel für ein quasiergodisches System gibt E. Artin, Abhandl. a. d. math. Sem. d. Hamburger Univ. Bd. 3, S. 170. 1924.

die ersten. Die Existenz jener (es gibt immer $2f$ Integrale der Bewegung, einerlei, wie das System auch beschaffen sei) sagt nicht viel mehr aus als die eindeutige Bestimmtheit der Bewegung überhaupt. Diese existieren nur bei besonders einfachen mechanischen Systemen oder für Sonderfälle allgemeinerer Bewegungen. Wieviel eindeutige Integrale möglich sind, ist deshalb eine Frage von größter Wichtigkeit bei der Untersuchung jedes mechanischen Systems. In gewissen Fällen läßt sich die Nichtexistenz eindeutiger Integrale beweisen (vgl. Ziff. 16).

3. Die Sonderstellung der mehrfach periodischen Bewegungen. Besonders einfach wird die Bewegung, wenn mindestens f eindeutige Integrale existieren. Wie man sich aus der Vorstellung ihrer Integralflächen im pq-Raum ableitet, kann in diesem Fall zu einem Punkt im q-Raum nur ein oder endlich viele Werte des Impulsvektors bei derselben Systembewegung gehören, so wie bei einem Pendel, wenn es ungestört schwingt, in jedem Punkt des Ausschlags nur zwei Geschwindigkeiten, eine hin- und eine rückwärts, möglich sind. Mit dieser endlich vieldeutigen Bestimmtheit des Impulsvektors als Funktion der Lage scheinen notwendig weitere Einfachheiten der Bewegung verbunden zu sein. Mechanische Systeme dieser Art gehören, wenn man von Sonderfällen absieht und alle ins Unendliche verlaufenden Bewegungen außer acht läßt, wohl immer zu den mehrfach periodischen. Mit ihnen hat es die jüngst verlassene Atommechanik und die Astronomie fast ausschließlich zu tun, und ihre mathematische Zugänglichkeit ist so sehr viel größer als diejenige der komplizierteren Bewegungstypen, daß der Versuch mit „Störungsrechnung“ auch diese zu beherrschen, immer auf eine Annäherung durch mehrfach periodische Bewegungen hinausläuft. Im folgenden wird daher ausführlich von ihnen zu sprechen sein.

Der Satz, daß f eindeutige Integrale mehrfach periodische Bewegung im Gefolge haben, ist von Kneser[1]) für zwei Freiheitsgrade streng bewiesen. Seine Argumente machen ihn jedoch auch für mehrere Freiheitsgrade wahrscheinlich. In den folgenden Ziffern wird gezeigt werden, daß die Existenz weiterer eindeutiger Integrale nur den Periodizitätsgrad herabsetzt. Dagegen scheint bei einem abgeschlossenen System mit weniger als f eindeutigen Integralen keine mehrfach periodische Bewegung möglich zu sein, auch nicht mit mehr als f Perioden, vielmehr die Umkehrung des obigen Satzes zu gelten: Mehrfach periodische Bewegung ist an die Existenz von mindestens f eindeutigen Integralen geknüpft. Man vgl. die Noten von Ehrenfest[2]) und Wataghin[3]), die freilich keinen Beweis dafür geben. (Für nicht abgeschlossene Systeme gilt der Satz nicht. Dort ist eine mehr als f-fach periodische Bewegung möglich, wie schon das Beispiel der erzwungenen Schwingungen eines Oszillators beweist.)

4. Winkel- und Wirkungsvariable. In Ziff. 3 wurde gezeigt, daß die Himmelsmechanik bestrebt ist, die Bewegungen ihrer Systeme (mit gewissen Ausnahmen) als mehrfach periodisch zu beschreiben, sei es in Strenge oder näherungsweise. Der Grund für diese Auszeichnung eines bestimmten Bewegungstyps wurde in der mathematischen Sonderstellung desselben erkannt, die eine besonders vollständige Integration erlaubt. Wenn man die Lehrbücher der Himmelsmechanik überliest, so stößt man indes auf eine ermüdende Fülle von Transformationen, die den Zweck haben, die Variablenwahl jedem besonderen Problem aufs genaueste anzupassen. Die Physiker, die diese Methoden in die Atomphysik übertrugen, haben zugleich im Interesse der Quantentheorie eine gewisse Sichtung vollzogen und die wichtigsten Umformungen hervorgehoben.

---

1) H. Kneser, Math. Ann. Bd. 84, S. 277. 1921.
2) P. Ehrenfest, ZS. f. Phys. Bd. 19, S. 242. 1923.
3) G. Wataghin, Ann. d. Phys. Bd. 76, S. 41. 1925.

Das hat zu einer ganz einheitlichen Rechnungsform geführt, die bei jedem mehrfach periodischen System möglich ist: der Rechnung in Winkel- und Wirkungsvariablen. Mit ihrer Hilfe hat vor allem die Störungsrechnung einen höchst durchsichtigen Aufbau erlangt. Die Definition und Einführung dieser, wie man auch sagt, uniformisierenden Veränderlichen wird in den folgenden Ziffern schrittweise beschrieben.

5. Periodische Bewegung bei einem Freiheitsgrad. Bei Systemen von einem Freiheitsgrad ist die Gleichung $H(p, q) = W$ zugleich die Gleichung der Phasenbahn in der pq-Phasenebene. Verschiedenen Werten von W entspricht eine Kurvenschar, deren einzelne Kurven einander wegen der Eindeutigkeit von W nicht schneiden. Wir nehmen zunächst an, daß q eine Koordinate ist, die in eindeutiger Weise von der Systemlage abhängt, also die kartesische Koordinate eines Massenpunktes oder die Lage auf einer nicht geschlossenen Kurve usf., dagegen kein Drehwinkel, der für dieselbe Systemlage verschiedene Werte annehmen kann. Beschränken wir die Betrachtung auf Bewegungen, die ganz im Endlichen verlaufen und im physikalischen Sinn stetig sind, so sind die Kurven $H = W$ notwendig in sich geschlossen (vgl. Abb. 1). Die Bewegung verläuft zwischen festen Grenzen ($q_1 q_2 q_3 q_4 q_5$); man spricht dann von Libration. Mit veränderlichem W zieht sich die Phasenbahn auf eine kleine Kurve um einen festen Punkt q_0, das Librationszentrum, zusammen. Die Bewegung selbst degeneriert zu kleinen Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage in q_0. Die Librationsgrenzen sind gegeben durch $\dot{q} = \partial H/\partial p = 0$, sie treten bei Veränderung von W immer paarweise auf (z. B. q_3, q_4) und fallen im Augenblick ihrer Entstehung zusammen. Der Punkt, wo sie zusammenfallen, entspricht einer labilen Gleichgewichtslage (q^*).

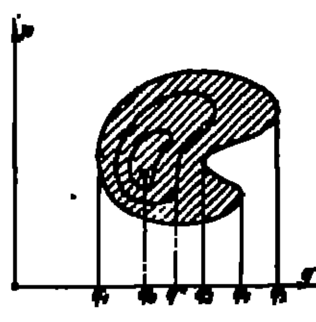


Abb. 1. Phasenbahnen einer periodischen Bewegung mit Libration.

Ist aber der Freiheitsgrad q winkelartig, so daß $q + \varkappa$ tatsächlich dieselbe Systemlage bezeichnet wie der Wert q, so erfordert die eindeutige Bestimmtheit des Integralwertes W durch den Bewegungszustand, daß die Kurve $H = W$ entweder wiederum geschlossen ist oder p als periodische Funktion von q mit der Periode $\varkappa$ darstellt (vgl. Abb. 2). Im zweiten Fall wächst die winkelartige Koordinate q unbeschränkt an, die Systemlage wiederholt sich dabei aber von Zeit zu Zeit. Der Bewegungstypus ist der der Rotation. Übrigens gehen häufig Librationsbewegungen mit verändertem W in Rotationsbewegungen über (vgl. das nachfolgende Beispiel). Als Grenzfall zwischen beiden kann Limitation auftreten, d. h. eine Bewegung, die sich nur in unendlich langer Zeit einem eben noch vorhandenen Umkehrpunkt nähert.

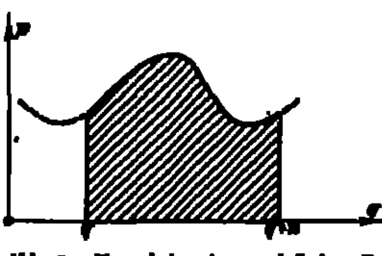


Abb. 2. Phasenbahn einer periodischen Bewegung mit Rotation.

Das bekannteste Beispiel für die drei Bewegungstypen ist die Pendelbewegung[1]) mit der Energiegleichung

$$H = \frac{1}{2A} p_\varphi^2 - D\cos\varphi = W$$

[1]) Siehe Kap. 7, Ziff. 12 ds. Bd. ds. Handb.

(A ist das Trägheitsmoment, D das Produkt aus Pendelgewicht und Entfernung zwischen Aufhängepunkt und Schwerpunkt, φ der Ausschlag). Aus ihr berechnet sich

$$p_\varphi = \sqrt{2A}\sqrt{W + D\cos\varphi},$$

dargestellt in Abb. 3. Bei $W = -D$ ergibt sich Beharrung im Librationszentrum, für $-D < W < +D$ entstehen verschieden weite Librationen. $W = D$ entspricht der bekannten unendlich langsamen Annäherung des Pendels an den obersten Punkt, also der Limitation, und $W > D$ der umlaufenden Bewegung des Pendels, der Rotation.

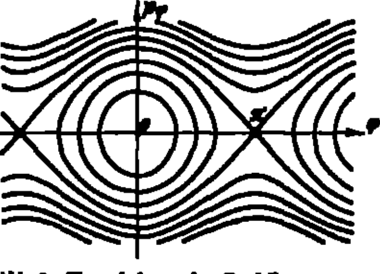


Abb. 3. Phasenbahnen der Pendelbewegung.

So viel über den **räumlichen Charakter** der Bewegung! Die in sich zurücklaufende oder in q periodische Phasenbahn läßt schon ohne Rechnung einen **in der Zeit periodischen** Ablauf erwarten, und die Rechnung bestätigt das. Der Fall eines Freiheitsgrades ist daher ein einleuchtendes Beispiel für den in Ziff. 3 vermuteten allgemeinen Satz, daß f eindeutige Integrale der Bewegung den zeitlich periodischen oder mehrfach periodischen Ablauf derselben im Gefolge haben.

Wir wenden uns nunmehr zur Integration der Bewegung und schlagen den in Kap. 3, Ziff. 12 beschriebenen Weg ein; er führt zwanglos zu der in Ziff. 4 besprochenen Rechenform. Wir suchen also ein Integral $S(q, \alpha)$ der Hamiltonschen Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = W$$

und benutzen es als Erzeugende der Transformationsgleichungen [vgl. Kap. 3, Ziff. 5 (6)]

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha}.$$

Am nächstliegenden wäre es, als zeitlich konstanten neuen Impuls α die Größe W zu benutzen, doch empfiehlt sich aus Gründen, die weiter unten deutlich werden, eine andere Wahl, nämlich die des Integrals

$$J = \oint p\,dq. \tag{1}$$

Das Zeichen $\oint$ bedeutet, daß längs der ganzen Phasenbahn bis zur Rückkehr des Systems zu seinem Ausgangszustand integriert werden soll; also bei Librationsbewegung einmal über die geschlossene Phasenbahn, bei Rotation über eine Periode $\varkappa$ der Koordinate q.

Der gewählte neue Impuls J heißt **Wirkungsvariable**; denn er gibt die Zunahme der Wirkungsfunktion (allgemeiner der Funktion S) während eines vollen Umlaufs des Systems an. Es ist ja

$$\oint \frac{\partial S}{\partial q}\,dq = J.$$

Sein zeitlich unveränderlicher Wert ist gleich dem Inhalt der in Abb. 1 und 2 schraffierten Flächenstücke, natürlich abhängig von W, so daß umgekehrt $W = W(J)$.

Die kanonisch konjugierte Lagenkoordinate

$$w = \frac{\partial S(q, J)}{\partial J} \tag{2}$$

heißt **Winkelvariable**. Sie hat folgende Eigenschaften: Einerseits wächst sie linear mit der Zeit an, denn die transformierte Hamiltonsche Funktion wird

$$K(J, w) = W(J),$$

so daß die „**mittlere Bewegung**" von w, nämlich $\dot{w} = \partial W/\partial J = \nu$ eine Konstante ist und demnach

$$w = \nu t + \delta \tag{3}$$

wird. Während also der Zuwachs von w in der Zeiteinheit $\nu = \partial W/\partial J$ beträgt, beläuft er sich während eines vollen Systemumlaufs auf

$$\oint \frac{\partial w}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 S}{\partial J \partial q} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial S}{\partial q} dq = 1.$$

Mit anderen Worten: Jedesmal, wenn das System eine volle Bewegung bis zur Rückkehr in den Anfangszustand ausgeführt hat, ist w um denselben Betrag 1 gewachsen. Daraus folgt, daß **der Zustand des Systems periodisch in w mit der Periode 1 ist**, so daß man schreiben kann[1])

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) im Librationsfall:} \quad q = q(\bar{w}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\tau e^{2\pi i \tau w}, \\ &\text{b) bei rotierendem } q\text{:} \quad q = \varkappa w + (\bar{w}) = \varkappa w + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\tau e^{2\pi i \tau w}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Koeffizienten der Fourierreihe hängen von J ab und bestimmen sich in bekannter Weise zu

a) $$a_\tau = \int_w^{w+1} q(\bar{w}) e^{-2\pi i \tau w} dw,$$

b) $$a_\tau = \int_w^{w+1} (q - \varkappa w) e^{-2\pi i \tau w} dw.$$

Man überlegt sich leicht, daß S darstellbar ist in der Form

$$S = Jw + (\bar{w}). \tag{5}$$

Aus (3) und (4) ist schließlich die **zeitliche Periodizität der Bewegung** abzulesen; es ist

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) im Librationsfall:} \quad q \\ &\text{b) im Rotationsfall:} \quad q - \varkappa(\nu t + \delta) \end{aligned}\right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\tau e^{2\pi i \tau(\nu t + \delta)}, \tag{6}$$

wobei $\nu = \partial W/\partial J$ die **Frequenz** der Bewegung bedeutet.

Für zwei durch verschiedene, aber benachbarte Werte $J, J + \Delta J$ ausgezeichnete Bewegungen des Systems gilt der hier selbstverständliche Satz, daß

$$\Delta W = \nu \Delta J. \tag{7}$$

Er ist in der Quantentheorie der Anknüpfungspunkt für das Bohrsche **Korrespondenzprinzip**[2]).

[1]) Im folgenden bedeutet die Abkürzung $f(\bar{w})$ immer: periodische Funktion von w. Dabei ist, wenn nichts anderes gesagt wird, vorausgesetzt, daß die Periode gleich Eins ist.

[2]) Vgl. den schon eingangs erwähnten Artikel Quantentheorie von W. Pauli jun., ds. Handb. Bd. XXIII.

Ein Beispiel wird die Bedeutung der neuen Variabeln hervortreten lassen: Die Energiegleichung des linearen **harmonischen Oszillators** lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + 2\pi^2\nu^2 m q^2 = W$$

(m die Masse, ν die Frequenz, q der Ausschlag). Man erhält

$$J = \oint p\,dq = \frac{W}{\nu} \quad \text{und} \quad S = \sqrt{2m}\int\sqrt{\nu J - 2\pi^2\nu^2 m q^2}\,dq\,.$$

Daraus kommt

$$w = \frac{\partial S}{\partial J} = \frac{1}{2\pi}\arcsin\sqrt{\frac{2\pi^2\nu m}{J}}\,q = \nu t + \delta$$

und

$$\left.\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{J}{2\pi^2\nu m}}\sin 2\pi w,\\ p &= \sqrt{2\nu m J}\cos 2\pi w. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Einführung von w entspricht also der bekannten geometrischen Konstruktion der Sinusschwingung als Projektion eines gleichförmigen Kreisumlaufs, d. h. einer Rotation. Die Einheit des Umlaufwinkels ist so gewählt, daß die Periode in ihm gleich Eins wird.

6. Separierbare mehrfach periodische Systeme[1]. Die Gleichung für die Konstanz der Hamiltonschen Funktion

$$H(p_1, \ldots p_f, q_1, \ldots q_f) = W$$

zerfalle wie in Kap. 3, Ziff. 13 angenommen, in f eindeutige erste Integrale

$$H_j(p_j, q_j) = A_j; \qquad (j = 1, 2, \ldots f)$$

dann läßt sich die Phasenbahn des Systems in die Phasenebenen der einzelnen Freiheitsgrade projizieren, und es gilt für diese Projektionen wörtlich dasselbe, was in Ziff. 5 über die Phasenbahn bei einem Freiheitsgrad gesagt wurde, insbesondere, daß jede einzelne Koordinate entweder zwischen festen Grenzen libriert oder unbegrenzt anwächst, und daß ihr zugeordneter Impuls dabei periodisch zu seinem Ausgangswert zurückkehrt. Dagegen gestaltet sich die zeitliche Integration ein wenig anders.

Nach Kap. 3, Ziff. 13 setzt sich das vollständige Integral der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung additiv aus Teilen S_j zusammen, welche durch Quadratur aus den Teilgleichungen

$$H_j\left(\frac{\partial S_j}{\partial q_j}, q_j\right) = A_j$$

bestimmt werden. Als Integrationskonstanten wählen wir die entsprechend Ziff. 5 (1) definierten Größen

$$J_k = \oint p_k\,dq_k = J_k(A_1, \ldots A_f) \tag{1}$$

und nennen sie **Wirkungsvariable**[2]. Nach Einführung derselben in S berechnen sich die kanonisch konjugierten **Winkelvariablen** zu

$$w_k = \frac{\partial S(\ldots q_l, J_l \ldots)}{\partial J_k}. \tag{2}$$

---

[1] Vgl. die ersten Untersuchungen derselben durch P. Stäckel, Habilitationsschrift. Halle 1891; ferner C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels, Bd. I, Abschn. 2; K. Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, S. 548; P. S. Epstein, Ann. d. Phys. Bd. 51, S. 168. 1916.

[2] Für die praktische Ausführung solcher **Phasenintegrale** hat A. Sommerfeld ein sehr bequemes komplexes Verfahren angegeben; vgl. sein in Ziff. 1 zitiertes Buch, Zusätze.

Löst man die Gleichungen (1) nach den Konstanten A_f bzw. dem von ihnen abhängigen W auf, so gewinnt man die transformierte Hamiltonsche Funktion

$$K(\dots w_k, J_k \dots) = W(J_1, \dots J_f),$$

woraus wiederum

$$\dot{w}_k = \frac{\partial W}{\partial J_k} = \nu_k$$

und

$$w_k = \nu_k t + \delta_k \tag{3}$$

hervorgeht. Dagegen ist der Zuwachs von w_k während eines vollen Umlaufs von q_f unter erzwungener Festhaltung aller anderen q

$$\oint \frac{\partial w_k}{\partial q_f} dq_f = \oint \frac{\partial^2 S}{\partial J_k \partial q_f} dq_f = \frac{\partial}{\partial J_k} \oint \frac{\partial S}{\partial q_f} dq_f = \begin{cases} 1 & \text{für } k = f, \\ 0 & \text{für } k \neq f. \end{cases} \tag{4}$$

Die durch (2) vermittelte Abbildung des q-Raumes auf den w-Raum hat also die folgenden Eigenschaften: Geht man von einer bestimmten Konfiguration des Systems aus und läßt eine einzelne Koordinate den ihr möglichen Umlauf bis zur völligen Rückkehr ausführen, so wächst nur das zugehörige w um eine Einheit an, während alle anderen w zu ihrem Ausgangswert zurückkehren. Alle Punkte eines regulären Gitters im w-Raum mit Gitterkonstante 1 bedeuten daher dieselbe Konfiguration und, wegen der eingangs erwähnten Eigenschaft der Phasenbahn, nach jedem Umlauf von q_k zum selben Wert von p_k zurückzuführen, auch dieselben Impulse. In Umkehrung dieser Beziehung folgt, da die Umkehrfunktionen von (2) sich als eindeutig herausstellen, daß die q_f und p_f *periodische Funktionen der w_k je mit Periode 1 sind.* Das gilt nicht nur von den seither benutzten Separationskoordinaten, sondern von allen eindeutig mit ihnen zusammenhängenden Koordinaten. In solchen ist es deshalb möglich, die q_f, p_f als mehrfache Fourierreihen der w_k darzustellen:

$$\left.\begin{aligned} q_f &= (\tilde{w}_1, \dots \tilde{w}_f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} a^{(f)}_{\tau_1 \dots \tau_f} e^{2\pi i(\tau_1 w_1 + \dots + \tau_f w_f)} \\ \text{oder abgekürzt} \quad &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a^{(f)}_{(\tau)} e^{2\pi i(\tau w)}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Koeffizienten der Reihe bestimmen sich (abhängig von den J_k) zu

$$a^{(f)}_{\tau_1 \dots \tau_f} = \int_{w_1}^{w_1+1} \cdots \int_{w_f}^{w_f+1} q_f(w_1, \dots w_f) e^{-2\pi i(\tau_1 w_1 + \dots + \tau_f w_f)} dw_1 \dots dw_f.$$

Wenn q_k selbst „winkelartig" ist und rotiert, tritt in diesen Formeln stets $(q_k - \varkappa_k w_k)$ an die Stelle von q_k. Ähnlich wie in Ziff. 5 ergibt sich

$$S = \sum_k J_k w_k + (\tilde{w}_1, \dots \tilde{w}_f). \tag{6}$$

Wegen des linearen Anwachsens der w_k nach Gleichung (3) folgt aus (5) *die mehrfache zeitliche Periodizität der Bewegung*

$$\left.\begin{aligned} &q_f \\ \text{bzw.} \quad &q_f - \varkappa_f(\nu_f t + \delta_f) \end{aligned}\right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} a^{(f)}_{\tau_1 \dots \tau_f} e^{2\pi i[(\tau_1 \nu_1 + \dots + \tau_f \nu_f)t + \gamma_{\tau_1 \dots \tau_f}]}. \tag{7}$$

Die *Bewegungsfrequenzen* sind gegeben durch die Größen

$$\nu_f = \frac{\partial W}{\partial J_f}; \tag{8}$$

sie werden auch als *mittlere Bewegungen* der Koordinaten w_f bezeichnet.

7. Entartung der Bewegung. Es ist für das Spätere zweckmäßig, die Abbildung des q-Raumes auf den w-Raum, die durch Ziff. 6, Gleichung (2) ausgedrückt wird, näher zu betrachten. Da der Zustand des Systems periodisch in den w_k mit Periode 1 ist, so erschöpft der Einheitswürfel des w-Raumes alle Möglichkeiten der Lagen q. Der ganze Bahnbereich bildet sich in ihn ab, sogar in einen Teil von ihm; denn wenn die w_k alle Lagen im Einheitswürfel annehmen, so durchläuft der Bildpunkt im q-Raum den Bahnbereich wegen der Librationen mehrfach.

Es ist besonders bequem und übersichtlich, die Bewegung im w-Raum zu verfolgen. Wegen des zeitlich linearen Wachstums der w_k nach Ziff. 6, Gleichung (3) bewegt sich der Bildpunkt im w-Raum gleichförmig auf einer Geraden, deren Neigungen gegen die Achsen gegeben sind durch

$$dw_1 : \cdots : dw_f = \nu_1 : \cdots : \nu_f .$$

Es ist indessen überflüssig, die Gerade in ihrer ganzen Ausdehnung zu verfolgen. Weil jeder neu betretene Einheitswürfel nur wieder den alten Bewegungszustand repräsentiert, genügt es, die Bahn durch die Seitenflächen der w-Würfel in Stücke zu zerschneiden und jeden Abschnitt durch ganzzahlige achsenparallele Verschiebung in den Anfangswürfel zurückzuverlegen. So entsteht ein Bild der Bahn, das aus lauter parallelen geraden Stücken besteht.

Man übersieht (der Beweis findet sich z. B. im Anhang des Bornschen Buches, Zitat in Ziff. 1, Fußnote), daß die Bahnabschnitte den Einheitswürfel mit der Zeit gleichmäßig dicht erfüllen, wenn zwischen den $\nu_k = \partial W/\partial J_k$ keine lineare ganzzahlige Beziehung

$$(\tau\nu) = \tau_1\nu_1 + \cdots + \tau_f\nu_f = 0$$

besteht. Das bedeutet, daß die Fourierreihen Ziff. 6 (7) wirklich f-fach periodisch sind, weil f unabhängige Bewegungsfrequenzen existieren. Vom w-Raum kann man auf die Bewegung selbst zurückschließen, die Bahnkurve erfüllt den f-dimensionalen Bahnbereich mit der Zeit dicht. Sie kommt irgend einmal jedem Punkt desselben beliebig nahe. (Also auch, nach einer Quasiperiode, einem willkürlich gewählten Ausgangspunkt der Bahn.) Die Bewegung ist in diesem Sinn voll entfaltet. Man bemerkt, daß, wenn in Ziff. 6 die Koordinaten q_l wirkliche Lagen im geometrischen Sinn bedeuten (und nicht durch eine Berührungstransformation definiert sind), der Bahnbereich durch die Librationsgrenzflächen q_l = konst. eingeschlossen wird, und daß man in diesem Fall sagen kann, die Separationskoordinaten werden durch die Umkehrflächen der Bewegung selbst eindeutig bestimmt (vgl. Kap. 3, Ziff. 13).

Die gleichmäßig dichte Erfüllung des Einheitswürfels im w-Raum durch die Bahnkurve, zusammen mit der gleichförmigen Bewegung auf ihr, erlaubt eine sehr einfache Berechnung von Zeitmittelwerten über die Bewegung. Das Integral

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(\ldots p_l, q_l \ldots)\,dt$$

ist um so genauer gleich dem Raummittelwert von f genommen über den Einheitswürfel im w-Raum, je größer T ist.

Anders, wenn s lineare ganzzahlige Beziehungen zwischen den Frequenzen ν_l bestehen:

$$\tau_{\varrho 1}\nu_1 + \cdots + \tau_{\varrho f}\nu_f = 0. \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots s) \qquad (1)$$

Dann wird der Einheitswürfel des w-Raumes nicht dicht erfüllt, sondern nur ein $(f-s)$-dimensionales Gebiet desselben. **Dementsprechend beschränkt sich im Lagenraum die Bahnkurve auf ein $(f-s)$-dimensionales Gebiet, die Bewegung ist s-fach entartet, wie man sagt.** Die Fourierentwicklung Ziff. 6 (7) stellt in Wirklichkeit keine f-fach periodische Funktion der Zeit dar; denn es lassen sich s Bewegungsfrequenzen rational durch die übrigen ausdrücken. Der Zustand des Systems ist nur eine $(f-s)$-fach periodische Funktion der Zeit. Hierher gehört jede rein periodische Bewegung eines Systems von mehr als einem Freiheitsgrad. Wegen der Eigenschaft mehrfach periodischer Systeme, für gewisse Frequenzverhältnisse rein periodische Bewegungen anzunehmen, hat STAUDE sie als **bedingt periodisch** bezeichnet.

Im Entartungsfall kann man eine oft benutzte Scheidung der Winkelvariablen durchführen. Ersetzt man s der zunächst eingeführten Variablen w^0, etwa w^0_{f-s+1} bis w^0_f, durch die folgenden neuen

$$w_\varrho = \tau_{\varrho 1} w_1^0 + \cdots + \tau_{\varrho f} w_f^0, \qquad (\varrho = f-s+1, \cdots f) \tag{2}$$

eine Transformation, die sich mit Hilfe der Erzeugenden

$$S = \sum_{\alpha=1}^{f-s} J_\alpha w_\alpha^0 + \sum_{\varrho=f-s+1}^{f} J_\varrho (\tau_{\varrho 1} w_1^0 + \cdots + \tau_{\varrho f} w_f^0) \tag{3}$$

auch leicht kanonisch auf die Wirkungsvariablen ausdehnen läßt, so folgt

$$\dot w_\varrho = \tau_{\varrho 1} \nu_1^0 + \cdots + \tau_{\varrho f} \nu_f^0 = 0, \tag{4}$$

also

$$w_\varrho = \text{konst.}$$

Sie heißen daher **uneigentliche Winkelvariable.** Ihre Konstanz ist nur ein anderer Ausdruck für die Verringerung der Zahl unabhängiger Bewegungsfrequenzen. Man sieht, daß $f-s$ **eigentliche Winkelvariable** hinreichen, um die Bewegung zu beschreiben. In den späteren Abschnitten schließen wir uns der Gewohnheit vieler Verfasser an und kennzeichnen durch den Index ϱ (wenn nötig $\sigma, \tau \ldots$) uneigentliche im Unterschied von den eigentlichen Winkelvariablen, die wir mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ indizieren.

Rein periodische Bewegungen besitzen nur eine unabhängige Bewegungsfrequenz, demgemäß nur eine eigentliche Winkelvariable. Die ihr kanonisch zugeordnete Wirkungsvariable ist, wie man aus Ziff. 6 oder besser noch Ziff. 10 sieht,

$$J = \oint \sum_i p_i \, dq_i \,. \tag{5}$$

8. Eigentliche, zufällige und Grenzentartung. Es gibt drei typische Fälle von Entartung:

Führt man mittels der Transformation Ziff. 7, Gleichung (3) die neuen Wirkungsvariablen ein, so wird W eine Funktion derselben: $W(J_1, \ldots J_f)$. Aus Ziff. 7, Gleichung (4) und $\dot w_\varrho = \partial W / \partial J_\varrho$ geht aber hervor, daß für alle uneigentlichen Winkelvariablen

$$\frac{\partial W}{\partial J_\varrho} = 0 \tag{1}$$

wird. Nun kann dies dreierlei Gründe haben:

Entweder gilt (1) für alle Werte der J^0. Es ist dann jede mögliche Bewegung des Systems entartet, dasselbe ist einer f-fach periodischen Bewegung gar nicht fähig. Die angegebene Scheidung zwischen eigentlichen und uneigentlichen

Winkelvariablen ist dann immer in derselben Weise durchführbar. Die Gleichungen (1) bedeuten in diesem Fall, daß W von den J_ϱ *überhaupt nicht abhängt.* Diesen Fall bezeichnet man als *eigentliche Entartung.*

Oder es gibt zweitens nur für gewisse Werte der J^ϱ rationale Frequenzbeziehungen zwischen den ν^ϱ. Dann sind nur diese besonderen Bewegungen des Systems entartet, und die Gleichungen (1) bedeuten keine funktionelle Unabhängigkeit der Größe W von den J_ϱ, sondern *nur ein Verschwinden der Ableitungen für gewisse Werte* J_ϱ. Man spricht dann von *zufälliger Entartung.* Überlegt man, ob dieser Fall häufig sein kann, so ergibt sich, daß die ν^ϱ-Werte, für welche *irgendeine* Kommensurabilität wie Ziff. 7, Gleichung (1) besteht, sogar *dicht liegen;* dasselbe gilt also auch für die mit ihnen funktionell verbundenen J^ϱ-Werte. Dagegen gibt es nur einzelne wenige Systeme J^ϱ, für welche *eine bestimmt gewählte* Variable w zufällig entartet.

Es kann noch ein dritter Fall von Entartung eintreten; er ist eigentlich der nächstliegende. Wenn eine Koordinate q_i auf ihrem Librationszentrum beharrt, anstatt Schwingungen darum auszuführen, so entartet die Bewegung. *Die Entartung im q-Raum braucht aber im w-Raum nicht merkbar zu sein. Es verschwindet nämlich nicht eine Frequenz, sondern die Amplituden in der Fourierentwicklung* von q_i, infolge besonderer Werte der J_ϱ. Man betrachte etwa Gleichung (8) des Beispiels in Ziff. 5. Für $J = 0$ wird $q = 0$, weil seine Amplitude proportional $\sqrt{J}$ ist. Es wird aber nicht $w = \text{konst.}$ Denn die ein für allemal feste Frequenz ν des Oszillators verschwindet nicht mit J. Vielmehr bleibt $w = \nu t + \delta$ eine linear mit der Zeit anwachsende Größe. Darin kommt ein tiefliegender Unterschied der Winkelvariablen von jeder librierenden Koordinate zum Ausdruck. Mit Hilfe von Winkelvariablen wird die Bewegung als „gleichförmige Rotation" beschrieben; es gibt aber für die Rotation keinen Übergang zur Ruhe, es sei denn mit verschwindender Frequenz. Der Unterschied hat zur Folge, daß im Fall der *Entartung wegen verschwindender Amplitude,* den man als *Grenzentartung* bezeichnet, die Abbildung des q-Raumes auf den w-Raum ihren stetigen Charakter verliert. Man wird also darauf gefaßt sein, daß die in anderen Fällen methodisch so vortreffliche Einführung von Winkel- und Wirkungsvariablen hier zu Unzuträglichkeiten führt (vgl. Ziff. 21 u. 22).

Man sieht, daß Grenzentartung auch gepaart sein kann mit eigentlicher oder zufälliger Entartung. Dann verschwinden gleichzeitig Amplituden und Frequenz der Fourierentwicklung.

9. Die Keplerbewegung. Um die etwas formale Einführung der Winkel- und Wirkungsvariablen durch ein Beispiel zu erläutern, wird im nachfolgenden die Keplerbewegung[1] von der Masse m um einen (unendlich trägen) Atomkern der Ladung $+Ze$ berechnet. Die Hamiltonsche Funktion des Problems schreibt sich in räumlichen Polarkoordinaten r, ϑ, ψ und zugehörigen Impulsen

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}p_\psi^2\right) + V(r) = W. \tag{1}$$

Unter dem Zentralfeldpotential $V(r)$ ist später zu verstehen

$$V(r) = -\frac{e^2 Z}{r}.$$

Aus (1) folgt die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right)^2\right] + V(r) = W, \tag{2}$$

[1] Vgl. Kap. 7, Ziff. 5—7 ds. Bd. ds. Handb.

die sich separieren läßt in folgende drei Teilgleichungen

$$\frac{\partial S_\psi}{\partial \psi} = \alpha_\psi,$$

$$\left(\frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\vartheta} = \alpha_\varphi^2, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2} + 2m\,V(r) = 2m\,W$$

und

$$S = \int_{r_0}^{r} \frac{\partial S_r}{\partial r}\,dr + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta}\,d\vartheta + \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\partial S_\psi}{\partial \psi}\,d\psi. \tag{4}$$

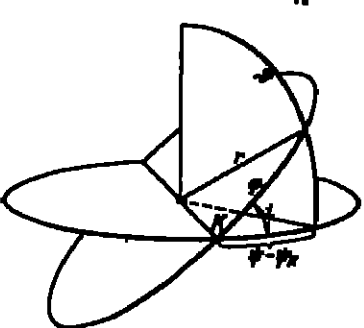


Abb. 4. Konstruktion der Keplerbewegung.

Die Bedeutung der beiden ersten Gleichungen ist, wie bekannt, der Satz von der Konstanz des Impulsmoments, erstens seiner Komponente in Richtung der willkürlich angenommenen Polarachse (Abb. 4)

$$p_\psi = m\,r^2 \sin^2\vartheta\,\dot\psi = \alpha_\psi$$

und zweitens seines absoluten Betrages

$$p_\varphi = \sqrt{p_\vartheta^2 + \frac{p_\psi^2}{\sin^2\vartheta}} = m\,r^2\dot\varphi = \alpha_\varphi.$$

Die dritte Gleichung wiederholt nur die Konstanz der Energie. Durch die Integration (4) entsteht das vollständige Integral von (2):

$$S = \alpha_\psi(\psi - \psi_0) + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{\alpha_\varphi^2 - \frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta + \int_{r_0}^{r} \sqrt{2m[W - V(r)] - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}\,dr$$

in der Form $S = S(r, \vartheta, \psi, \alpha_\psi, \alpha_\varphi, W)$. Es enthält als willkürliche Integrationskonstanten noch nicht die Wirkungsvariablen, sondern drei Parameter $\alpha_\psi, \alpha_\varphi, W$, die sich bei der Integration zwanglos dargeboten haben. Die unteren Grenzen der Integrale beziehen sich auf einen willkürlichen Anfangspunkt, etwa auf einen beliebig gelegenen Periheldurchgang. Am bequemsten ist es, sich denselben im aufsteigenden Knoten zu denken. Benutzt man, was in der Himmelsmechanik häufig geschieht, S in dieser Form als Erzeugende einer Transformation, so ergeben sich die „kanonischen Bahnelemente" [vgl. Kap. 3, Ziff. 12 (7)]

$$t + \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial W} \quad (-\beta_1 = \text{Zeit des Periheldurchgangs}),$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} \quad (\beta_2 = \text{Winkelabstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten}),$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\psi} \quad (\beta_3 = \text{Länge des aufsteigenden Knotens}).$$

Wir benutzen nicht sie, sondern führen zunächst die Wirkungsvariablen J ein [Ziff. 6 (4)], die wie folgt normiert sind:

$$J_\psi = \oint \frac{\partial S}{\partial \psi}\,d\psi = 2\pi\,\alpha_\psi,$$

$$J_\vartheta = \oint \sqrt{\alpha_\varphi^2 - \frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta = 2\pi(\alpha_\varphi - \alpha_\psi),$$

$$J_r = \oint \sqrt{2m[W - V(r)] - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}\,dr,$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} S = \frac{J_\psi}{2\pi}(\psi - \psi_0) &+ \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{\frac{(J_\vartheta + J_\psi)^2}{4\pi^2} - \frac{J_\psi^2}{4\pi^2 \sin^2\vartheta}}\, d\vartheta \\ &+ \int\limits_{r_0}^{r} \sqrt{2m[W(J_r, J_\vartheta, J_\psi) - V(r)] - \frac{(J_\vartheta + J_\psi)^2}{4\pi^2 r^2}}\, dr. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Aus der Bestimmungsgleichung für J_r, in welcher nur die beiden Konstanten W und $\alpha_\psi = \frac{J_\vartheta + J_\psi}{2\pi}$ noch vorkommen, sieht man, daß selbst im Fall beliebigen Zentralfeldes $V(r)$ die Bahnenergie W nur abhängen kann von J_r und der Summe $(J_\vartheta + J_\psi)$, nicht von J_ϑ und J_ψ einzeln. Darin kommt eine eigentliche Entartung des Systems zum Ausdruck, nämlich die Beschränkung auf eine Bahnebene. Wählt man, wie es der Keplerbewegung entspricht, $V(r) = -e^2 Z/r$, so läßt sich das Integral für J_r (z. B. auf komplexem Wege) auswerten und ergibt

$$J_r = -J_\vartheta - J_\psi + 2\pi \frac{\sqrt{m}\, e^2 Z}{\sqrt{-2W}},$$

also

$$W = -\frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{(J_r + J_\vartheta + J_\psi)^2}.$$

W hängt in diesem Fall nur von einer linearen Kombination der J ab, das System ist zweifach eigentlich entartet, also rein periodisch (Ziff. 7 u. 8).

Die Winkelvariabeln bestimmen sich aus

$$w_r = \frac{\partial S}{\partial J_r}, \qquad w_\vartheta = \frac{\partial S}{\partial J_\vartheta}, \qquad w_\psi = \frac{\partial S}{\partial J_\psi}.$$

Das gibt ausführlicher gemäß (5)

$$w_r = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\partial^2 S}{\partial r\, \partial J_r}\, dr,$$

$$w_\vartheta = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\partial^2 S}{\partial r\, \partial J_\vartheta}\, dr + \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{(J_\vartheta + J_\psi)\, d\vartheta}{2\pi \sqrt{(J_\vartheta + J_\psi)^2 - \frac{J_\psi^2}{\sin^2\vartheta}}},$$

$$w_\psi = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\partial^2 S}{\partial r\, \partial J_\psi}\, dr + \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{(J_\vartheta + J_\psi)\, d\vartheta}{2\pi \sqrt{(J_\vartheta + J_\psi)^2 - \frac{J_\psi^2}{\sin^2\vartheta}}}$$

$$- \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{J_\psi\, d\vartheta}{2\pi \sin^2\vartheta \sqrt{(J_\vartheta + J_\psi)^2 - \frac{J_\psi^2}{\sin^2\vartheta}}} + \frac{(\psi + \psi_0)}{2\pi}.$$

Die zwei über ϑ zu führenden Integrale lassen sich mit Hilfe der Beziehungen

$$\cos i = \frac{J_\psi}{J_\vartheta + J_\psi}, \qquad \cos\vartheta = \sin i \sin\varphi, \qquad \sin(\psi - \psi_\Omega) = \operatorname{ctg}\vartheta \operatorname{ctg} i,$$

die an Abb. 4 abzulesen sind, umformen. Das erste wird gleich $(\varphi - \varphi_0)/2\pi$, das zweite gleich $(\psi - \psi_0')/2\pi$. Dabei bedeuten φ_0, φ die Azimute der Anfangs- und Endlagen des Elektrons, gemessen in der Bahnebene von einer in ihr festen Richtung ab, etwa vom aufsteigenden Knoten K. ψ_0 und ψ sind die Längen dieser Punkte, gemessen in der Äquatorebene von einer willkürlichen in ihr festen Richtung ab. Dabei ist aber zu beachten, daß ψ_0, die raumfeste „Länge" des Bahnpunktes, im Augenblick t_0 bedeutet. Sie kann verschieden sein von ψ_0', d. i. der Länge der in der Bahnebene markierten (und mit ihr vielleicht einer Präzession unterworfenen) Anfangslage zur Zeit t. Führt man die Integrale über eine volle Libration der r-Koordinate, z. B. von einem Periheldurchgang zum nächsten, und berücksichtigt, daß dabei [Ziff. 6 (4)]

$$\oint_{r_0}^{r} \frac{\partial^2 S}{\partial r\,\partial J_r}\,dr = 1, \qquad \oint_{r_0}^{r} \frac{\partial^2 S}{\partial r\,\partial J_\vartheta}\,dr = \oint_{r_0}^{r} \frac{\partial^2 S}{\partial r\,\partial J_\psi}\,dr = 0,$$

so ergibt sich die Bedeutung von

$$\left.\begin{aligned}
2\pi w_1 &= 2\pi w_r = \begin{cases}\text{mittlere Anomalie, gemessen von der in der}\\ \text{Bahnebene vielleicht beweglichen Perihel-}\\ \text{lage aus;}\end{cases}\\
2\pi w_2 &= 2\pi(w_\vartheta - w_r) = \begin{cases}\text{in der Bahnebene zurückgelegtes Azimut des}\\ \text{Perihels;}\end{cases}\\
2\pi w_3 &= 2\pi(w_\psi - w_\vartheta) = \begin{cases}\text{Präzessionswinkel der Bahnebene, oder Länge}\\ \text{irgendeines in ihr markierten Ortes, z. B.}\\ \text{des Knotens.}\end{cases}
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Natürlich muß sich für die Keplerbewegung herausstellen, daß die beiden letzten Größen konstant sind. Transformieren wir also nochmals auf die Größen w_1, w_2, w_3 und die zugehörigen Wirkungsvariablen. (Das entspricht in der Astronomie dem Übergang zu den „Delaunayschen Bahnelementen".) Die Erzeugende ist [vgl. Ziff. 7 (3)]

$$S = J_1 w_r + J_2(w_\vartheta - w_r) + J_3(w_\psi - w_\vartheta),$$

woraus

$$\begin{aligned}
J_r &= J_1 - J_2, & J_1 &= J_r + J_\vartheta + J_\psi,\\
J_\vartheta &= J_2 - J_3, & J_2 &= J_\vartheta + J_\psi,\\
J_\psi &= J_3, & J_3 &= J_\psi
\end{aligned}$$

und (vgl. Ziff. 8)

$$W = -\frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{J_1^2}. \qquad (7)$$

In der Tat sind $\nu_2 = \nu_3 = 0$; w_1, J_1 sind die „eigentlichen", w_2, J_2 und w_3, J_3 nur „uneigentliche" Winkel- und Wirkungsvariable.

10. Definition der Winkel- und Wirkungsvariablen für allgemeine mehrfach periodische Systeme. Ein System heißt f-fach periodisch, wenn seine Koordinaten wie in Ziff. 6, Gleichung (7) als f-fache Fourierreihen der Zeit darstellbar sind:

$$q_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} C^{(k)}_{\tau_1 \ldots \tau_f}\, e^{2\pi i[(\tau_1\nu_1 + \cdots + \tau_f\nu_f)t + (\tau_1\delta_1 + \cdots + \tau_f\delta_f)]}. \qquad (1)$$

Dabei ist zunächst an die kartesischen Koordinaten seiner Teilchen gedacht, doch ist jedes durch eindeutige Transformation aus ihnen und ihren zugeordneten Impulsen hervorgehende Koordinatensystem in dieser Form darstellbar. (Für

nicht eindeutig bestimmte Koordinaten sind einige Abänderungen notwendig, die aus den Bemerkungen in Ziff. 5 und 6 zu entnehmen sind.)

Alle in (1) auftretenden Frequenzen sind ganzzahlige lineare Aggregate von r Grundfrequenzen $\nu_1 \dots \nu_r$, die wir als inkommensurabel voraussetzen, da sonst immer eine Darstellung mit weniger als r Grundfrequenzen möglich ist. Die Phasen sind ebensolche Kombinationen der r Größen δ_α $(\alpha = 1, 2 \dots r)$. Die Amplituden enthalten, um einem willkürlich gewählten Anfangszustand genügen zu können, weitere $2(f - r)$ Konstante c_m $[m = 1, 2, \dots 2(f - r)]$ und sind im übrigen durch die Bewegungsgesetze miteinander verknüpft.

Wir führen die neuen Koordinaten ein

$$w_\alpha = \nu_\alpha t + \delta_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots r) \tag{2}$$

und erhalten dadurch die in Ziff. 6 bis 8 ausführlich besprochene Abbildung des q-Raumes auf den w-Raum

$$\left.\begin{aligned} q_k &= q_k(\bar{w}_1, \dots \bar{w}_r), \\ p_k &= p_k(\bar{w}_1, \dots \bar{w}_r), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

zu welcher hinzutritt. Daraus folgt, daß jede eindeutige Funktion der p_k, q_k ebenfalls periodisch in den w_α ist. Die (uns unbekannten) zu den w_α kanonisch konjugierten Variablen nennen wir J_α.

Nach Kap. 3, Ziff. 6 (3) gilt jedenfalls

$$[w_\alpha, w_\beta] = 0.$$

Dafür läßt sich auch schreiben

$$\frac{\partial}{\partial w_\alpha}\left(\sum_{j=1}^{f} p_j \frac{\partial q_j}{\partial w_\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial w_\beta}\left(\sum_{j=1}^{f} p_j \frac{\partial q_j}{\partial w_\alpha}\right),$$

was zeigt, daß der Ausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{f} p_j \frac{\partial q_j}{\partial w_\alpha}\right) d w_\alpha$$

ein vollständiges Differential ist. Das Wirkungsintegral

$$S = \int \sum_{j=1}^{f} p_j \, d q_j$$

ist also eine Funktion seiner Grenzen. (Übrigens muß daran erinnert werden, daß der Integrationsweg nur dann frei ist, wenn $r = f$. Ist das System entartet, so bleibt er beschränkt auf die Integralorte $c_m = \text{konst.}$)

Die von einem beliebigen Punkt des w-Raumes aus je über eine achsenparallele gerade Einheitsstrecke geführten Integrale

$$J_\alpha = \int\limits_{w_\alpha}^{w_\alpha + 1} \left(\sum_{1}^{f} p_j \frac{\partial q_j}{\partial w_\alpha}\right) d w_\alpha$$

sind, wie man sich leicht überzeugt, unabhängig vom Ausgangspunkt, daher konstant längs jeder mechanischen Bahn. Es sind die Periodizitätsmoduln der in den Variablen w geschriebenen Wirkungsfunktion

$$S = \sum_{1}^{r} J_\alpha w_\alpha + F(J_\alpha \bar{w}_\alpha). \tag{4}$$

Führt man mit Hilfe von (4) eine zweite kanonische Transformation $(J, w) \to (\bar{J}, \bar{w})$ aus, so ergeben sich die $\bar{w}_\alpha$ jedenfalls als Größen die linear in der Zeit anwachsen. Denn die transformierte Hamiltonsche Funktion kann, da das System abgeschlossen und auf ein ruhendes Koordinatensystem bezogen sein soll, als eine Konstante nur von den $\bar{J}_\alpha$ abhängen, so daß die $\dot{\bar{w}}_\alpha$ konstant werden. Daraus sieht man aber, daß die Funktion F eine Konstante und von den Größen w_α in Wirklichkeit unabhängig ist. Die Transformationsgleichungen ergeben

$$J_\alpha = \partial S/\partial w_\alpha = \bar{J}_\alpha ,$$

und die transformierte Hamiltonsche Funktion wird von den J_α allein abhängig:

$$W = W(J_1, \cdots J_f). \tag{5}$$

Die Größen w_α, J_α können also mit Recht als die Winkel- und Wirkungsvariablen des Systems (1) bezeichnet werden.

Aus Formel (5) folgt, ähnlich wie in Ziff. 5 (7), der Satz

$$\Delta W = \sum_\alpha \frac{\partial W}{\partial J_\alpha} \Delta J_\alpha = \sum_\alpha \nu_\alpha \Delta J_\alpha \tag{6}$$

für irgend zwei durch Nachbarwerte der Wirkungsvariablen bestimmte Bewegungen des mehrfach periodischen Systems. Er bildet hier wie dort die Grundlage des Bohrschen Korrespondenzprinzips.

Die Eigenschaften (2) bis (5) reichen nach einem Beweis von F. Hund hin zur willkürfreien Auszeichnung von kanonisch eingeführten Variablen als Winkel- und Wirkungsvariable. Dabei bleiben sie bis auf eine lineare ganzzahlige Transformation mit Determinante Eins unbestimmt. Denn die periodische Wiederkehr der p- und q-Werte in den Gitterpunkten des w-Raumes, von der wir ausgingen, läßt noch die Wahl der Gitterzelle frei. Die Winkelvariablen verlieren also ihre wesentlichen Eigenschaften nicht durch eine Transformation der bezeichneten Art und ebensowenig die als Integrale über die Kanten der Gitterzelle definierten Wirkungsvariablen, die sich kontragredient transformieren. Näheres hierüber findet man in dem Buch von Born[1]. Die hier gegebenen Definitionen stammen von W. Pauli jun.

11. Die adiabatische Invarianz der Wirkungsvariablen. In den letzten Ziffern wurde gezeigt, daß mit der Einführung von Winkel- und Wirkungsvariablen ein verhältnismäßig einfacher und durchsichtiger Formalismus zur Beschreibung mehrfach periodischer Bewegungen gewonnen ist. Ihre Bedeutung in der Quantentheorie geht darüber weit hinaus.

Dieser Zweig der Physik nimmt an, daß in der Welt der Atome nicht jeder physikalisch denkbare Zustand der kleinsten elektrisch-mechanischen Systeme Bestand haben kann, sondern daß es ausgezeichnete stationäre Zustände gibt, die fast allein vorkommen. Sie müssen, wenn man die Vorstellungen der Bohrschen Atomtheorie festhält, dynamisch durch gewisse Konstanten in der Bewegung der Massenpunkte bezeichnet sein, und man muß fragen, was für Größen für eine solche Auszeichnung überhaupt in Frage kommen. Es zeigt sich, daß die geschichtliche Entwicklung kein Zufall war, in welcher seit Plancks, Bohrs und Sommerfelds Ansätzen die „Quantenbedingungen" an die Wirkungsvariablen geknüpft wurden. Diese sind deshalb so geeignet, weil sie einerseits geometrisch invariant, d. h. unabhängig von den zu ihrer Herleitung be-

[1] M. Born, Atommechanik I, Ziff. 15. Berlin 1925.

nutzten Koordinaten sind. Das hat unter Benutzung der in Kap. 3, Ziff. 5 besprochenen Sätze Brody[1] gezeigt.

Sie sind aber zweitens „adiabatisch invariant". Darunter ist folgende sehr bemerkenswerte Eigenschaft verstanden: Der Bewegungszustand des mechanischen Systems hänge außer von den p_l, q_l von gewissen kontinuierlich veränderlichen Systemparametern a_k ab (man denke sich z. B. die Anziehungskraft der Sonne auf den Planeten veränderlich), jedoch so, daß für jeden festen Wert der a_k die Bewegung bedingt periodisch bleibt und denselben Entartungsgrad besitzt. Die Bewegungsintegrale werden dann im allgemeinen auch von den Parametern a_k abhängen, also von der Form sein $F(p_l, q_l, a_k) = \alpha(a_k)$. Es gibt aber gewisse Funktionen der F — also gleichfalls Integrale —, die in erster Näherung von einer Änderung der a_k **nicht** mitbetroffen werden, vielmehr auch dann Konstante der Bewegung bleiben, wenn man sich die Parameter a_k veränderlich denkt, sofern ihre Änderung nur so langsam erfolgt, daß sie während einer Quasiperiode des festen Systems unmerklich klein ist. Diese Integrale sind einzig und allein die Wirkungsvariablen. Sie sind daher besonders geeignet, „Zustände" der mancherlei Störungen ausgesetzten Atome zu kennzeichnen. Deren Zustand bleibt auch bei hinreichend langsamen Störungen „stationär" im Sinn der Quantentheorie, und mit der Konstanz der Wirkungsvariablen hängt, so kann man sich denken, die außerordentliche Stabilität der Atome gegenüber langsamen Einwirkungen zusammen. Es bleibt andererseits die Möglichkeit, die Wirksamkeit von raschen Eingriffen (Stößen, Einstrahlung) zu erklären.

Der Gedankengang des Beweises für die adiabatische Invarianz der Wirkungsvariablen ist der folgende: Die Hamiltonsche Funktion des Systems sei außer von p und q von den mit der Zeit veränderlichen Parametern $a(t)$ abhängig. Man verfolgt den Einfluß ihrer Veränderung im Grenzfall $\dot{a} \to 0$ und dehnt gleichzeitig die Rechnung über eine so lange Zeit T aus, daß das Integral $\int_0^T \dot{a}\, dt$ einen endlichen Wert behält. In jedem Zeitpunkt wird die Bewegung dann sehr wenig verschieden sein von derjenigen bedingt periodischen, die für konstantes a eintreten würde. Für die letztere könnte man mit der Erzeugenden $S(q, J, a)$ nach der Weise der Ziff. 5 bzw. 6 Winkel- und Wirkungsvariable einführen. Man benutzt nun diese selbe Transformation, obwohl sich a ändert und die J_k nicht mehr von vornherein konstant, sondern nach den kanonischen Gleichungen

$$\dot{w}_k = \frac{\partial K}{\partial J_k}, \qquad \dot{J}_k = -\frac{\partial K}{\partial w_k}$$

veränderlich daraus hervorgehen. Die transformierte Hamiltonsche Funktion K ist gemäß Kap. 3, Ziff. 3, Gleichung (6)

$$K = W(J_1, \dots J_s, a) + \frac{\partial S[q(Jw)Ja]}{\partial a}\dot{a},$$

so daß

$$\dot{J}_k = -\frac{\partial}{\partial w_k}\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)\dot{a}. \tag{1}$$

Nun muß man voraussetzen, daß die Änderung von a ohne Zusammenhang mit einer der Bewegungsfrequenzen — am einfachsten nimmt man an gleichförmig — erfolgt. Dann ist, zunächst für Frequenzen $(\tau\nu) = \tau_1\nu_1 + \dots + \tau_s\nu_s$, die von a unabhängig und nicht gleich Null sind,

$$\lim_{\dot{a}\to 0}\int_0 \dot{a}\, e^{2\pi i[(\tau\nu)t+(\tau\delta)]}\,dt = \lim \dot{a}\,\frac{e^{2\pi i[(\tau\nu)t+(\tau\delta)]}}{2\pi i(\tau\nu)} = 0. \tag{2}$$

[1] E. Brody, ZS. f. Phys. Bd. 6, S. 224. 1921.

Das gilt auch noch für Frequenzen, die von a abhängen. Denn das Integral läßt sich in Teilintegrale über Quasiperioden zerlegen, und in jedem Abschnitt der Integrand nach t entwickeln. Dann geben die ersten Entwicklungsglieder wieder den Ausdruck (2), und von den weiteren läßt sich zeigen, daß sie im Grenzfall $\dot a \to 0$ insgesamt nichts beitragen.

Nun ist in Formel (1) der Ausdruck $\partial/\partial w_k(\partial S/\partial a)$ als Fourierreihe ohne konstantes Glied zu denken, solange nach einer eigentlichen Winkelvariablen abgeleitet ist. Denn die Ableitung hat alle von w_k unabhängigen Glieder beseitigt, so daß nur Glieder übriggeblieben sind, deren Frequenz $(\tau\nu)$ einen Anteil $\tau_k\nu_k$ mit nicht verschwindendem τ_k enthält. Bildet man also

$$\int_0 \dot J_k\,dt = -\int_0 \dot a\,\frac{\partial}{\partial w_k}\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)dt,$$

so darf man schließen

$$\int_0 \dot J_k\,dt = 0,$$

wenn nicht im Lauf der Zeit T eine der Frequenzen $(\tau\nu)$ den Wert Null passiert, d. h. das System durch einen Zustand der weiteren Entartung hindurchgeht[1]). Das ist freilich bei näherer Überlegung eine so starke Einschränkung, daß der praktische Wert der Rechnung gering wäre, wenn es nicht gelänge, sich weitgehend davon frei zu machen. Denn wie in Ziff. 8 gezeigt wurde, liegen bei kontinuierlicher Änderung der Frequenzen die Stellen zufälliger Entartung sogar dicht. v. Laue[2]) hat aber gezeigt, daß die Konstanz von J_k auch noch erhalten bleibt, wenn zwar eine der Frequenzen $(\tau\nu)$ verschwindet, aber nicht stärker als eine Potenz von $\dot a$. Damit ist die adiabatische Invarianz der Wirkungsvariablen für die meisten Fälle erwiesen. Der Beweis erstreckt sich nicht auf uneigentliche Wirkungsvariable, das ist jedoch quantentheoretisch belanglos, weil sie ohne Einfluß auf die Systemenergie sind. Er läßt ferner verstehen, daß die Invarianz aufhört, wenn die „adiabatische Transformation" eine endliche Strecke weit durch einen Entartungszustand hindurchführt.

Beispiele adiabatischer Transformationen sind: Ein Fadenpendel, dessen Fadenlänge allmählich verkürzt wird. Eine schwingende Saite, über die von einem Ende her eine starre Röhre geschoben wird. Ein ebener Oszillator, dessen Potentialellipse langsam deformiert oder gedreht wird usf. Der letzte Fall kann leicht so gestaltet werden, daß die Invarianz der Wirkungsvariabeln aufhört: bei der Änderung der Achsen der Potentialellipse kann haltgemacht werden auf einem Punkte, bei dem die beiden Frequenzen (der x- und y-Schwingung) kommensurabel sind. Wird in diesem Entartungszustand ein endliches Stück gedreht, und werden dann weiter die Bindungskräfte abgeändert, so ändern sich die J-Werte[3]).

III. Methoden der Störungsrechnung bei zeitunabhängiger Hamiltonscher Funktion.

13. Vorbemerkung. Ehe in Abschnitt III und IV eine Beschreibung der systematischen Störungsrechnung gegeben wird, ist es wohl angebracht daran zu erinnern, daß in vielen Fällen, in denen nur ein beschränkter Zweck angestrebt

[1]) Die Originalbeweise bis zu diesem Punkt stehen bei P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. Bd. 51, S. 327. 1916; J. M. Burgers, seine in Ziff. 1 zitierte Dissertation u. Ann. d. Phys. Bd. 52, S. 195. 1917; G. Krutkow, Amst. Verh. Bd. 27, S. 908. 1918; vgl. auch den zusammenfassenden Aufsatz von P. Ehrenfest in Naturwissensch. Bd. 11, S. 543. 1923.

[2]) M. v. Laue, Ann. d. Phys. Bd. 76, S. 619. 1925.

[3]) Weitere Literatur und Beispiele findet man bei P. Ehrenfest, l. c.; M. Born, Quantentheorie (vgl. Fußnote in Ziff. 1).

wird, einfachere Rechenweisen ihn erfüllen. Vielfach wird jedoch dabei von Sätzen der Störungsrechnung Gebrauch gemacht (z. B. davon, daß der Mittelwert der Störungsenergie erster Ordnung über die ungestörte Bewegung eine Konstante ist u. dgl.). So lassen sich einige Störungsprobleme der Keplerbewegung in erster Näherung auf elementare Weise erledigen; vgl. die Rechnungen von BOHR[1]), LENZ[2]) und KLEIN[3]) über das Wasserstoffatom in äußeren Feldern.

Ferner gelingt die Berechnung der Energiestörung in erster und zweiter Näherung mit Hilfe der adiabatischen Methode, d. h. unter Zuziehung der in Ziff. 11 abgeleiteten Sätze, ohne eigentliche Störungsrechnung. Das Verfahren ist von KRAMERS[4]) und von SCHRÖDINGER[5]) benutzt und von letzterem in einfacher Weise begründet worden.

Für die Berechnung höherer Näherungen wird der systematische Weg vorzuziehen sein.

13. Der semikonvergente Charakter der Störungsrechnung. Nachdem in Abschnitt II ein Formalismus zur Beschreibung mehrfach periodischer Bewegungen entwickelt wurde, fragen wir, ob sich nicht allgemeinere Bewegungen in vielen Fällen angenähert durch bedingt periodische beschreiben lassen. Das Verfahren, welches unter dem Namen Störungsrechnung in der Himmelsmechanik seit langem entwickelt ist, bezweckt in der Tat nichts anderes.

Die reine Keplerbewegung eines Planeten wird z. B. „gestört" durch die Anwesenheit eines zweiten. Die eintretende komplizierte Bewegung wird man in jedem Zeitelement auffassen können als Teil einer passend gewählten Keplerbewegung; doch werden deren Bahnelemente mit der Zeit sich ändern. Betrachtet man diese früher festen Größen jetzt als Koordinaten, so macht man analytisch Gebrauch von LAGRANGES Methode der Variation der Konstanten[6]).

Sie wird von selbst zum Näherungsverfahren, wenn man bedenkt, daß die von dem störenden Planeten ausgehenden Kräfte meist (d. h. in einem gewissen Gebiet G der Koordinaten) klein sind gegenüber der Anziehung durch die Sonne im Verhältnis λ der Massen beider Körper. Analytisch entspricht diesem Sachverhalt eine Entwicklung der Differentialgleichungen der Bewegung nach Potenzen von λ. Daraus folgt nach einem Satz von POINCARÉ die Möglichkeit einer gleichartigen Entwicklung der Integrale[7]).

Der Erfolg dieses Vorgehens hängt indessen noch von zwei Dingen ab: Erstens wird man immer im Auge behalten müssen, ob die integrierte Bewegung auch wirklich im Gebiet G verbleibt, so daß die Voraussetzung der Reihenentwicklung nicht hinfällig wird. Zweitens wird man nur dann zu einer vollständigen (d. h. konvergenten) Bestimmung der gestörten Bewegung durchstoßen können, wenn sie selbst bedingt periodisch ist. Es erhebt sich also die Frage nach der Existenz eindeutiger Integrale (der Wirkungsvariablen) für die gestörte Bewegung. Nach einer Methode von POINCARÉ kann in gewissen Fällen der Beweis ihrer Nichtexistenz geführt werden (diese Fälle sind sogar die Regel). Wie wird sich dieser innere Widerspruch in dem Näherungsverfahren äußern? Es wird auf zweierlei Weise geschehen. Entweder werden an einem bestimmten Punkt der Entwicklung die Differentialgleichungen auch formal keine Integration zulassen, die Rechnung ist dann einfach undurchführbar.

[1]) M. BORN, Quantentheorie.
[2]) W. LENZ, ZS. f. Phys. Bd. 24, S. 197. 1924.
[3]) O. KLEIN, ZS. f. Phys. Bd. 22, S. 109. 1924.
[4]) A. H. KRAMERS, Dissert. 1919; Kopenh. Akad. Bd. 8, III. 1919; ZS. f. Phys. Bd. 13, S. 312. 1919.
[5]) E. SCHRÖDINGER, ZS. f. Phys. Bd. 11, S. 172. 1922.
[6]) H. POINCARÉ, Leçons usw. (vgl. Fußnote von Ziff. 1), Bd. I, Kap. IV u. V.
[7]) Vgl. H. POINCARÉ, Méthodes nouvelles (vgl. Fußnote von Ziff. 1), Bd. I, Kap. II.

Oder — dies führt auf die Besonderheit der Störungsrechnung — man kann formal die Beschreibung durch Winkel- und Wirkungsvariable, also die bedingt periodische Darstellung erzwingen, indem man die Koordinaten als mehrfache Fourierreihen ansetzt und nach einem gewissen Rechenschema ihre Koeffizienten bestimmt, dann **werden die erhaltenen Reihen aber nicht konvergieren.** Wenn sie trotzdem in der Himmelsmechanik und Physik die größte praktische Bedeutung erlangt haben, so liegt das an ihrer **Semikonvergenz**, welche erlaubt, mit ihnen wie mit konvergenten Reihen zu rechnen. Die Abschätzung des hierbei begangenen Fehlers erfordert Konvergenzuntersuchungen, für welche man bei POINCARÉ[1]) Hinweise findet. Hier wird davon abgesehen, auf sie einzugehen[2]).

14. Der willkürliche, mehrfach periodische Ansatz für die gestörte Bewegung. Es sei

$$H = H_1 + H_2 = W$$

die Hamiltonsche Funktion eines mechanischen Systems, des **Totalsystems**, und

$$H_1 = W_1$$

die eines **Teilsystems**, dessen bedingt periodische und dabei s-fach entartete Bewegung man kennt. Sie wird beschrieben, nachdem man (nach Ziff. 6 oder 10) mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} q_j &= \sum_{-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{+\infty} a^{(j)}_{\tau_1\ldots\tau_f}\, e^{2\pi i(\tau_1 w_1^0+\cdots+\tau_f w_f^0)}, \\ p_j &= \sum_{-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{+\infty} b^{(j)}_{\tau_1\ldots\tau_f}\, e^{2\pi i(\tau_1 w_1^0+\cdots+\tau_f w_f^0)}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

die Winkel- und Wirkungsvariablen w_k^0, J_k^0 des Teilsystems eingeführt hat, durch die Zeitbeziehungen

$$\begin{aligned} J_k^0 &= \text{konst.}, && (k = 1, 2, \ldots, f) \\ w_\alpha^0 &= \frac{\partial H_1}{\partial J_\alpha^0}\, t + \delta_\alpha^0, && (\alpha = 1, 2, \ldots, f - s, \text{ eigentliche Variable}) \\ w_\varrho^0 &= \text{konst.} && (\varrho = f - s + 1, \ldots, f, \text{ uneigentliche Variable}). \end{aligned}$$

Die Transformationsgleichungen (1) enthalten eine kanonische Transformation, unabhängig von jedem bestimmten Bewegungsproblem (vgl. Kap. 3, Ziff. 3). Die Variablen w_k^0, J_k^0 sind also auch kanonisch in bezug auf die Hamiltonsche Funktion

$$H = H_1(J_\alpha^0) + H_2(J_\alpha^0, J_\varrho^0, w_\alpha^0, w_\varrho^0) = W,$$

deren erster Teil H_1 nach unseren Voraussetzungen nur von den J_α^0 abhängen kann. Freilich sind sie in der Bewegung des Totalsystems nicht mehr konstant bzw. linear in der Zeit, sondern die Größen $J_k^0, w_\varrho^0, \nu_\alpha^0 = \partial H/\partial J_\alpha^0, \delta_\alpha^0$ ändern sich irgendwie. Die Gesetze ihrer Veränderung sind die in w_k^0, J_k^0 angeschriebenen kanonischen Gleichungen

$$\dot w_k^0 = \frac{\partial H}{\partial J_k^0}, \qquad \dot J_k^0 = -\frac{\partial H}{\partial w_k^0}.$$

---

[1]) H. POINCARÉ, Méthodes nouvelles, Bd. II, Kap. VIII u. XIII.

[2]) Vgl. hierzu die Klassenaufführung für das Dreikörperproblem in Kap. 7, Ziff. 29 u. 32 dieses Bandes ds. Handb.

Es ist nicht überflüssig, einen Augenblick bei der neuen Bedeutung der Transformationsgleichungen (1) zu verweilen. Durch formales Bestehenlassen der Fourierreihen ist erreicht, daß sich immer noch der Bahnbereich des q-Raumes abbildet auf den Einheitswürfel des w^0-Raumes, und daß diese Abbildung sich im w^0-Raum periodisch wiederholt (vgl. Ziff. 7). Aber durch die Veränderlichkeit der Amplituden in den Fourierreihen (1) ist andererseits berücksichtigt, daß sich der Bahnbereich im q-Raum verändert hat, vielleicht sogar überhaupt nicht mehr festliegt. Die Gleichungen (1) sind nur noch **uneigentliche Fourierreihen**. Vollends hört mit der Linearität der w_α^0 in der Zeit und mit der Entartung der w_ϱ^0 auch der geradlinige Verlauf der Bahnkurve im w^0-Raum auf.

Trotzdem läßt sich ohne Rechnung etwas über die Änderung der w_k^0 aussagen, wenn angenommen wird, daß auch die Bewegung des Totalsystems bedingt periodisch sei. Es gibt für diese Bewegung neue Winkel- und Wirkungsvariable w_k, J_k, die mit der Systemlage durch **eigentliche** Fourierreihen

$$\left.\begin{aligned} q_l &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(l)}_{\tau_1 \ldots \tau_f} e^{2\pi i (\tau_1 w_1 + \cdots + \tau_f w_f)}, \\ p_l &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(l)}_{\tau_1 \ldots \tau_f} e^{2\pi i (\tau_1 w_1 + \cdots + \tau_f w_f)} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

zusammenhängen. Wir verfolgen nun im q-, im w^0- und im w-Raum eine bestimmte Bewegung des Systems, die wir willkürlich im w-Raum entlang einer zur w_j-Achse parallelen geraden Einheitsstrecke führen. Dabei kehrt das System im pq-Raum auf einer gewissen Kurve zum Ausgangszustand zurück. In den Gleichungen (1) haben die linken Seiten und rechts die Amplituden a, b (die als eindeutige Funktionen der p, q auch mehrfach periodisch in den w sind) die alten Werte erreicht. Die **Argumente w_k^0 sind also sicher bei Werten angelangt, die sich um Null oder irgendwelche ganze Zahlen von ihren Ausgangswerten unterscheiden.** Nimmt man nun noch an, daß der Einfluß der Störung auf alle w_k^0 klein ist gegenüber ihrer Eigenbewegung im ungestörten Fall, **so folgt, daß auch w_j^0 um 1, die übrigen w_k^0 nicht zugenommen haben.** Das ist gleichbedeutend mit der Beziehung zwischen neuen und alten Winkelvariablen

$$w_k = w_k^0 + (\overline{w}_1^0, \ldots w_f^0), \qquad (3)$$

in welcher nur noch die Koeffizienten einer Fourierreihe unbestimmt sind.

Zur Begründung dieses Schlusses gehörten zwei Voraussetzungen: Erstens, daß das gestörte System wiederum mehrfach periodisch sei. **Dadurch, daß man ohne Prüfung derselben die Reihen (2) ansetzt, die Gleichungen (3) postuliert und durch ein formales Verfahren ihre Fourierkoeffizienten bestimmt, erzwingt man in der Störungsrechnung die mehrfach periodische Darstellung für beliebige gestörte Systeme.** Doch ist dieser Weg nicht immer gangbar.

Gleichung (3) ruhte noch auf der weiteren Voraussetzung, daß der Störungseinfluß auf w_k^0 klein sei gegenüber seiner Eigenbewegung im ungestörten Fall. Diese Annahme ist unmöglich für alle früher entarteten (d. h. konstanten) w_ϱ^0. Für sie kann Gleichung (3) nicht postuliert werden, sondern es muß durch die Integration in Strenge entschieden werden, ob die betreffenden Freiheitsgrade sich nach der Störung bedingt periodisch verhalten. Bei jeder Störungsrechnung, die sich auf die Aufhebung einer Entartung bezieht, tritt daher im allgemeinen eine so komplizierte partielle Differentialgleichung auf, daß ihre Integrierbarkeit in Frage steht.

15. Entwicklung der Integrale nach Potenzen eines Parameters; intermediäre Bewegungen. Die Hamiltonsche Funktion eines mechanischen Systems sei entwickelt nach Potenzen eines kleinen Parameters λ

$$H(p, q) = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \cdots = W \tag{1}$$

und mit ihr die kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \tag{2}$$

Kennt man Integrale $p_k^0(t)$, $q_k^0(t)$ des Teilproblems

$$H_0 = W_0; \qquad \dot{q}_k^0 = \frac{\partial H_0}{\partial p_k^0}, \quad \dot{p}_k^0 = -\frac{\partial H_0}{\partial q_k^0}, \tag{3}$$

und sind für alle Werte derselben die Funktionen H_1, H_2 usf. nach Potenzen von $(p_k - p_k^0)$, $(q_k - q_k^0)$ entwickelbar, so lassen sich für p_k, q_k Reihenentwicklungen nach Potenzen von λ finden

$$\left.\begin{aligned} q_k &= q_k^0 + \lambda q_k' + \lambda^2 q_k'' + \cdots, \\ p_k &= p_k^0 + \lambda p_k' + \lambda^2 p_k'' + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

die formal den Differentialgleichungen (2) genügen. Man erhält durch Einsetzen von (4) in (2) und Neuordnen

$$\left.\begin{aligned} &\dot{q}_k^0 + \lambda \dot{q}_k' + \lambda^2 \dot{q}_k'' + \cdots \\ &= \frac{\partial H_0}{\partial p_k^0} + \lambda \left\{ \frac{\partial H_1}{\partial p_k^0} + \sum_i \frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i^0 \partial p_k^0} q_i' + \sum_i \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i^0 \partial p_k^0} p_i' \right\} \\ &\quad + \lambda^2 \{\cdots\} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und ähnlich gebaute Gleichungen für $\dot{p}_k$. Dabei ist abkürzend $\partial H_0 / \partial p_k^0$ gebraucht für den Ausdruck $\partial H_0 / \partial p_k$, in welchen bei unveränderter Funktionsform q_k^0, p_k^0 an Stelle von q_k, p_k gesetzt sind, usf.

Schließt man aus (5), daß einzeln die Koeffizienten derselben Potenzen von λ links und rechts gleich sind, so ergeben sich an Stelle von (2) außer (3) eine Reihe von **linearen** Differentialgleichungen zur Bestimmung der unbekannten $q_k^{(n)}$, $p_k^{(n)}$. Poincaré hat bewiesen, daß das Verfahren konvergiert, solange die Bewegung nicht aus dem Geltungsbereich der Voraussetzungen (Entwickelbarkeit von H nach λ und nach $p - p^0$, $q - q^0$) hinausführt.

Man bemerkt, daß eine gewisse Willkür in dem Verfahren steckt. Man kann aus (5) auf die Gleichheit gleicher Potenzen von λ schließen, man **muß sie aber nicht als exakt gleich ansehen**, sondern jeweils nur bis auf Glieder nächstkleinerer Ordnung. Anders ausgedrückt: man kann vor der Gleichsetzung der Glieder gleicher Ordnung noch eine gewisse Umstellung der Reihen vornehmen, und z. B. schon die Reihe (1) nach Zerlegung von H_n in $H_n' + H_n''$ folgendermaßen umschreiben:

$$\left.\begin{aligned} H &= (H_0 + \lambda H_1') + \lambda(H_1'' + \lambda H_2') + \lambda^2(H_2'' + \lambda H_3') + \cdots \\ &= H_0^* + \lambda H_1^* + \lambda^2 H_2^* + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Damit ist das Bewegungsproblem des Totalsystems nicht geändert, aber offenbar ein anderes Näherungsverfahren eingeschlagen.

Was ist der physikalische Sinn dieser Unbestimmtheit? Das ganze Näherungsverfahren bedeutet, daß der Reihe nach die Bewegungsprobleme mit den Hamiltonschen Funktionen H_0, $H_0 + \lambda H_1$ usf. gelöst werden, die sich von dem totalen um immer geringere Abweichungen unterscheiden. Man nennt dies die Ein-

führung intermediärer Bewegungen. Die erste intermediäre Bewegung ist durch die Forderung ausgezeichnet, daß sie von der Totalbewegung nur um Glieder $\sim \lambda$ abweichen soll, die zweite nur um solche $\sim \lambda^2$ usf. Es versteht sich, daß eine gewisse Willkür immer bleibt, und man wird sich so einrichten, daß die Rechnung formal möglichst einfach wird.

16. POINCARÉs Beweis für die Nichtexistenz eindeutiger Integrale[1]. Die Hamiltonsche Funktion eines mechanischen Systems sei

$$H = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \cdots$$

und $H = W$ sei ein Integral der Bewegung. Ferner sei $F = \alpha$ ein davon unabhängiges weiteres Integral. Nach dem Satz von POISSON [Kap. 3, Ziff. 7 (5)] muß es der Bedingung genügen $(H, F) = 0$. (Die Bedeutung ist einfach, daß der Gradient von F auf dem Phasenbahnelement senkrecht steht.) Andererseits gilt, wenn $F = \alpha$ im betrachteten Gebiet eindeutig ist, eine Variation des Satzes von Ziff. 15, welche aussagt, daß F nach Potenzen von λ entwickelt werden kann:

$$F = F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \cdots$$

Für jedes eindeutige Integral gilt also die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} 0 = (H, F) = &\sum_k \left\{\frac{\partial H_0}{\partial p_k}\frac{\partial F_0}{\partial q_k} - \frac{\partial H_0}{\partial q_k}\frac{\partial F_0}{\partial p_k}\right\} \\ &+ \lambda \sum_k \left\{\frac{\partial H_0}{\partial p_k}\frac{\partial F_1}{\partial q_k} + \frac{\partial H_1}{\partial p_k}\frac{\partial F_0}{\partial q_k} - \frac{\partial H_0}{\partial q_k}\frac{\partial F_1}{\partial p_k} - \frac{\partial H_1}{\partial q_k}\frac{\partial F_0}{\partial p_k}\right\} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ist sie nicht durch irgendeine Funktion F erfüllbar, so existiert kein von H unabhängiges eindeutiges Integral. Sie kann nur erfüllt sein, wenn die Klammerausdrücke einzeln verschwinden.

Man kann voraussetzen (Beweis bei POINCARÉ), daß F_0 von H_0 unabhängig ist, mit anderen Worten, daß nicht durch die Störung ein unabhängiges Integral erst entsteht. Außerdem ist es zweckmäßig, für die weitere Rechnung die Winkel- und Wirkungsvariabeln des ungestörten Problems w, J eingeführt zu denken. Dann hängt H_0 und wegen des Verschwindens der ersten Klammer auch F_0 nur von den J_k ab. Für das Weitere ist es notwendig, zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1. Das gestörte System ist nicht entartet. Nullsetzen der zweiten Klammer führt auf die Gleichung

$$\sum_k \left(\frac{\partial H_0}{\partial J_k}\frac{\partial F_1}{\partial w_k} - \frac{\partial H_1}{\partial w_k}\frac{\partial F_0}{\partial J_k}\right) = 0 .$$

Denkt man sich H_1 und F_1 in Fourierreihen der w_k entwickelt,

$$H_1 = \sum \cdots \sum B_{\tau_1 \ldots \tau_f} e^{2\pi i(\tau_1 w_1 + \cdots + \tau_f w_f)}, \qquad F_1 = \sum \cdots \sum b_{\tau_1 \ldots \tau_f} e^{2\pi i(\tau_1 w_1 + \cdots + \tau_f w_f)},$$

so folgt

$$(\tau_1 \nu_1 + \cdots \tau_f \nu_f) b_{\tau_1 \ldots \tau_f} = \left(\sum_k \tau_k \frac{\partial F_0}{\partial J_k}\right) B_{\tau_1 \ldots \tau_f} . \quad (2)$$

In dieser Gleichung hängen die $\nu_k = \partial H_0/\partial J_k$, die $\partial F_0/\partial J_k$, die b_τ und B_τ von den Werten J_k ab. Sie könnte dazu dienen, die Größen b_τ als Funktionen der J_k aus den bekannten Fourierkoeffizienten der Störungsfunktion erster Ordnung H_1 zu bestimmen. Ändern sich die J_k kontinuierlich bei Abänderung der Ausgangs-

[1] Vgl. H. POINCARÉ, Méthodes nouvelles, Bd. I, Kap. V; oder auch E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik, Kap. XIV (vgl. Fußnote in Ziff. 1).

bewegung, so wird für unendlich viele Werte eine der Summen $\sum \tau_k \nu_k$ verschwinden (vgl. Ziff. 8 über zufällige Entartung). Übrigens verschwindet jedesmal nicht eine einzelne, sondern stets eine ganze Klasse von ihnen, nämlich auch $\sum \tau'_k \nu_k$, sofern $\tau'_k = m\tau_k$, ja es verschwindet die ganze Familie von Klassen, welche auch alle nicht im selben Verhältnis stehenden Systeme τ_k enthält, für welche für feste ν_k die Summe $\sum \tau_k \nu_k = 0$ ist. Die zugehörigen Koeffizienten $B_{\tau_1 \ldots \tau_f}$ kann man in einem Sinn, der erst durch die Betrachtungen der Ziff. 17 deutlich werden wird, als säkular werdende Koeffizienten bezeichnen. Damit also Gleichung (2) für beliebige Werte J_k überhaupt bestehen kann, ist notwendig, daß alle säkular werdenden B_τ verschwinden[1]). Nun sind die B_τ durch das mechanische Problem vorgegeben und erfüllen im allgemeinen solche Bedingungen nicht. POINCARÉ nennt daher säkular werdende Familien der B_τ, welche die Bedingung nicht erfüllen, reguläre Familien, solche, die sie erfüllen, singuläre. In einem Gebiet des J-Raumes, in welchem Punkte mit regulären Familien dicht liegen, kann neben $H = W$ kein eindeutiges Integral der gestörten Bewegung bestehen.

Fall 2. Ist das ungestörte System s-fach eigentlich entartet, so gewinnt die Bedingung der Nichtexistenz eine andere Gestalt. Die der Gleichung (2) entsprechende Forderung wird

$$2\pi i\left[\left(\sum \tau_\alpha \nu_\alpha\right) b_{\tau_\alpha} - \left(\sum \tau_\alpha \frac{\partial F_0}{\partial J_\alpha}\right) B_{\tau_\alpha}\right] + \sum_\varrho \left[\frac{\partial B_{\tau_\alpha}}{\partial J_\varrho}\frac{\partial F_0}{\partial w_\varrho} - \frac{\partial B_{\tau_\alpha}}{\partial w_\varrho}\frac{\partial F_0}{\partial J_\varrho}\right] = 0.$$

Man kann also nicht wie vorher ein einfaches Verschwinden der (komplexen) B_{τ_α} an den Stellen zufälliger Entartung verlangen. Die Rechnung, die wir im einzelnen hier nicht wiedergeben, führt bei zwei nicht entarteten Freiheitsgraden (z. B. zwei Planeten) auf die untenstehende Formulierung. Wenn die $B_{\tau'}, B_{\tau''} \ldots$ einer Klasse, die man auch schreiben kann $B_{(n\tau)}, B_{(m\tau)} \ldots$, so beschaffen sind, daß alle Produkte $(B_{n\tau})^m \cdot (B_{m\tau})^{-n}$ dieser Klasse nur von $2s - \mu$ der $f + s$ Variabeln $J_\alpha, J_\varrho, w_\varrho$ abhängen, so heißt die Klasse singulär von μ-ter Ordnung. In einem Gebiet des J-Raumes, in welchem Punkte dicht liegen, deren zugehörige Klassen der B_{τ_α} nur singulär von μ-ter Ordnung sind, können neben $H = W$ höchstens μ unabhängige eindeutige Integrale der gestörten Bewegung existieren.

Auf eine solche Betrachtung stützt sich der Poincarésche Beweis der Nichtexistenz eines fünften eindeutigen Integrals im Problem der drei Körper (das wir schon auf den Schwerpunkt bezogen denken, so daß die sechs Schwerpunktsintegrale außer Betracht bleiben). Stellt man die Lagen jedes der beiden Planeten als rein periodische Funktion seiner mittleren Anomalie w' bzw. w'' dar (vgl. Ziff. 9), wie sie sich bei verschwindender gegenseitiger Beeinflussung berechnet, so wird die Störungsfunktion eine zweifache Fourierreihe in w' und w'':

$$H_1 = \sum\sum B_{\tau'\tau''}\, e^{2\pi i(\tau' w' + \tau'' w'')}.$$

Von den Produkten $(B_{n\tau' n\tau''})^m \cdot (B_{m\tau' m\tau''})^{-n}$ einer Klasse sind, wie POINCARÉ gezeigt hat, immer je 6, aber nicht 5, durch eine Funktionalbeziehung verknüpft. Daher sind nur $5 = 2s - \mu = 8 - 3$ voneinander unabhängig. Es existieren also außer dem Energieintegral noch drei weitere eindeutige Integrale — die Flächensätze — und keines mehr.

---

[1]) Streng genommen ist die mathematische Minimalforderung etwas geringer (vgl. POINCARÉ, a. a. O.); doch ist praktisch meist auch die obige Forderung erfüllt, wenn überhaupt eindeutige Integrale für die gestörte Bewegung existieren.

17. Die Methode der säkularen Störungen[1]. Diese ist eine Vorläuferin der späteren vollständigen Entwicklungen, die durch ihre astronomischen Anwendungen berühmt geworden ist. Sie wurde auch als erste in die Atommechanik übertragen, durch Bohr selbst in seiner Kopenhagener Akademiearbeit[2]. Obwohl eigentlich nur ein Teil einer umfassenden Störungsrechnung für eigentlich entartete Ausgangssysteme (vgl. Ziff. 19), wird sie in der Literatur meist gesondert und nicht in der strengen Form der Ziff. 15 dargestellt. Wir geben sie zunächst in der üblichen Weise wieder.

Es ist angenehm, der Rechnung eine bestimmte Vorstellung unterzulegen, als einfachstes Beispiel etwa die Störung der Keplerbahn eines Elektrons durch ein konstantes homogenes Kraftfeld (Starkeffekt). Die Hamiltonsche Funktion hat in den Winkelvariabeln der Keplerbahn geschrieben die Form

$$H = H_0(J_1^0) + \lambda H_1(J_1^0, J_2^0, w_1^0, w_2^0) = W; \tag{1}$$

w_1^0 ist nach Ziff. 9, Gleichung (6), die mittlere Anomalie des Planeten, J_1^0 die konjugierte eigentliche Wirkungsvariable (proportional der Wurzel aus der großen Achse der Bahn) und in H_0 gemäß Ziff. 9, Gleichung (7), eingehend; w_2^0, J_2^0, die uneigentlichen Variabeln, sind das Azimut des Perihels und der Präzessionswinkel der Bahnebene. Da die Transformation $(p, q) \to (J^0, w^0)$ durch Fourierreihen von w_1^0 vermittelt wurde, so haben wir uns H_1 als periodische Funktion dieser Größe vorzustellen. Z. B. bedeutet beim Starkeffekt H_1 das Potential des Elektrons im äußeren Feld F. Fallen dessen Kraftlinien in die Richtung der Polarachse (z-Achse), so hat man $H_1 = -eFz$, worin die z-Koordinate des in der Bahn umlaufenden Elektrons im ungestörten Fall durch eine eigentliche Fourierreihe in w_1 dargestellt wird, in deren Amplituden die übrigen (konstanten) Bahnelemente eingehen. Der Parameter λ bezeichnet im allgemeinen Fall das Verhältnis der störenden Kräfte zu den inneren Kräften des ungestörten Systems und ist klein gegen Eins.

Aus den kanonischen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \dot w_1^0 &= \frac{\partial H_0}{\partial J_1^0} + \lambda \frac{\partial H_1}{\partial J_1^0}, & \dot w_2^0 &= \lambda \frac{\partial H_1}{\partial J_2^0}, \\ \dot J_1^0 &= -\lambda \frac{\partial H_1}{\partial w_1^0}, & \dot J_2^0 &= -\lambda \frac{\partial H_1}{\partial w_2^0} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

sieht man, daß die Änderung der früher konstanten Bahnelemente sehr langsam vor sich geht, während die Frequenz des ungestörten Bahnumlaufs $\nu_1^0 = \partial H_0/\partial J_1^0$ von der Ordnung 1 ist.

Man kann nun die Bewegung zerlegen in Abschnitte, die gegeben sind durch das Anwachsen von w_1^0 um je eine Einheit, und die Zeitabschnitten $T', T'' \ldots$ von der ungefähren Größe einer Periode T des ungestörten Bahnumlaufs entsprechen. Man kann weiter die in (2) gegebene Änderungsgeschwindigkeit $\dot x$ eines Bahnelements x in jedem Zeitabschnitt $T^{(n)}$ zerlegen in eine mittlere — wir wollen sie mit Dx/Dt bezeichnen — und die Abweichung von ihr. Dann wird Dx/Dt zu nahezu gleichförmigen Störungen der Elemente Veranlassung geben, die zwar im einzelnen Abschnitt klein von der Ordnung λ sind, sich aber im Verlauf vieler Abschnitte zu endlichen Beträgen aufhäufen können; man nennt sie säkulare Störungen. Darüber werden sich kurzperiodische Schwingungen lagern, ungefähr im Rhythmus des ungestörten Bahnumlaufs, die niemals die Größenordnung λ überschreiten. Wir sehen hier ganz von ihnen ab, um so mehr,

[1] Vgl. Poincaré, Leçons usw. (vgl. Fußnote von Ziff. 1), Kap. VIII u. IX.
[2] N. Bohr, Quantentheorie (vgl. Fußnote von Ziff. 1).

als in der nächsten Ziffer ein allgemeines Verfahren zur Berechnung solcher kurzperiodischen Störungen beschrieben wird.

Um die säkularen Störungen zu berechnen, haben wir die Gleichungen (2) über einen Abschnitt $T^{(s)}$ zu mitteln. Rechts tritt dabei das Zeitmittel von $\partial H_1/\partial x$ auf. Man überzeugt sich leicht, daß es sich wegen der geringen Abweichungen der J_1^0, w_ϱ^0 von der Konstanz und der Größe w_1^0 von zeitlich linearem Wachstum nur um Größen von der Ordnung λ^2 unterscheidet von dem Wert $\partial \overline{H}_1/\partial x$, unter $\overline{H}_1$ den räumlichen Mittelwert von H_1 über die Einheitsstrecke von w_1^0 verstanden, oder das Zeitmittel über eine Periode derjenigen ungestörten Bahn, welche die wirkliche Bahn gerade oskuliert. Führt man demgemäß den Mittelwert $\overline{H}_1(J_1^0, J_\varrho^0, w_\varrho^0)$ an Stelle von H_1 in (2) ein, so ist die ursprüngliche treppenkurvenartige Definition von Dx/Dt durch eine stetige ersetzt. Aus den Gleichungen (2) entsteht, da $\overline{H}_1$ nicht mehr von w_1^0 abhängt,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D w_1^0}{Dt} &= \nu_1^0 + \lambda \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial J_1^0} + \lambda^2 \ldots, & \frac{D w_\varrho^0}{Dt} &= \lambda \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial J_\varrho^0} + \lambda^2 \ldots, \\
\frac{D J_1^0}{Dt} &= 0 + \lambda^2 \ldots, & \frac{D J_\varrho^0}{Dt} &= -\lambda \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial w_\varrho^0} + \lambda^2 \ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und diese Gleichungen führen zu der weiteren Folge

$$\frac{D\overline{H}_1}{Dt} = \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial J_1^0}\frac{D J_1^0}{Dt} + \sum_\varrho \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial w_\varrho^0}\frac{D w_\varrho^0}{Dt} + \sum_\varrho \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial J_\varrho^0}\frac{D J_\varrho^0}{Dt} = 0 + \lambda^2 \ldots \tag{4}$$

Es hat sich herausgestellt, daß die beiden Größen J_1^0 und $\overline{H}_1$ sich nur mit Geschwindigkeiten $\infty \lambda^2$ säkular verändern. Sie werden daher in Zeiten von der Größenordnung T/λ nur um Beträge $\infty \lambda$ gewachsen sein, und das bleibt auch richtig, wenn man hinzunimmt, daß J_1^0 kurzperiodischen Schwankungen unterliegt. In solchen Zeiten sind andererseits die w_ϱ^0, J_ϱ^0 endlichem Wachstum unterworfen.

Nimmt man weiterhin an, daß die **Bewegung des Systems auch mit Einschluß der Störungen periodisch oder bedingt periodisch bleibt**, so kehren die J_ϱ^0, w_ϱ^0 einzeln in Intervallen von der Ordnung T/λ zu ihrem Ausgangswert zurück, und man kann schließen, daß J_1^0 und $\overline{H}_1^0$ **nicht nur in solchen Zeitabschnitten, sondern dauernd konstant sind bis auf Schwankungen von der Ordnung** λ. (Im Fall bedingter Periodizität scheint dieser Schluß zunächst nicht zwingend, da eine Quasiperiode dann die Ordnung $T/\lambda^{(f-1)}$ hat; doch verschwindet das Bedenken bei näherer Überlegung, die hier zu weit führen würde.)

Die dauernde Konstanz von J_1^0 (also der großen Achse der Ellipse) ist die erste Behauptung, auf die sich der berühmte **Laplacesche Stabilitätsbeweis des Planetensystems** bezieht. Wir sehen hier, daß sie zwar richtig ist, wenn man schon von dem Postulat der bedingt periodischen Gesamtbewegung ausgeht. Bewiesen ist dieser Charakter keineswegs, im Gegenteil ist das Ergebnis der Untersuchungen von POINCARÉ (s. Ziff. 16), daß schon beim Dreikörperproblem keine bedingt periodische Bewegung vorliegt. Das ist der Grund, weshalb der Laplacesche Stabilitätsbeweis nicht mehr als Beweis gewertet werden darf; er zeigt nur die Konstanz der großen Achse in langen, aber nicht beliebig langen Zeiten. Auch die zweite Hälfte des Laplaceschen „Beweises", die aus der genäherten Konstanz der großen Bahnachsen auf die dauernde Kleinheit der Exzentrizitäten und Neigungen schließt, steht und fällt mit der ersten.

Für unseren Zweck ist gewonnen, daß, bedingt periodische Totalbewegung vorausgesetzt, das mittlere Störungspotential $\overline{H}_1$ bis auf Größen $\infty \lambda$ konstant

gesetzt und die Variable J_1^0 in ihm als eine Konstante angesehen werden darf. Das reduziert die säkularen Gleichungen (3) der J_ϱ^0, w_ϱ^0 in erster Näherung zu einem Bewegungsproblem von $s = f - 1$ Freiheitsgraden (s, wie seither, der Entartungsgrad), welches gegeben ist durch die kanonischen Gleichungen

$$\frac{D w_\varrho^0}{D t} = \frac{\partial \lambda H_1}{\partial J_\varrho^0}, \qquad \frac{D J_\varrho^0}{D t} = -\frac{\partial \lambda H_1}{\partial w_\varrho^0} \tag{4}$$

und die „Energiegleichung"

$$\lambda H_1(J_\varrho^0, w_\varrho^0) = \lambda W_1 .$$

Gelingt es, etwa auf dem Weg über die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung

$$H_1\left(\frac{\partial S}{\partial w_\varrho^0}, w_\varrho^0\right) = W_1$$

das Problem zu integrieren, so ist damit nachträglich die Voraussetzung über den bedingt periodischen Charakter gerechtfertigt. Man kann dann Winkel- und Wirkungsvariable w_ϱ, J_ϱ einführen, derart, daß W_1 eine Funktion der J_ϱ allein wird und die w_ϱ^0, J_ϱ^0 sich als periodische Funktionen der w_ϱ darstellen, welch letztere linear in der Zeit anwachsen.

18. Störung eines nicht entarteten Systems. Wir gehen nun über zur Darstellung der heutigen Form der Störungsrechnung, einer folgerichtigen Durchführung der Entwicklung nach einem Parameter λ[1]).

Der einfachste Fall, der eintreten kann, ist der eines bedingt periodischen, nicht entarteten Ausgangssystems, in dessen Winkel- und Wirkungsvariablen w_k^0, J_k^0 wir das Problem ansetzen:

$$H = H_0(J^0) + \lambda H_1(J^0, w^0) + \cdots + \lambda^n H_n(J^0, w^0) + \cdots = W . \tag{1}$$

Wir suchen, unter der willkürlichen Annahme, daß auch das gestörte System bedingt periodisch sei, die neuen Winkel- und Wirkungsvariablen w_k, J_k, nach deren Einführung H eine Funktion $W(J)$ der J_k allein werden muß.

Als Integrationsverfahren dient uns wie immer die Jacobische Methode[2]). Wir bestimmen also aus der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial w^0}, w^0\right) = W$$

eine Funktion $S(w_k^0, J_k)$, die Erzeugende der Transformation

$$J_k^0 = \frac{\partial S}{\partial w_k^0}, \qquad w_k = \frac{\partial S}{\partial J_k}. \tag{2}$$

Nach dem Satz von POINCARÉ (Ziff. 15) hat die Bestimmung der J_k, w_k die Form einer Potenzentwicklung nach λ; wir setzen daher an:

$$S = S_0 + \lambda S_1 + \lambda^2 S_2 + \cdots + \lambda^n S_n + \cdots . \tag{3}$$

Da nach Voraussetzung keine der alten Winkelvariablen bei der ungestörten Bewegung entartet ist, vielmehr alle w_k^0 endliche Änderungsgeschwindigkeiten $\dot w_k^0 = \nu_k^0 = \partial H_0/\partial J_k^0$ haben, so postulieren wir für jedes von ihnen eine Gleichung wie Ziff. 14 (3):

$$w_k = w_k^0 + \lambda(\bar w_1^0, \ldots \bar w_f^0). \tag{4}$$

---

[1]) Vgl. H. POINCARÉ, Méthodes nouvelles, Bd. II, Kap. 9 u. M. BORN u. W. PAULI, jun., ZS. f. Phys. Bd. 10, S. 137, 1922.

[2]) In Ziff. 15 wurde ohne Transformation auf neue Variable direkt integriert. Damit hängt zusammen, daß der Zeiger Null der Koordinaten dort in anderem Sinn gebraucht ist.

Daraus läßt sich nach Vergleich mit (2) schließen, daß $S_0 = \sum J_k w_k^0$ ist, und daß alle übrigen $\partial S_n/\partial J_k$, daher auch die S_n selbst, periodische Funktionen der w_k^0 mit der Periode Eins sind.

Unter Berücksichtigung von (2), (3), (4) entsteht aus (1), nachdem für J_k^0 schon die J_k eingeführt und die Glieder der Hamiltonschen Funktion neu entwickelt sind,

$$\left.\begin{aligned} H = H_0(J) &+ \lambda\left\{\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k}\frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} + H_1(J w^0)\right\} \\ &+ \lambda^2\left\{\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k}\frac{\partial S_2}{\partial w_k^0} + \frac{1}{2}\sum_{kj} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_k \partial J_j}\frac{\partial S_1}{\partial w_k^0}\frac{\partial S_1}{\partial w_j^0} + \sum_k \frac{\partial H_1}{\partial J_k}\frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} + H_2(J w^0)\right\} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \lambda^n\left\{\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial J_k}\frac{\partial S_n}{\partial w_k^0} + \Phi_n(J w^0)\right\} + \cdots = W. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$H_0(J)$, $\partial H_0/\partial J_k$ usf. bedeutet, daß in $H_0(J^0)$ bzw. seinen Ableitungen nach J_k^0 bei unveränderter Funktionsform die J_l^0 durch die J_l ersetzt sind. Die Größen $\partial H_0/\partial J_k$ sind also nichts anderes als die Frequenzen ν_k^0 der ungestörten Bewegung, welche sie für die festen Werte $J_k^0 = J_k$ annehmen würde. Die Funktionen Φ_n sind Summen von Gliedern, deren jedes mindestens eine der Funktionen $H_0, \ldots H_n$ oder ihre Ableitungen und außerdem meist noch Faktoren $\partial S_i/\partial w_k^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ enthält; also lauter beim n-ten Schritt bekannte Funktionen, die überdies sämtlich periodisch in den w_k^0 sind mit Periode 1, so daß Φ_n geschrieben werden kann

$$\Phi_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(n)}_{\tau_1 \ldots \tau_f}\, e^{2\pi i(\tau_1 w_1^0 + \cdots + \tau_f w_f^0)}. \quad (6)$$

Aus der Differentialgleichung (5) folgern wir einzeln die Gleichungen

$$\sum \nu_k^0 \frac{\partial S_n}{\partial w_k^0} + \Phi_n(J w^0) = W_n. \quad (7)$$

S_n muß, wie oben gezeigt wurde, eine periodische Funktion der w_k^0 sein, daher machen wir mit unbestimmten Koeffizienten den Ansatz

$$S_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(n)}_{\tau_1 \ldots \tau_f}\, e^{2\pi i(\tau_1 w_1^0 + \cdots + \tau_f w_f^0)} \quad (8)$$

und gewinnen durch Vergleich von (6), (7) und (8), wenn wir den rein periodischen Anteil von Φ (ohne konstantes Glied) mit $\tilde{\Phi}$ bezeichnen

$$\sum_k \nu_k^0 \frac{\partial S_n}{\partial w_k^0} = -\tilde{\Phi}_n, \qquad B^{(n)}_{\tau_1 \ldots \tau_f} = \frac{A^{(n)}_{\tau_1 \ldots \tau_f}}{2\pi i \sum \tau_k \nu_k^0} \quad (9)$$

mit Ausnahme von $B_{00 \ldots 0}$, das willkürlich bleibt (aber als additive Konstante in S unwesentlich ist). Außerdem folgt aus (6) und (7)

$$W_n = A^{(n)}_{0 \ldots 0} = \bar{\Phi}_n. \quad (10)$$

Damit ist die Bestimmung der Funktionen S_n, also auch diejenige der J_k, w_k, formal vollzogen. Nebenher ergab sich W in Funktion der neuen Wirkungsvariabeln in der Form

$$W = W_0(J) + \lambda W_1(J) + \cdots + \lambda^n W_n(J) + \cdots, \quad (11)$$

wovon wir einige Glieder angeben:

$$W_0 = H_0(J), \qquad W_1 = \overline{H_1(J)}, \qquad W_2 = \overline{\Phi_2(J)}.$$

Das Verfahren ist dem Bedürfnis der Quantenmechanik aufs beste angepaßt, weil es die n-te Näherung der Energie schon nach $n-1$ Schritten zu bestimmen erlaubt. Das erste Näherungsglied W_1 ergibt sich als zeitlicher Mittelwert der Störungsfunktion erster Ordnung genommen über die ungestörte Bewegung.

Betrachten wir noch den Zusammenhang zwischen alten und neuen Variablen und stellen dabei einen Augenblick die Konvergenzfrage zurück. Es wird

$$\left.\begin{aligned} J_k^0 &= J_k + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{\partial S_n}{\partial w_k^0}, \\ w_k &= w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{\partial S_n}{\partial J_k}, \\ \nu_k &= \nu_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{\partial W_n}{\partial J_k}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Der ungestörten Bewegung überlagern sich kleine, mit λ verschwindende Schwankungen mit annähernd der alten, endlichen Frequenz. Es treten also hier nur sog. kurzperiodische Störungen auf, nicht die in der letzten Ziffer beschriebenen säkularen Störungen.

Die Frage der Konvergenz der in (8) und (9) erhaltenen Reihen ist am meisten gefördert worden durch Untersuchungen von Bruns[1]). Da nach unserer Voraussetzung die Frequenzen ν_k^0 bei der ungestörten Bewegung inkommensurabel sind, so verschwinden die Nenner in (9) für die alten Werte J_k gewiß nicht exakt. Trotzdem können sie für gewisse Kombinationen der ν_k beliebig klein werden. Bruns hat nun gezeigt, daß der zahlentheoretische Charakter der Verhältnisse $\nu_1^0 : \ldots : \nu_f^0$ maßgebend ist für die Konvergenz oder Divergenz der Reihen, derart, daß in einem noch so kleinen Bereich der ν_k^0 unendlich viele Konvergenz- und Divergenzstellen liegen. Für alle darin eingeschlossenen rationalen Verhältnisse konvergiert, wie wir wissen, nicht einmal das einzelne Glied der Reihe. Was für den ν_k^0-Bereich gilt, gilt des stetigen Funktionalzusammenhangs wegen auch für ein Gebiet der J_k. Man kommt also zu dem Schluß, daß die durch (8) und (9) definierte Funktion S keine stetige Funktion der J_k ist. Damit fallen eigentlich alle Voraussetzungen der Rechnung, z. B. der Gleichungen (2). Trotzdem beweist die Praxis der Astronomie, daß den Reihen (8) die größte Bedeutung zukommt. Daß sie an geeigneter Stelle abgebrochen, Berechnungen von großer Genauigkeit erlauben. Das liegt an ihrer Semikonvergenz, über die Poincaré einige Untersuchungen angestellt hat, die aber nicht abschließend sind[2]).

19. Störungen eines eigentlich entarteten Systems. Wenn das Ausgangssystem eigentlich entartet ist, so ist das Verfahren der vorigen Ziffer zunächst nicht anwendbar, denn die uneigentlichen Winkelvariablen sind dann im ungestörten Fall konstant, und wir wissen aus Ziff. 17, daß die Störung säkulare, endliche Änderungen an ihnen hervorbringt. Es fehlt für sie also sowohl die Voraussetzung für Gleichung (4) von Ziff. 18 und den damit zusammenhängenden

[1]) H. Bruns, Astron. Nachr. Bd. 109, S. 215. 1884; C. L. Charlier, Mechanik des Himmels, Bd. II, S. 307, vgl. Ziff. 1, Fußnote; H. Poincaré, Méthodes nouvelles, Bd. II, Kap. VIII u. XIII.

[2]) H. Poincaré, ebenda.

Ansatz (8) als auch die Vollständigkeit der Differentialgleichung (9). Beides wird dadurch erreicht, daß man zunächst eine intermediäre Bewegung betrachtet, welche die säkularen Störungen mitenthält, so daß die Gesamtbewegung nur noch um Glieder $\sim\lambda$ von ihr abweicht.

Aus der vollständigen Hamiltonschen Funktion

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0(J^0_\alpha) + \lambda\mathfrak{H}_1(J^0_\alpha, J^0_\varrho, w^0_\alpha, w^0_\varrho) + \cdots + \lambda^n\mathfrak{H}_n(J^0_k, w^0_k) + \cdots = W \tag{1}$$

greifen wir also zunächst einen Anteil

$$\mathfrak{H}^*_0 = \mathfrak{H}_0(J^0_\alpha) + \lambda\mathfrak{G}(J^0_\alpha, J^0_\varrho, w^0_\varrho) = W_0 + \lambda W_1 \tag{2}$$

heraus. Nach Ziff. 17 vermuten wir, daß $G = \overline{\mathfrak{H}}_1$ zu nehmen ist, doch stellen wir die Entscheidung noch so lange zurück, bis diese Wahl sich aus dem Zusammenhang der nachfolgenden Rechnung zwangläufig ergibt. Die Integration des Bewegungsproblems (2) werde mit Hilfe des alten Verfahrens vollzogen: Man sucht eine Erzeugende

$$S_0 = \sum_k J^*_k w^0_k + T(J^*_\alpha, J^*_\varrho, w^0_\varrho) \tag{3}$$

der (endlichen) Transformation

$$w^*_k = \frac{\partial S_0}{\partial J^*_k}, \qquad J^0_\alpha = \frac{\partial S_0}{\partial w^0_\alpha} = J^*_\alpha, \qquad J^0_\varrho = \frac{\partial S_0}{\partial w^0_\varrho} = \frac{\partial T}{\partial w^0_\varrho}$$

auf neue Wirkungs- und Winkelvariable J^*_k, w^*_k zu bestimmen aus der Differentialgleichung [entsprechend Ziff. 17, Gleichung (5)]

$$\mathfrak{G}\left(J^*_\alpha, \frac{\partial T}{\partial w^0_\varrho}, w^0_\varrho\right) = W_1. \tag{4}$$

Ein allgemeiner Weg zu ihrer Lösung läßt sich nicht angeben (vgl. die Bemerkung in Ziff. 14, Schluß), wir nehmen hier an, sie sei integriert. Nach Einführung der J^*_k, w^*_k in (1) entsteht (wir schreiben die veränderten Funktionsformen jetzt mit lateinischen Buchstaben, doch ist $H_0 = \mathfrak{H}_0$)

$$H = H^*_0(J^*_k) + \lambda[H_1(J^*_k, w^*_k) - G(J^*_k)] + \cdots + \lambda^n H_n(J^*_k, w^*_k) + \cdots = W. \tag{5}$$

Dabei besteht H^*_0 aus zwei Anteilen verschiedener Größenordnung:

$$H^*_0(J^*_k) = H_0(J^*_\alpha) + \lambda G(J^*_\alpha, J^*_\varrho).$$

Das hat zur Folge, daß auch die Bewegungsfrequenzen ν^*_k der früher eigentlichen und uneigentlichen Winkelvariablen von verschiedener Größenordnung sind:

$$\nu^*_\alpha = \frac{\partial H^*_0}{\partial J^*_\alpha} \sim 1, \qquad \nu^*_\varrho = \frac{\partial H^*_0}{\partial J^*_\varrho} = \lambda\frac{\partial G}{\partial J^*_\varrho} \sim \lambda. \tag{6}$$

Wollte man jetzt auf (5) das Verfahren von Ziff. 18 anwenden, also mit Hilfe von

$$\left.\begin{aligned} S &= \sum_k J_k w^*_k + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n S_n(J_k, w^*_k), \\ w_k &= w^*_k + \sum_n \lambda^n \frac{\partial S_n}{\partial J_k}; \qquad J^*_k = J_k + \sum_n \lambda^n \frac{\partial S_n}{\partial w^*_k} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

die endgültigen Variablen J_k, w_k einführen, so würden infolge von (6) alle Koeffizienten $B^{(n)}_{\tau_1\ldots\tau_f}$, für welche die τ_α gleich Null sind, wegen der Nenner in Ziff. 18 (9) proportional $1/\lambda$. D. h. aus der Fourierreihe für S_n würde sich ein gewisser Teil herausheben, der der Größenordnung nach schon in die $(n-1)$te Näherung gehört.

Das kann im Fall der ersten Näherung dadurch vermieden werden, daß man alle von den w^0_α unabhängigen Anteile des mit λ behafteten Glieds von (5), also alle Amplituden $A^{(1)}_{\tau_1 \ldots \tau_f}$ ($\tau_\alpha = 0$) zum Verschwinden bringt. Es geschieht durch die Wahl $G = \bar{H}_1$, die sich damit als willkürfrei herausstellt. (Man sieht nachträglich auch, daß es erlaubt war, $\mathfrak{G}$ von vornherein von den w^0_ϱ unabhängig anzunehmen.) Die säkularen Störungen sind völlig durch die Funktion $\bar{\bar{\mathfrak{H}}}_1(w^0_\varrho)$ bestimmt, und die Rechnungen der Ziff. 17 stellen sich als der Beginn eines umfassenden Näherungsverfahrens heraus. In den späteren Näherungen läßt sich aber[1] die Bestimmung jeder Funktion S_{n-1} in zwei Schritten nicht vermeiden. Entwickelt man nämlich mit Hilfe von (7) die Funktion (5) an der Stelle $J^0_k = J_k$ und beachtet $G = \bar{H}_1$, so erhält man

$$H_0(J_\alpha) + \lambda\left\{\sum_\alpha \frac{\partial H_0}{\partial J_\alpha}\frac{\partial S_1}{\partial w^0_\alpha} + \tilde{H}_1(J_k, w^0_k) + \bar{H}_1(J_k)\right\}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n\left[\sum_\alpha \frac{\partial H_0}{\partial J_\alpha}\frac{\partial S_n}{\partial w^0_\alpha} + \sum_k \frac{\partial H_1}{\partial J_k}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial w^0_k} + \Phi_n(S_1, \ldots S_{n-1}, H_0, \ldots H_n)\right] = W.$$

Die der Gleichung (7) von Ziff. 18 entsprechende Gleichung

$$\sum_\alpha \frac{\partial H_0}{\partial J_\alpha}\frac{\partial S_n}{\partial w^0_\alpha} + \sum_k \frac{\partial H_1}{\partial J_k}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial w^0_k} + \Phi_n(S_1, \ldots S_{n-1}, H_0, \ldots H_n) = W_n \qquad (8)$$

kann nun erstens über den Einheitswürfel aller w^0_k gemittelt werden, was wir mit zwei Querstrichen andeuten, und ergibt, weil die beiden Summen kein konstantes Glied besitzen,

$$W_n = \bar{\bar{\Phi}}_n.$$

Man bemerkt, daß zu dem eingangs berechneten Wert von $W_1 (= \bar{H}_1)$ nichts mehr hinzutritt, daß also auch hier der Satz gilt: Die erste Korrektur des Energiewertes ist gleich dem Zeitmittelwert der Störungsenergie erster Ordnung, genommen über die ungestörte Bahn. Zweitens kann man sie über den Einheitswürfel der w^0_α allein (d. h. über den zeitlichen Ablauf der ungestörten Bahn) mitteln, was wie seither mit einem Strich bezeichnet werde. Das Ergebnis

$$\sum_\varrho \frac{\partial H_1}{\partial J_\varrho}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial w^0_\varrho} + \bar{\Phi}_n = W_n \qquad (9)$$

werde von (8) abgezogen. Dadurch entsteht die Differenz

$$\sum_\alpha \frac{\partial H_0}{\partial J_\alpha}\frac{\partial S_n}{\partial w^0_\alpha} + \sum_\alpha \frac{\partial H_1}{\partial J_\alpha}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial w^0_\alpha} + \tilde{\Phi}_n(S_1, \ldots S_{n-1}, H_0, \ldots H_n) = 0.$$

Aus dieser linearen Differentialgleichung bestimmt sich wie früher durch Koeffizientenvergleichung der Fourierreihen der von den w^0_α abhängige Teil S'_n von S_n. Ein weiterer, nur von den Variablen w^0_ϱ abhängiger Teil R_n bleibt unbestimmt. Er kann aber aus der zu (9) entsprechenden Gleichung

$$\sum_\varrho \frac{\partial H_1}{\partial J_\varrho}\frac{\partial R_n}{\partial w^0_\varrho} = W_{n+1} - \bar{\Phi}_{n+1} = -\tilde{\bar{\Phi}}_{n+1}$$

in gleich einfacher Weise nachträglich bestimmt werden, weil sich herausstellt, daß $\bar{\Phi}_{n+1}$ zwar von S'_n, aber nicht von R_n abhängt, so daß rechts wieder nur bekannte Fourierglieder stehen.

[1] Entgegen einer vom Verfasser früher (ZS. f. Phys. Bd. 33, S. 224. 1925) geäußerten Meinung.

Das Verfahren versagt in dem praktisch nicht unwichtigen Fall $\overline{H}_1 = 0$. In diesem Fall hat man H_1 erst durch eine Transformation der Form (7) ganz fortzuschaffen und aus dem Mittelwert der dann entstehenden neuen Funktion H_2 die säkularen Störungen zu berechnen. Zu ihnen gibt also nicht bloß der Mittelwert der ursprünglichen Funktion H_2 Veranlassung, sondern auch ein von den kurzperiodischen Störungen erster Ordnung herrührender Anteil[1]).

20. Störung eines zufällig entarteten Systems. Etwas anders gestaltet sich der Weg, den man gehen muß, um die Störungen eines bedingt periodischen Systems in der Umgebung einer zufälligen Entartungsstelle zu untersuchen, und zwar aus folgendem Grund: Man muß im Prinzip immer daran festhalten, daß die Wirkungsvariablen des gestörten Systems zwar natürlich Konstante der Bewegung, aber doch von Bahn zu Bahn variable Größen sind. Nur so läßt sich die Erzeugende $S(J, w^0)$ der Transformation $(J^0, w^0) \to (J, w)$ als Funktion derselben auffassen und den Transformationsgleichungen

$$J_k^0 = \frac{\partial S}{\partial w_k^0}, \qquad w_k = \frac{\partial S}{\partial J_k} \tag{1}$$

ein Sinn beilegen. Auch besteht physikalisch das Bedürfnis, nicht nur die Störung der einen, exakt zufällig entarteten Bewegung, sondern auch ihrer Nachbarbewegungen (für welche die kritischen Frequenzen zwar nicht verschwinden, aber sehr klein werden) zu untersuchen. Mathematisch ist die Stelle zufälliger Entartung durch ganz bestimmte Werte $J_a^0 = J_a^*$, $J_e^0 = J_e^*$ der eigentlichen und uneigentlichen Wirkungsvariablen des Ausgangssystems bezeichnet. Die Eigenart dieses Falles tritt am deutlichsten hervor, wenn man in der Rechnung durchaus an ihnen festhält und z. B. dafür sorgt, daß nach der Transformation (1) die Neuentwicklung der Hamiltonschen Funktion [vgl. wie in Ziff. 18 Gleichung (5) gewonnen wurde] **an der kritischen Stelle selbst** vorgenommen wird. Man hat sich also so einzurichten, daß die linke Reihe der Transformationsgleichungen (1) die Form erhält

$$J_k^0 = J_k^* + \text{Gliedern, die mit } \lambda \text{ verschwinden;}$$

man hat deshalb S zu schreiben

$$S = \sum J_k^* w_k^0 + \text{einem Anteil } S'\text{, der mit } \lambda \text{ verschwindet.} \tag{2}$$

Das ist der eine und wohl wichtigste Unterschied gegenüber den früheren Fällen. Ein zweiter kommt hinzu. Während bei eigentlicher Entartung eines Systems die entarteten Winkel- und Wirkungsvariablen eine gewisse Willkür an sich tragen (es sind ja Koordinaten für Freiheitsgrade, die bei keiner Bewegung des Systems benutzt werden; sie sind daher durch die Bewegung auch nicht ausgezeichnet), fällt diese Willkür in der Wahl der uneigentlichen Variabeln bei nur zufälliger Entartung weg. Hier sind sie durch die möglichen Nachbarbewegungen eindeutig bestimmt. Das ist der innere Grund dafür, daß die säkularen Störungen, die wieder zuerst zu untersuchen sind, hier nicht so stark eingreifen, so daß ein Näherungsverfahren hinreicht, sie zu berechnen.

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns der Aufgabe selbst zu, deren Lösung von Bohlin stammt[2]).

Die Hamiltonsche Funktion schreibt sich in den Wirkungs- und Winkelvariablen des ungestörten Systems

$$H = H_0(J_a^0, J_e^0) + \lambda H_1(J_a^0, J_e^0, w_a^0, w_e^0) + \cdots + \lambda^2 H_{20}(J^0, w^0) + \cdots = W. \tag{3}$$

[1]) Man findet Näheres hierüber in einer Arbeit von M. Born u. W. Heisenberg, Ann. d. Phys. Bd. 74, S. 1. 1924.

[2]) H. Bohlin, Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handlingar Bd. 14, Afd. I, Nr. 5. Stockholm 1888; vgl. H. Poincaré, Méthodes nouvelles Bd. II, Kap. XIX u. XX; M. Born u. W. Heisenberg, ZS. f. Phys. Bd. 14, S. 44. 1923.

(Die Indizierung der H_i mit lauter geraden Zahlen wird unten verständlich.) H_0 hängt also auch von den J_ϱ^0 ab, aber mit den Bedingungen

$$\nu_\varrho^0 = \frac{\partial H_0}{\partial J_\varrho^0} = 0; \tag{4}$$

$\partial H_0/\partial J_\varrho^0$ bedeutet ähnlich wie früher $\partial H_0/\partial J_\varrho^0(J_\alpha^0, J_\varrho^0)$.

Es handelt sich zunächst darum, die säkularen Störungen zu berechnen und damit eine nicht entartete intermediäre Bewegung zu gewinnen. Sie werden wie in Ziff. 17 und 19 erhalten aus

$$H_0^* = H_0(J_\alpha^0, J_\varrho^0) + \lambda \bar{H}_2(J_\alpha^0, J_\varrho^0, w_\varrho^0) = W_0^*, \tag{5}$$

einem Problem von nur s Freiheitsgraden, in dem die J_α^0 die Rolle von konstanten Parametern spielen. In vielen Fällen wird es möglich und geraten sein, dasselbe streng zu integrieren; in andern Fällen tritt dafür das Bohlinsche Näherungsverfahren ein, welchem wir uns jetzt zuwenden. Bestimmt man nämlich die Erzeugende T für die Transformation auf die intermediären Winkel- und Wirkungsvariablen $\mathfrak{w}_k$, $\mathfrak{J}_k$ von (5) aus der Hamiltonschen Differentialgleichung

$$H_0^* = H_0\left(\frac{\partial T}{\partial w_\alpha^0}, \frac{\partial T}{\partial w_\varrho^0}\right) + \lambda \bar{H}_2\left(\frac{\partial T}{\partial w_\alpha^0}, \frac{\partial T}{\partial w_\varrho^0}, w_\varrho^0\right) = W_0^*, \tag{6}$$

so kann und soll entsprechend (2) für T der Ansatz gemacht werden

$$T(\mathfrak{J}_k, w_k^0) = \sum J_k^* w_k^0 + T'(\mathfrak{J}_k, w_k^0),$$

worin T' mit λ verschwindet. Außerdem läßt sich (6) separieren in $\partial T/\partial w_\alpha^0 = \mathfrak{J}_\alpha$ = konst. und die entsprechende Restgleichung. In den Transformationsgleichungen

$$J_k^0 = \frac{\partial T}{\partial w_k^0} = J_k^* + \frac{\partial T'(\mathfrak{J}_k, w_k^0)}{\partial w_k^0} \tag{7}$$

ist deshalb für die nicht entarteten Freiheitsgrade

$$\frac{\partial T'}{\partial w_\alpha^0} = \Delta_\alpha$$

konstant [nämlich gleich $(\mathfrak{J}_\alpha - J_\alpha^*)$] anzunehmen.

Bohlin hat nun gezeigt, daß die **Entwicklung von T' nach Potenzen von $\sqrt{\lambda}$ fortschreiten muß.** Man versteht das etwa durch folgende Überlegung: Setzt man (7) in (5) ein, so entsteht

$$W_0^* - H_0(J_\alpha^*, J_\varrho^*) - \sum_\alpha \nu_\alpha^* \Delta_\alpha = \left\{\sum_\varrho \sum_\sigma A_{\varrho\sigma} \Delta_\varrho \Delta_\sigma + \sum_\varrho B_\varrho \Delta_\varrho + C\right\} + \cdots + \lambda \bar{H}_2$$

mit den Bedeutungen

$$A_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_\varrho^* \partial J_\sigma^*}, \qquad B_\varrho = \sum_\alpha \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 H}{\partial J_\varrho^* \partial J_\alpha^*}\Delta_\alpha,$$

$$C = \sum_\alpha \sum_\beta \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_\alpha^* \partial J_\beta^*}\Delta_\alpha \Delta_\beta.$$

Die linke Seite ist konstant, weil die Größen Δ_α willkürliche Konstante sind, die nur den Zweck haben, die $\mathfrak{J}_\alpha$ von den festgelegten Werten J_α^* zu befreien.

Man sieht, daß die veränderlichen Größen A_ϱ, um die Änderungen von $\overline{H}_1$ auszugleichen, von der Ordnung $\sqrt{\lambda}$ sein müssen. Wir setzen daher

$$T = \sum J_k^* w_k^0 + \sqrt{\lambda}\, T_1 + \lambda T_2 + \cdots \tag{8}$$

und erhalten aus (6) mit $a_{\varrho\sigma} = A_{\varrho\sigma}$, $\sqrt{\lambda}\, b_\varrho = B_\varrho$, $\lambda c = C$

$$\left.\begin{aligned} &H_0(J_\alpha^*, J_\varrho^*) + \sqrt{\lambda} \sum_\alpha \nu_\alpha^* \frac{\partial T_1}{\partial w_\alpha^0} \\ &\qquad + \lambda \left\{ \sum_\varrho \sum_\sigma a_{\varrho\sigma} \frac{\partial T_1}{\partial w_\varrho^0} \frac{\partial T_1}{\partial w_\sigma^0} + \sum_\varrho b_\varrho \frac{\partial T_1}{\partial w_\varrho^0} + c + \overline{H}_1(J_\alpha^*, J_\varrho^*, w_\varrho^0) \right\} \\ &\qquad + \lambda\sqrt{\lambda}\{\}_3 + \lambda^2\{\}_4 + \cdots = W_0^* = W_0 + \sqrt{\lambda}\, W_1 + \lambda W_2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

und daraus die Teilgleichungen

$$H_0(J_\alpha^*, J_\varrho^*) = W_0, \tag{9$_0$}$$

$$\sum_\alpha \nu_\alpha^* \frac{\partial T_1}{\partial w_\alpha^0} = W_1, \tag{9$_1$}$$

$$\sum_\varrho \sum_\sigma a_{\varrho\sigma} \frac{\partial T_1}{\partial w_\varrho^0} \frac{\partial T_1}{\partial w_\sigma^0} + \sum_\varrho b_\varrho \frac{\partial T_1}{\partial w_\varrho^0} + c + \overline{H}_1(J_\alpha^*, J_\varrho^*, w_\varrho^0) = W_2. \tag{9$_2$}$$

Aus (9$_1$) folgt die Konstanz der $\partial T_1/\partial w_\alpha^0$, die vorauszusehen war; wir setzen also, indem wir in T_1 zunächst solche Integrationskonstanten $\mathfrak{K}$ aufnehmen, die sich gerade darbieten, und sie erst später durch die Wirkungsvariablen $\mathfrak{J}$ ersetzen,

$$\frac{\partial T_1}{\partial w_\alpha^0} = \mathfrak{K}_\alpha$$

und erhalten

$$T_1 = \sum_\alpha \mathfrak{K}_\alpha w_\alpha^0 + T_1'(w_\varrho^0).$$

T_1' bestimmt sich aus (9$_2$). Trotzdem diese Differentialgleichung einen wesentlich einfacheren Charakter hat als (6), die sie vertritt, kann keine allgemeine Lösung für beliebiges $\overline{H}_1$ angegeben werden. Das Bohlinsche Näherungsverfahren vereinfacht zwar die Berechnung der säkularen Störungen (das ist der einzige Gewinn), aber es erzwingt sie nicht. Wir nehmen jedoch an, daß (9$_2$) auf irgendeine Weise, etwa durch Separation, integrierbar sei. Im Ergebnis erhält man T_1' als Funktion der w_ϱ^0 und von s willkürlichen Integrationskonstanten, an deren Stelle wir wie in Ziff. 6 die Phasenintegrale

$$\mathfrak{J}_\varrho = \oint \frac{\partial T_1}{\partial w_\varrho^0}\, d w_\varrho^0$$

einführen, so daß

$$T_1 = \sum_\alpha \mathfrak{K}_\alpha w_\alpha^0 + T_1'(\mathfrak{J}_\varrho, w_\varrho^0) \tag{8'}$$

entsteht.

Hier brechen wir das Näherungsverfahren ab. Es hat ja nur den Zweck, die säkularen Störungen in erster Näherung zu liefern. Wir setzen also willkürlich $T_2 = T_3 = \cdots = 0$, haben damit aber nicht (6) oder (6') integriert, sondern das Problem

$$H_0^* - \lambda\sqrt{\lambda}\{\}_3 - \lambda^2\{\}_4 - \cdots = W_0^* = W_0 + \sqrt{\lambda}\, W_1 + \lambda W_2. \tag{10}$$

Noch ist eine Bemerkung zu machen über die eingeführten Größen $\mathfrak{K}_\beta$. Sie sind nicht die Wirkungsvariablen von (10), was man schon daran sieht, daß sie für $\lambda = 0$ nicht in die Werte J_β^* übergehen. Jene wären nach Ziff. 6 (1) definiert durch Phasenintegrale

$$\mathfrak{J}_\beta = \oint \frac{\partial T}{\partial w_\beta^0} d w_\beta^0.$$

Das ergibt nach (8) und (8')

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_\alpha &= J_\alpha^0 = J_\alpha^* + \sqrt{\lambda}\,\mathfrak{K}_\alpha, \\ \mathfrak{J}_\varrho &= J_\varrho^* \oint d w_\varrho^0 + \sqrt{\lambda}\,\mathfrak{K}_\varrho, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und die in bezug auf H kanonisch konjugierten Winkelvariablen sind

$$\mathfrak{w}_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{J}_\alpha} = \frac{\partial T_1}{\partial \mathfrak{K}_\alpha} = w_\alpha^0,$$

$$\mathfrak{w}_\varrho = \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{J}_\varrho} = \frac{\partial T_1}{\partial \mathfrak{K}_\varrho}.$$

Für das Folgende ist es zweckmäßiger, die in bezug auf $\mathfrak{H} = (H - W_0)/\sqrt{\lambda}$ kanonisch konjugierten Variablenpaare $\mathfrak{w}_\beta$, $\mathfrak{K}_\beta$ beizubehalten. Es wird dadurch eine kanonische Transformation vom Charakter der Gleichung (11) in Kap. 3 Ziff. 3 in die Rechnung verflochten. Man muß aber im Auge behalten, daß die Größen $\mathfrak{K}$ nicht die Eigenschaft von Wirkungsvariablen besitzen.

In den gewählten Koordinaten schreibt sich das Totalproblem (3), dem wir uns jetzt zuwenden,

$$\frac{H - W_0}{\sqrt{\lambda}} = W_1(\mathfrak{K}_\alpha) + \sqrt{\lambda}\{W_2(\mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\varrho) + \bar{H}_2(\mathfrak{K}, \mathfrak{w})\} + \lambda\{\mathfrak{K}, \mathfrak{w}\}_3 + \cdots = \frac{W - W_0}{\sqrt{\lambda}}$$

oder

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0(\mathfrak{K}_\alpha) + \sqrt{\lambda}\{\bar{\mathfrak{H}}_1(\mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\varrho) + \tilde{\mathfrak{H}}_1(\mathfrak{K}, \mathfrak{w})\} + \cdots + \sqrt{\lambda}^n \mathfrak{H}_n(\mathfrak{K}, \mathfrak{w}) + \cdots = W,$$

$$\dot{\mathfrak{w}}_\beta = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{K}_\beta}, \qquad \dot{\mathfrak{K}}_\beta = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{w}_\beta}.$$

Man sieht, daß wir bei einem eigentlich entarteten Problem angekommen sind, dessen säkulare Störungen schon bekannt sind und das der Störungsrechnung von Ziff. 19 zugänglich ist. Es führt zu neuen Variablen w_β, K_β, von denen die ersteren die endgültigen Winkelvariablen sind, während die K_β ihnen nur bezüglich $\mathfrak{H}$ kanonisch konjugiert sind. Um schließlich zu den in bezug auf H konjugierten Wirkungsvariablen J_β der gestörten Bewegung zu gelangen, bedarf es noch einer Rücktransformation der Art von Kap. 3 Ziff. 3, Gleichung (11), die aber keine Schwierigkeiten bereitet.

Für die Quantentheorie allein wichtig ist der Fall $\mathfrak{K}_\alpha = \mathfrak{K}_\varrho = 0$, weil die Gleichungen (11) für jeden anderen Wert der $\mathfrak{K}_\beta$ eine kontinuierliche Abhängigkeit der $\mathfrak{J}_\beta$ von λ ergeben würden, was den Grundsätzen dieser Theorie (Prinzip der adiabatischen Invarianz, vgl. Ziff. 11) widerspricht. Mit $\mathfrak{K}_\alpha = 0$ folgt $b_\varrho = c = 0$, und Gleichung (9_2) nimmt die einfache Form an

$$\sum_\varrho \sum_\sigma a_{\varrho\sigma} \frac{\partial T_1}{\partial w_\varrho^0} \frac{\partial T_1}{\partial w_\sigma^0} + \bar{H}_2(J_\alpha^*, J_\varrho^*, w_\varrho^0) = W_2,$$

einer Bewegung mit der Hamiltonschen Funktion

$$h = \sum_\varrho \sum_\sigma a_{\varrho\sigma} p_\varrho p_\sigma + \bar{H}_2(J_\alpha^*, J_\varrho^*, q_\varrho)$$

entsprechend. Man sieht, daß den kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial h}{\partial p_\varrho}, \qquad \dot{p}_\varrho = -\frac{\partial h}{\partial q_\varrho}$$

genügt wird durch

$$p_\varrho = \frac{\partial T_1}{\partial w_\varrho^1} = 0, \qquad q_\varrho \left(\text{gleich den Wurzeln von } \frac{\partial H_1^1}{\partial q} = 0\right) = \text{konst.}$$

Das ist die Bewegung mit $\mathfrak{P}_b = 0$. Es scheint danach, als ob die quantentheoretisch wichtige Sonderlösung, bei welcher die gestörte Bewegung denselben Entartungsgrad besitzt wie die ungestörte, für **jedes** zufällig entartete Ausgangssystem und bei beliebigen Störungskräften möglich sei. Es ist aber zu bedenken, daß unsere Schlüsse nur die erste Näherung betrafen und in höheren Näherungen die Existenz dieser Lösung noch in Frage steht (vgl. Ziff. 22).

21. Beispiel zur Störung eines grenzentarteten Systems. Gerade der quantentheoretisch wichtige Fall der vorigen Ziffer, bei dem die entarteten Variablen im Librationszentrum verharren, kann auf dem beschriebenen Weg nicht bis in höhere Näherungen verfolgt werden. Die Methode versagt aus dem einfachen Grund, weil die Funktionen $\mathfrak{H}_b$ an der kritischen Stelle $\mathfrak{J}_a = J_a^0$, $\mathfrak{P}_b = 0$ keine Taylorsche Entwicklung erlauben.

Ein einfaches Beispiel möge die Entstehung dieser Schwierigkeit deutlich machen und zugleich zeigen, daß sie nicht auf den angeführten Fall beschränkt ist.

Wir betrachten die Bewegung eines linearen harmonischen Oszillators, dessen Schwingungsrichtung vertikal sei, unter dem störenden Einfluß der Schwerkraft, die aber klein gedacht wird gegenüber der quasielastischen Bindung an die Ruhelage. Die Hamiltonsche Funktion dieses Systems ist in gewöhnlichen Koordinaten (vgl. Ziff. 5, Schluß)

$$H = \frac{1}{2m} p_s^2 + 2\pi^2 \nu^2 m s^2 + \lambda s = W. \tag{1}$$

Nach Einführung der Winkel- und Wirkungsvariablen des ungestörten Systems mit Hilfe einer Poincarétransformation [vgl. Ziff. 5, Gleichung (8)]

$$s = \sqrt{\frac{J^0}{2\pi^2 \nu m}} \sin 2\pi w^0, \qquad p_s = \sqrt{2\nu m J^0} \cos 2\pi w^0 \tag{2}$$

entsteht die Form

$$H = \nu J^0 + \lambda \sqrt{\frac{J^0}{2\pi^2 \nu m}} \sin 2\pi w^0 = H_0 + \lambda H_1 = W. \tag{3}$$

Setzt man wie in Ziff. 18, Gleichung (12)

$$J^0 = J + \lambda \cdot (\bar{w}^0) + \cdots$$

und entwickelt H neu nach Potenzen von λ, so sieht man, daß für jeden Wert von J das alte Verfahren zur Berechnung der gestörten Bewegung führt, ausgenommen für $J = 0$, d. h. wenn s im Librationszentrum verharrt. Dann werden sämtliche Ableitungen der Störungsenergie H_1 unendlich. (Genauer gesagt, ist nicht mehr eine Entwicklung nach Potenzen von λ, sondern nur von $\lambda/\sqrt{J}$ möglich, woraus sich der Konvergenzbereich erkennen läßt.) Die strenge Lösung des Problems, die in diesem Fall leicht gefunden wird und bekanntlich in einer harmonischen Oszillation um ein verschobenes Zentrum besteht, zeigt, daß die Schwierigkeit nur formaler Natur ist.

Offenbar hängt sie mit der Einführung ungeeigneter Koordinaten zusammen. In Ziff. 8 wurde erklärt, warum bei verschwindenden Librationen die Darstellung

n Winkel- und Wirkungsvariablen ungeeignet ist. In der Tat hätte die Be-echnung in den librierenden Koordinaten s, p_s keine Schwierigkeit aufkommen assen. Vielmehr hätte sich die Lage des verschobenen Librationszentrums sowie lie Beharrung in ihm als möglicher Bewegungszustand aus (1) und den kanonischen Gleichungen

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

rkennen lassen.

22. Störung bei Grenzentartung im allgemeinen Fall. Die in Ziff. 21 be-prochene Schwierigkeit tritt jedesmal auf, wenn die Libration irgendeiner Koordinate des ungestörten Systems mit verschwindender Amplitude erfolgt; vgl. Ziff. 8. (Übrigens kann sie, rein mathematisch gesehen, auch in anderen Fällen vorkommen, nämlich immer, wenn für die betrachteten Werte J_k eine der Funktionen H_n keine Taylorentwicklung zuläßt.) In der unmittelbaren Umgebung des Librationszentrums ist ja die Bindung immer quasielastisch, weil die Entwicklung des Potentials dort mit dem Quadrat der Ausschwingung beginnt. Jedes hinzukommende Störungspotential wird aber im allgemeinen (wie das Schwerepotential im Beispiel Ziff. 21) auch mit ungeraden Potenzen der Ausschwingung ansteigen. Deshalb tritt die für den betreffenden Freiheitsgrad maßgebende Wirkungsvariable in den Amplituden der Störungsfunktion stets unter Quadratwurzeln auf. Die an unserem Beispiel gemachte Erfahrung läßt sich fast wörtlich auf den allgemeinen Fall übertragen. Weil auch hier die Darstellung in Winkel- und Wirkungsvariablen ungeeignet ist, geht man für grenzentartete Freiheitsgrade von ihr ab und durch eine umgekehrte Poincarétransformation $\left(\text{Erzeugende } S = \frac{\eta^{0\,2}}{2}\operatorname{tg} 2\pi w^0\right)$

$$\xi^0_\varrho = \sqrt{\frac{J^0_\varrho}{\pi}}\sin 2\pi w^0_\varrho, \qquad \eta^0_\varrho = \sqrt{\frac{J^0_\varrho}{\pi}}\cos 2\pi w^0_\varrho \tag{1}$$

über zu den Koordinaten ξ^0_ϱ, η^0_ϱ, die bei kleinen Schwingungen librierende Werte annehmen (in dem Beispiel waren es s und der zugehörige Impuls p_s). In ihnen geschrieben, entwickeln sich auch im Librationszentrum alle Störungsfunktionen nach ganzen Potenzen, so daß die Hamiltonsche Funktion die Form annimmt

$$H = H_0 + \lambda H_1 + \cdots + \lambda^n H_n + \cdots = W,$$

worin

$$H_0 = H_{00}(J^0_\alpha) \quad + \sum_\varrho\sum_\sigma (c_{0\varrho\sigma}\xi^0_\varrho\xi^0_\sigma + d_{0\varrho\sigma}\xi^0_\varrho\eta^0_\sigma + e_{0\varrho\sigma}\eta^0_\varrho\eta^0_\sigma) + \cdots,$$

$$H_n = H_{n0}(J^0_\alpha, w^0_\alpha) + \sum_\varrho (a_{n\varrho}\xi^0_\varrho + b_{n\varrho}\eta^0_\varrho)$$
$$+ \sum_\varrho\sum_\sigma (c_{n\varrho\sigma}\xi^0_\varrho\xi^0_\sigma + d_{n\varrho\sigma}\xi^0_\varrho\eta^0_\sigma + e_{n\varrho\sigma}\eta^0_\varrho\eta^0_\sigma) + \cdots.$$

Dabei sind $a_{n\varrho}$, $b_{n\varrho}$, $c_{n\varrho\sigma}$, ... periodische Funktionen der w^0_α, in deren Amplituden auch die J^0_α eingehen. Ersteres mit Ausnahme des Falles $n = 0$, denn die Größen $c_{0\varrho\sigma}$, $d_{0\varrho\sigma}$, ... können nur von den J^0_α abhängen; sonst dürften wir nicht das ungestörte System als allgemein integriert betrachten. H_{n0} bedeutet diejenige Funktion, die aus H_n mit $\xi^0_\varrho = \eta^0_\varrho = 0$ entsteht.

Von besonderem Interesse in der Astronomie sowohl als in der Atommechanik sind diejenigen Bewegungen des gestörten Systems, bei denen die Grenzentartung bestehen bleibt oder bei denen nur kleine Schwingungen um das Librationszentrum

erfolgen. Es ist aber zu bedenken, daß letzteres durch den Hinzutritt der Störungspotentiale eine Verschiebung erfährt. Man wird also neue Koordinaten

$$\xi_\varrho = \xi_\varrho^0 - A_\varrho, \qquad \eta_\varrho = \eta_\varrho^0 - B_\varrho$$

einführen, deren Anfangspunkt im neuen Librationszentrum liegt. Das ist daran zu erkennen, daß in den neuen Koordinaten geschrieben die Funktion H in allen Gliedern frei ist von ersten Potenzen der Größen $\xi_\varrho, \eta_\varrho$. Die schrittweise Bestimmung der Größen A_ϱ und B_ϱ nach diesem Gesichtspunkt kann vereinigt werden mit der sukzessiven Einführung der neuen Winkelvariablen für die nicht entarteten Freiheitsgrade. Die Erzeugende der Transformation ist dann allgemein zu schreiben

$$S = \sum_\alpha J_\alpha w_\alpha^0 + T(J_\alpha, w_\alpha^0) + \sum_\varrho (\xi_\varrho^0 \eta_\varrho + B_\varrho \xi_\varrho^0 - A_\varrho \eta_\varrho),$$

wobei die Größen T, A_ϱ, B_ϱ Potenzreihen in λ und periodische Funktionen der w_α^0 sind:

$$\begin{aligned} T &= \lambda T_1 + \lambda^2 T_2 + \cdots, \\ A_\varrho &= \lambda A_{1\varrho} + \lambda^2 A_{2\varrho} + \cdots, \\ B_\varrho &= \lambda B_{1\varrho} + \lambda^2 B_{2\varrho} + \cdots. \end{aligned}$$

Mit den daraus folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} J_\alpha^0 = J_\alpha &+ \lambda\left(\frac{\partial T_1}{\partial w_\alpha^0} + \sum_\varrho \xi_\varrho \frac{\partial B_{1\varrho}}{\partial w_\alpha^0} - \sum_\varrho \eta_\varrho \frac{\partial A_{1\varrho}}{\partial w_\alpha^0}\right) \\ &+ \lambda^2\left(\frac{\partial T_2}{\partial w_\alpha^0} + \sum_\varrho \xi_\varrho \frac{\partial B_{2\varrho}}{\partial w_\alpha^0} - \sum_\varrho \eta_\varrho \frac{\partial A_{2\varrho}}{\partial w_\alpha^0} + \sum_\varrho A_{1\varrho} \frac{\partial B_{1\varrho}}{\partial w_\alpha^0}\right) + \cdots, \\ \xi_\varrho^0 = \xi_\varrho &+ \lambda A_{1\varrho} + \lambda^2 A_{2\varrho} + \cdots, \\ \eta_\varrho^0 = \eta_\varrho &+ \lambda B_{1\varrho} + \lambda^2 B_{2\varrho} + \cdots \end{aligned}$$

entsteht eine neue Entwicklung von H, deren Anfang hier wenigstens für den Fall eines grenzentarteten Freiheitsgrades wiedergegeben sei:

$$\begin{aligned} H = H_{00}(J_\alpha) &+ (a_0 \xi^2 + d_0 \xi\eta + e_0 \eta^2) + \text{höhere Potenzen in } \xi, \eta \\ &+ \lambda\Big\{\sum_\alpha \frac{\partial H_{00}}{\partial J_\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial w_\alpha^0} + \xi\sum_\alpha \frac{\partial H_{00}}{\partial J_\alpha}\frac{\partial B_1}{\partial w_\alpha^0} - \eta\sum_\alpha \frac{\partial H_{00}}{\partial J_\alpha}\frac{\partial A_1}{\partial w_\alpha^0} \\ &+ \xi(2a_0 A_1 + d_0 B_1) + \eta(d_0 A_1 + 2e_0 B_1) + H_{10}(J_\alpha, w_\alpha^0) \\ &+ a_1 \xi + b_1 \eta + \text{quadratische und höhere Potenzen in } \xi, \eta\Big\} \\ &+ \lambda^2\{\} + \cdots = W. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Bestimmungsgleichung für die erste Näherung

$$H_{00}(J_\alpha) + R_0(\xi, \eta, J_\alpha) = W_0$$

mit

$$R_0 = a_0 \xi^2 + d_0 \xi\eta + e_0 \eta^2 + \cdots \tag{2}$$

In zweiter Näherung kommt

$$\sum_\alpha \frac{\partial H_{00}}{\partial J_\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial w_\alpha^0} + H_{10} + R_1(\xi, \eta, J_\alpha, w_\alpha^0) = W_1, \tag{3}$$

mit den Nebenbedingungen, daß die Faktoren von ξ und η verschwinden sollen

$$\sum_\alpha \frac{\partial H_{00}}{\partial J_\alpha}\frac{\partial B_1}{\partial w_\alpha^0} + 2c_0 A_1 + d_0 B_1 + a_1 = 0, \tag{3'}$$

$$-\sum_\alpha \frac{\partial H_{00}}{\partial J_\alpha}\frac{\partial A_1}{\partial w_\alpha^0} + d_0 A_1 + 2e_0 B_1 + b_1 = 0, \tag{3''}$$

so daß für R_1 übrigbleibt

$$R_1 = \sum_\alpha \frac{\partial T_1}{\partial w_\alpha^0}\left(\frac{\partial c_0}{\partial J_\alpha}\xi^2 + \frac{\partial d_0}{\partial J_\alpha}\xi\eta + \frac{\partial e_0}{\partial J_\alpha}\eta^2\right) + \cdots$$
$$+ c_1\xi^2 + d_1\xi\eta + e_1\eta^2 + \cdots = C_1\xi^2 + D_1\xi\eta + E_1\eta^2 + \cdots$$

Die Gleichungen (3') (3'') bestimmen A_1, B_1 als Fourierreihen der w_α^0, sie unterscheiden sich durch nichts Wesentliches von den sonst in der Störungstheorie üblichen Bestimmungsgleichungen. Anders mit Gleichung (3) für T_1. Dürfte man annehmen, daß in R_1 (das nur Potenzen der ξ, η von der zweiten ab enthält) die w_α^0 nicht oder nur in denselben Kombinationen auftreten wie im Rest der Gleichung (3), mit anderen Worten, daß die Gleichung separierbar wäre, so würde nach Aufspaltung der Konstanten W_1 in zwei andere $U_1 + V_1$ sich die Bestimmungsgleichung für T_1 ergeben

$$\sum_\alpha \frac{\partial H_{00}}{\partial J_\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial w_\alpha^0} + H_{10} = U_1(J_\alpha).$$

Daraus folgte T_1 in der üblichen Weise und es bliebe

$$R_1(U_1, \xi, \eta) = W_1 - U_1$$

als Funktion der J_α, ξ und η allein übrig.

Offenbar ist diese Voraussetzung, welche den bedingt periodischen Charakter des gestörten Systems zum Ausdruck bringt, im allgemeinen nicht erfüllt, und es fehlt an dieser Stelle eine Methode, welche — auf Kosten der Konvergenz — diese Eigenschaft formal erzwingt. Diese Lücke ist in manchen Arbeiten über den Gegenstand nicht beachtet worden. Wir beschränken uns hier (ähnlich wie bei der Berechnung säkularer Störungen) einfach auf die Fälle, in denen Gleichung (3) separierbar und das Verfahren fortsetzbar ist. Bei jedem Schritt treten drei neue Funktionen A_s, B_s, T_s auf, für welche drei Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen. (Zur Bestimmung von T_s ist man aber jedesmal auf die Annahme abermaliger Separierbarkeit angewiesen.) So entsteht, wenn man noch die Konstante H_{00} durch $U_0(J_\alpha)$ und die Koeffizienten c_0, d_0, e_0 in (2) durch die Zeichen C_0, D_0, E_0 ersetzt, eine allmähliche Umwandlung der Hamiltonschen Funktion in die Form

$$\left.\begin{aligned} H = U_0(J_\alpha) &+ R_0(\xi,\eta,J_\alpha)\\ + \lambda\{U_1(J_\alpha) &+ R_1(\xi,\eta,J_\alpha)\} + \cdots\\ + \lambda^s\{U_s(J_\alpha) &+ R_s(\xi,\eta,J_\alpha)\} + \cdots = W \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

oder mit

$$U = \sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s U_s, \qquad C = \sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s C_s, \qquad D = \sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s D_s \quad \text{usf.},$$

$$H = W_0(J_\alpha) + U(J_\alpha) + C(J_\alpha)\xi^2 + D(J_\alpha)\xi\eta + E(J_\alpha) + \cdots = W.$$

Für den von ξ, η abhängigen Teil folgt mit $W - U = V =$ konst.

$$R = C\xi^2 + D\xi\eta + E\eta^2 + \cdots = V. \tag{5}$$

Für kleine ξ, η (Vernachlässigung der höheren Potenzen als die zweite) ergeben sich **kleine Schwingungen um das Librationszentrum**, wenn der ausgeschriebene quadratische Teil definit ist, d. h. wenn nach geeigneter linearer Transformation der ξ, η in neue Ξ, H und von R in

$$\mathsf{A}\Xi^2 + \mathsf{B}\mathsf{H}^2 + \cdots = V \tag{6}$$

A und B gleiches Vorzeichen haben.

Die Rechnung wurde nur angedeutet für den Fall eines grenzentarteten Freiheitsgrades. Zu Beginn dieser Ziffer sind aber die Ansätze für s-fache Grenzentartung angegeben. Nach Durchführung einer entsprechenden Rechnung ergibt sich ein Ausdruck wie (4), wenn die grenzentarteten Freiheitsgrade von den übrigen separiert werden können. Die daraus folgende Gleichung (5) besteht aus einer Summe über alle Freiheitsgrade ϱ. Durch geeignete lineare Transformation der $\xi_\varrho, \eta_\varrho$ läßt sie sich umbilden in einen Ausdruck wie (6)

$$R = \sum_\varrho (\mathsf{A}_\varrho \Xi_\varrho^2 + \mathsf{B}_\varrho \mathsf{H}_\varrho^2 + \cdots) = V,$$

der unter Vernachlässigung der Glieder höheren Grades Separation erlaubt. Für Bewegungen in nächster Nähe des (mehrfachen) Librationszentrums entstehen also keine neuen Schwierigkeiten. Von dem Schwingungscharakter der Lösung gilt eine sinngemäße Übertragung des oben Gesagten.

23. Eine Sonderlösung des gestörten grenzentarteten Systems. Im Anschluß an Ziff. 22, Gleichung (3) wurde eingewendet, daß im allgemeinen Fall keine Separation der w_α^0 von den $\xi_\varrho, \eta_\varrho$ möglich sein wird und die Methode daher nicht zur Berechnung kleiner Schwingungen um das Librationszentrum führen wird. In jedem Fall ist es aber möglich zu zeigen, daß $\xi_\varrho = 0$, $\eta_\varrho = 0$, d. h. Beharrung im Librationszentrum, eine mögliche Bewegung ist. Denn die Gleichungen (3′) und (3″) von Ziff. 22 können durch geeignete Wahl von A_1, B_1 erfüllt werden, und H gewinnt jedenfalls die Gestalt

$$H = H^*(J_\alpha, w_\alpha^0) + R(J_\alpha, w_\alpha^0, \xi_\varrho, \eta_\varrho) = W,$$

worin R eine Potenzreihe in ξ_ϱ, η_ϱ ist, beginnend mit Gliedern zweiten Grades. Den kanonischen Gleichungen

$$\dot{\xi}_\varrho = \frac{\partial H}{\partial \eta_\varrho}, \qquad \dot{\eta}_\varrho = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\varrho}$$

wird also sicher genügt durch

$$\xi_\varrho = \eta_\varrho = 0, \qquad \dot{\xi}_\varrho = \dot{\eta}_\varrho = 0.$$

Doch bedeutet dies Verharren im Librationszentrum keinen Stillstand der früher benutzten $\xi_\varrho^0, \eta_\varrho^0$. Vielmehr wird

$$\xi_\varrho^0 = A_\varrho(w_\alpha^0), \qquad \eta_\varrho^0 = B_\varrho(w_\alpha^0),$$

und diese Bewegung der ξ_ϱ^0, η_ϱ^0 trägt zur Bestimmung der Phasenintegrale J_α bei. Ihr Beitrag ist aber, wie man leicht nachrechnet, von der Ordnung λ^2, und daher kommt es, daß die Gleichung (3) von Ziff. 22 für den Fall $\xi = \eta = R_1 = 0$ die Bestimmung von T_1 ohne Rücksicht auf diese Beweglichkeit des Librationszentrums der entarteten Freiheitsgrade gestattet.

Der in dieser Ziffer betrachtete Spezialfall der Bewegung ist der quantentheoretisch einzig wichtige. Er besitzt denselben Entartungsgrad wie die ungestörte Bewegung und in erster Näherung auch dieselbe Beeinflussung der nicht entarteten Freiheitsgrade durch die Störungskräfte, wie wenn die entarteten

Variablen nicht angegriffen würden. In zweiter Näherung macht sich aber die Wechselwirkung aller Freiheitsgrade geltend. Bezüglich der Konvergenz dieser Lösung sind übrigens ähnliche Bemerkungen zu machen, wie sie am Schluß von Ziff. 18 über die Störung nicht entarteter Systeme Platz fanden, da die Reihen A_ϱ, B_ϱ sich in ganz derselben Weise bestimmen wie dort die Reihe S.

Auf die hier beschriebene Weise lassen sich die Schlüsse der Ziff. 20 auch dann zu Ende führen, wenn in der gestörten Bewegung die zufällige Entartung weiterbesteht. Über diesen Gegenstand lese man § 47 des Buches von BORN[1]) nach. Er enthält interessante quantentheoretische Folgerungen über das Bestehen von Phasenbeziehungen bei Bohrschen Atomen.

24. Nebeneinanderbestehen verschiedener Entartungen. Das gleichzeitige Bestehen verschiedener Entartungen bringt keine neuen Schwierigkeiten mit sich. Sie können in mancherlei Weise kombiniert sein. Einmal können die grenzentarteten Freiheitsgrade selbst gleichzeitig eigentlich oder zufällig entartet sein. Der erste Fall bringt nur eine Vereinfachung in den Überlegungen der vorigen Ziffer mit sich, weil H_0 auf den Anteil H_{00} beschränkt bleibt[2]). Der zweite bringt keinerlei Änderungen hervor, da die charakteristische Eigenschaft der zufälligen Entartung $\partial H_0/\partial J_\varrho = 0$ in der vorigen Ziffer unwesentlich bleibt.

Ferner können nebeneinander einige Freiheitsgrade eigentlich, einige zufällig, andere grenzentartet sein. Man hat dann durch strenge oder genäherte Berechnung der säkularen Störungen zuerst eine voll entfaltete Ausgangsbewegung zu schaffen. Da wir ohnehin annehmen mußten, daß die grenzentarteten Freiheitsgrade von den anderen separiert werden können, so liegt in der Kombination der Methoden keine innere Schwierigkeit.

25. Die Delaunaysche Methode[3]). Nachträglich sei noch kurz ein Verfahren erwähnt, das ein Vorläufer des Bohlinschen war und auch vorher[4]) in die Quantenmechanik übertragen wurde. Es ist der Kunstgriff von DELAUNAY zur Wegschaffung störender Kommensurabilitäten, d. h. solcher Glieder (9) in den Reihen (8) der Ziff. 18, die durch besonders kleine Nenner $2\pi i \sum \tau_k \nu_k^0$ ausgezeichnet sind.

Sei

$$H = H_0(J_k^0) + \lambda H_1(J_k^0, w_k^0) \tag{1}$$

und $w_\varrho^0 = \sum \tau_k w_k^0$ eine säkular werdende Winkelvariable, d. h. eine, deren Frequenz ν_ϱ^0 bei der ungestörten Bewegung einen sehr kleinen Wert hat, die also nahezu zufällig entartet. Es ist dann möglich, durch eine lineare ganzzahlige Transformation mit Determinante ± 1 die w_k^0 überzuführen in $f-1$ Variable w_σ^0 und in w_ϱ^0. Greift man die w_ϱ^0 allein enthaltenden Glieder der Störungsfunktion heraus — das ist in unserer Schreibweise der Anteil $\bar{H}_1$ —, so ist die intermediäre Bewegung mit der Hamiltonschen Funktion

$$H_0^0 = H_0 + \lambda \bar{H}_1(\bar{w}_\varrho^0) = W_0^0 \tag{2}$$

bestimmt die eines bedingt periodischen Systems, da außer den Konstanten J_σ^0 nur das eine Variablenpaar w_ϱ^0, J_ϱ^0 in H_0^0 enthalten ist (vgl. Ziff. 5). Die entsprechende Hamiltonsche Differentialgleichung ist also integrierbar und führt

---

[1]) M. BORN, Atommechanik (vgl. Fußnote in Ziff. 1).

[2]) Vgl. die Durchrechnung von L. NORDHEIM, ZS. f. Phys. Bd. 17, S. 316. 1923, die sich auf diesen Fall bezieht.

[3]) Vgl. H. POINCARÉ, Leçons Bd. I, Schluß.

[4]) Durch P. S. EPSTEIN, ZS. f. Phys. Bd. 8, S. 211 u. 305. 1922; Bd. 9, S. 92. 1922.

durch Berücksichtigung der Rotation oder Libration von w_e^0 in bekannter Weise zu neuen Winkel- und Wirkungsvariablen $\bar{w}_e, \bar{J}_e$. H erhält dadurch die Gestalt

$$H = H_0(J_a^0, \bar{J}_e) + \lambda \bar{\bar{H}}_1,$$

in welcher die Störungsfunktion die lästigen Glieder nicht mehr enthält.

Man kann das Verfahren auch benutzen, um besonders hervorragende Fourierglieder der Störungsfunktion vorweg zu berücksichtigen, ja man kann durch wiederholte Anwendung Glied für Glied derselben in immer neue bedingt periodische intermediäre Bewegungen einbeziehen. Da aber durch jeden einzelnen Schritt gleichzeitig unendlich viel neue Fourierglieder der Störungsfunktion hinzugefügt werden [allerdings sind sie von höherer Ordnung in λ][1]), so wird man auf diese Weise höchstens eine kleine Anzahl besonders hervorragender Störungsglieder integrieren.

Man sieht, daß die Delaunaysche Methode eigentlich nur ein Sonderfall des in Ziff. 20 beschriebenen Bohlinschen Verfahrens ist. Ihre Eigentümlichkeit ist, daß durch das Herausgreifen einer entarteten Variablen die Differentialgleichung für die säkularen Störungen in Strenge integrierbar wird.

IV. Störung durch zeitlich veränderliche Felder.

26. Nicht abgeschlossene Systeme. Abschnitt III handelte ausschließlich von abgeschlossenen Systemen, deren Hamiltonsche Funktion mit Einschluß der Störungsglieder zeitunabhängig war und auf welche daher die Form Kap. 3, Ziff. 12, Gleichung (6) der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung anwendbar war. Eine Reihe von Problemen — es sei nur an die Dispersionstheorie und die Wirkung von Stößen auf Atome sowie auf astronomischer Seite an das „eingeschränkte" Dreikörperproblem[2]) erinnert — machen es wünschenswert, von dieser Beschränkung abzugehen. Wir betrachten also die Wirkung kleiner zeitabhängiger Störungen auf ein System, das von ihnen abgesehen eine zeitunabhängige Hamiltonsche Funktion besitzt, und das im ungestörten Fall eine bedingt periodische Bewegung durchläuft. Ferner beschränken wir uns auf nicht entartete Ausgangssysteme und unterscheiden die beiden Fälle mehrfach periodischer bzw. unperiodischer Störung.

Beide Fälle kann man sich am einfachsten verwirklicht denken, wenn man annimmt, das betrachtete System S mit der Hamiltonschen Funktion $H_0(J^0)$ und mit den Winkel- und Wirkungsvariablen w_k^0, J_k^0 im ungestörten Fall sei gekoppelt mit einem zweiten System $\mathfrak{S}$, das ohne Rücksicht auf die Wechselwirkung die Hamiltonsche Funktion $\mathfrak{H}_0(q, p)$ und, wenn es selbst bedingt periodischen Charakter hat, die Winkel- und Wirkungsvariablen $\mathfrak{w}_0, \mathfrak{J}_0$ besitzt. Die Kopplung werde ausgedrückt durch Wechselwirkungsterme der gemeinsamen Hamiltonschen Funktion $\mathfrak{H}$, die nach Potenzen eines kleinen Parameters λ aufgereiht werden können und jedenfalls als periodische Funktionen der w_k^0 zu schreiben sind:

$$\mathfrak{H} = H_0(J^0) + \mathfrak{H}_0(q, p) + \lambda H_1(J^0, w^0, q, p) + \cdots$$
$$+ \lambda^n H_n(J^0, w^0, q, p) + \cdots$$

Die für das System S maßgebende Hamiltonsche Funktion

$$H = H_0(J^0) + \lambda H_1(J^0, w^0, q, p) + \cdots + \lambda^n H_n(J^0, w^0, q, p) + \cdots$$

---

[1]) Vgl. J. Woltjer, ZS. f. Phys. Bd. 31, S. 107. 1925.
[2]) Vgl. Kap. 7, Ziff. 26, 31 f. ds. Bd. ds. Handb.

ist dann vermöge der Zeitabhängigkeit der $\mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_k$ eine explizite Funktion der Zeit, je nach der Art von $\mathfrak{H}_0$ von unperiodischer oder mehrfach periodischer Form. Dabei sind $\mathfrak{q}_k, \mathfrak{p}_k$ ein für allemal feste Funktionen von t, wenn das System $\mathfrak{S}$ durch die Kopplung nicht merklich beeinflußt wird, z. B. wenn es soviel größer ist als S, daß dessen Rückwirkung vernachlässigt werden kann.

27. Mehrfach periodische Zeitabhängigkeit der Störungsfunktion. Das Störungsproblem sei gegeben durch die Hamiltonsche Funktion

$$H = H_0(J^0) + \lambda H_1(J^0, w^0, \mathfrak{w}) + \cdots + \lambda^n H_n(J^0, w^0, \mathfrak{w}) + \cdots,$$

worin

$$\mathfrak{w}_k = \mathfrak{n}_k t + \mathfrak{b}_k$$

(die konstanten $\mathfrak{J}_k$ führen wir nicht explizit an), und

$$H_n = \sum \cdots \sum A^{(n)}_{\tau_1 \ldots \tau_f t_1 \ldots t_g} e^{2\pi i(\tau_1 w_1^0 + \ldots + \tau_f w_f^0 + t_1 \mathfrak{w}_1 + \ldots t_g \mathfrak{w}_g)}.$$

Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{w}_k^0 = \frac{\partial H}{\partial J_k^0}, \quad \dot{J}_k^0 = -\frac{\partial H}{\partial w_k^0}.$$

Nimmt man an, daß das gestörte Totalsystem bedingt periodisch ist, und daß die neuen Winkelvariablen deshalb an Gleichungen der Form [vgl. Ziff. 14 (5)]

$$w_k = w_k^0 + \lambda(\bar{w}_1^0, \ldots \bar{w}_f^0, \bar{\mathfrak{w}}_1, \ldots \mathfrak{w}_g)$$

gebunden seien, so ergibt sich für die Erzeugende S der kanonischen Transformation $(w^0, J^0) \to (w, J)$

$$S = \sum J_k w_k^0 + \lambda S_1(\bar{w}^0, \bar{\mathfrak{w}}) + \cdots + \lambda^n S_n(\bar{w}^0, \bar{\mathfrak{w}}) + \cdots,$$

und es entsteht

$$J_k^0 = J_k + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} + \cdots$$

Entwickelt man die neue Hamiltonsche Funktion $H + \partial S/\partial t$ an der Stelle J_k nach $J_k^0 - J_k$, so ergibt sich

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0(J) + \lambda \left\{ \sum_1^f \nu_k^0 \frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} + \sum_1^g \mathfrak{n}_k \frac{\partial S_1}{\partial \mathfrak{w}_k} + H_1(J, w^0, \mathfrak{w}) \right\}$$
$$+ \cdots + \lambda^n \left\{ \sum_1^f \nu_k^0 \frac{\partial S_n}{\partial w_k^0} + \sum_1^g \mathfrak{n}_k \frac{\partial S_n}{\partial \mathfrak{w}_k} + \Phi_n(J, w^0, \mathfrak{w}) \right\} + \cdots$$
$$= W_0 + \lambda W_1(t) + \cdots + \lambda^n W_n(t) + \cdots$$

Dies ist eine Differentialgleichung von der Art Kap. 3, Ziff. 12, Gleichung (8); dabei ist willkürlich $H + \partial S/\partial t$ nicht $= 0$ gesetzt worden, sondern gleich einer Konstanten W_0 plus einer Potenzreihe in λ von einstweilen beliebigen Funktionen von t (bzw. von den $\mathfrak{w}_k$). W_0 ergibt sich aus der Forderung, daß S_0 von t unabhängig sei, und daß die w_k, J_k für $\lambda = 0$ mit den w_k^0, J_k^0 übereinstimmen sollen. Die Glieder der Potenzreihe lassen sich durch geeignete Wahl der $\partial S_n/\partial \mathfrak{w}_k$ ebenfalls zu Konstanten machen. Dazu braucht man nur z. B. die Bestimmung zu treffen, daß

$$\sum_1^f \nu_k^0 \frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} + \sum_1^g \mathfrak{n}_k \frac{\partial S_1}{\partial \mathfrak{w}_k} + \tilde{H}_1 = 0;$$

dann bleibt

$$\bar{H}_1 = W_1.$$

(Der Strich deutet wie immer Mittelung über den Einheitswürfel der w_k^0 an.) $\lambda \overline{W}_1$ ist also der zeitliche Mittelwert der Wechselwirkungsenergie erster Ordnung über die ungestörte Bahn.

Auf die Beschreibung der weiteren Rechnung wird verzichtet. Sie ist einfach eine sinngemäße Übertragung des Verfahrens von Ziff. 18, der stationären Störung eines nicht entarteten Systems.

Derartige Rechnungen sind wiederholt im Zusammenhang mit der Dispersionstheorie ausgeführt worden[1]. Das System S wird dann aufgefaßt als eine Vereinigung punktförmiger elektrischer Ladungen, in irgendeiner Weise, z. B. in der Art der Bohrschen Atome, dynamisch verbunden, unter der Einwirkung eines rasch wechselnden, aber in erster Näherung homogenen äußeren Feldes. Das Dipolmoment des betroffenen Systems $\mathfrak{p}^0$ stellt sich im ungestörten Fall dar als mehrfache Fourierreihe seiner alten Winkelvariabeln

$$\mathfrak{p}^0 = \sum\cdots\sum a_{\tau_1\ldots\tau_f}\, e^{2\pi i(\tau_1 w_1^0+\cdots+\tau_f w_f^0)},$$

die Lichtwelle als mehrfach periodische Funktion der Zeit

$$\mathfrak{E} = \sum\cdots\sum \mathfrak{e}_{l_1\ldots l_g}\, e^{2\pi i(l_1 w_1+\cdots+l_g w_g)}.$$

H_1 wird das skalare Produkt $\mathfrak{p}^0\mathfrak{E}$. Wenn das oben beschriebene Rechenschema solchergestalt auch angewandt wird auf Störungen, welche sich nicht als Kopplungen mit einem System $\mathfrak{E}$ zu einem bedingt periodischen Gesamtmechanismus auffassen lassen, so liegt darin ein der Rechnung aufgeprägter Zwang, der noch über die Willkür hinausgeht, die wir im Fall zeitunabhängiger Hamiltonscher Funktion als eine Besonderheit der Störungsrechnung erkannt haben (vgl. Ziff. 21 und 22). Das darf besonders für Anwendungen in der Bohrschen Quantentheorie nicht übersehen werden, wo die Existenz und Bestimmtheit von Wirkungsvariabeln eine entscheidende Rolle spielt.

28. Unperiodische Zeitabhängigkeit der Störungsfunktion. Eine Ausdehnung der Rechnung auf den Fall unperiodischer Störung haben Born und Jordan angegeben[2]. Das allgemeine Verfahren ihrer Störungsrechnung soll hier im Anschluß an die zweite der zitierten Arbeiten wiedergegeben, ohne daß wir auf die weitreichenden Anwendungen der Verfasser auf Strahlungs- und Quantentheorie eingehen.

Demgemäß nehmen wir an, die Hamiltonsche Funktion eines im ungestörten Fall bedingt periodischen, nicht entarteten Systems enthalte Störungsglieder, die im Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ in beliebiger Weise von t abhängen, vorher und nachher verschwinden. Dieselben sind, wenn die Winkel- und Wirkungsvariabeln w_k^0, J_k^0 des ungestörten Systems eingeführt werden, so daß

$$H = H_0(J^0) + \lambda H_1(J^0, w^0, t) + \cdots + \lambda^n H_n(J^0, w^0, t) + \cdots \tag{1}$$

ist, uneigentliche Fourierreihen der w_k^0:

$$H_n = \sum_{-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(n)}_{\tau_1\ldots\tau_f}(t)\, e^{2\pi i(\tau_1 w_1^0+\cdots+\tau_f w_f^0)}, \tag{2}$$

z. B. von der Art, wie in der vorigen Ziffer das skalare Produkt $H_1 = \mathfrak{p}_0\mathfrak{E}(t)$ war.

[1]) Vgl. z. B. die in Ziff. 25, Fußnote 2, und in Ziff. 28 zitierten Arbeiten, die weitere Hinweise enthalten.

[2]) M. Born u. P. Jordan, ZS. f. Phys. Bd. 33, S. 479. 1925; P. Jordan, ebenda Bd. 33, S. 506. 1925.

Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung ist von der Art Kap. 3, Ziff. 12, Gleichung (8), und führt auf eine Wirkungsfunktion

$$S(\alpha, w^0, t) = S_0 + \lambda S_1 + \cdots + \lambda^n S_n + \cdots$$

mit f Integrationskonstanten α_k, von denen wir annehmen können, daß sie für $\lambda = 0$ in die Größen J_k^0 übergehen

$$J_k^0 = \alpha_k + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial w_k^0} + \cdots \tag{3}$$

Daraus ergibt sich

$$S_0 = \sum_k \alpha_k w_k^0$$

und für die zu den α_k kanonischen konjugierten Variabeln β_k die Herleitung

$$\beta_k = w_k^0 + \lambda \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_k} + \cdots$$

Es kann natürlich nicht angenommen werden, daß das gestörte System noch mehrfach periodisch sei; die neuen Variabeln wurden daher nicht mit w_k, J_k bezeichnet.

Führt man in der gewohnten Weise mit Hilfe von (3) die Konstanten α_k in (1) ein und entwickelt neu nach λ, so ergibt sich

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left\{ \sum_k \nu_k^0 \frac{\partial S_n}{\partial w_k^0} + \frac{\partial S_n}{\partial t} + \Phi_n(\alpha\, w^0\, t) \right\},$$

wobei die Funktionen Φ_n uneigentliche Fourierreihen des Typus (2) sind

$$\Phi_n = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{+\infty} C^{(n)}_{\tau_1 \ldots \tau_f}(t)\, e^{2\pi i (\tau_1 w_1^0 + \cdots + \tau_f w_f^0)}.$$

Es zeigt sich wieder, daß durch die Wahl von S_0 von der in Kap. 3, Ziff. 12 erwähnten Freiheit hinsichtlich der Zeitabhängigkeit von $H + \partial S/\partial t$ Gebrauch gemacht worden ist, insofern

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = W_0 + \lambda W_1(t) + \cdots$$

mit

$$W_0 = H_0(\alpha) + 0$$

wird. Die anderen Funktionen $W_n(t)$ sollen aber durch passende Wahl der S_n zum Verschwinden gebracht werden. Das erfordert

$$\sum_k \nu_k^0 \frac{\partial S_n}{\partial w_k^0} + \frac{\partial S}{\partial t} = -\Phi_n = \sum \cdots \sum C^{(n)}_{\tau_1 \ldots \tau_f}(t)\, e^{2\pi i (\tau_1 w_1^0 + \cdots + \tau_f w_f^0)},$$

eine Gleichung, der man, wie JORDAN gezeigt hat, durch den Ansatz

$$S_n = \sum \cdots \sum e^{2\pi i (\tau_1 w_1^0 + \cdots + \tau_f w_f^0)} \int_{t_0}^{t} e^{-2\pi i (\tau_1 \nu_1^0 + \cdots + \tau_f \nu_f^0)(t - t')}\, C^{(n)}_{\tau_1 \ldots \tau_f}(t')\, dt'.$$

genügt.

Kapitel 5.

Geometrie der Bewegungen.

Von

H. Alt, Dresden.

Mit 74 Abbildungen.

I. Einleitung.

1. Die Grundbegriffe der Bewegungslehre. Die Bewegungslehre befaßt sich mit den Bewegungen der Körper an sich, und zwar in dem Sinne, daß die Massen der bewegten Körper und die Kräfte, welche die Bewegungen verursachen, außer Betracht bleiben. Unter einem Körper verstehen wir daher in der Bewegungslehre ein rein geometrisches Gebilde, das aus einer Menge geometrischer Punkte zusammengesetzt gedacht werden kann. Sind die Entfernungen der einzelnen Punkte eines Körpers während seiner Bewegung unveränderlich, wie es hier stets angenommen werden soll, so heißt der Körper starr, in den anderen Fällen veränderlich.

Verändert der Körper innerhalb einer gewissen Zeit seine Lage gegenüber einem anderen Körper, den wir den Bezugskörper nennen wollen, so sagen wir, der Körper bewegt sich gegen den Bezugskörper. In der Regel wird der Bezugskörper der Bewegung als starr angenommen. Die Bewegung eines Körpers ist also ein räumlicher Vorgang, der eine gewisse Zeit erfordert. Die Begriffe Raum und Zeit werden hier als durch die Anschauung hinreichend definiert vorausgesetzt. Die sämtlichen Größen, die in der Bewegungslehre auftreten, lassen sich durch Beziehungen zwischen Längen- und Zeitgrößen ausdrücken und können daher stets durch Maße oder Einheiten gemessen werden, die sich aus den Grundeinheiten der Länge (l_1) und der Zeit (t_1) zusammensetzen.

Da die Lage eines Körpers gegen einen Bezugskörper durch die Lage der einzelnen Punkte, aus denen er zusammengesetzt gedacht wird, bestimmt ist, so ist auch die Bewegung des Körpers durch die Bewegungen dieser Punkte definiert. Infolgedessen hat sich die Bewegungslehre zunächst mit der Untersuchung der Bewegung des geometrischen Punktes zu befassen. Die hierbei gefundenen Ergebnisse bilden dann die Grundlagen für die Behandlung der Bewegungen von Punktsystemen oder Körpern[1]).

[1]) An zusammenfassenden Darstellungen seien genannt: L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. Leipzig 1888. — A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig 1886; A. Schoenflies u. M. Grübler, Kinematik, Enzyklop. d. math. Wiss. Bd. I, Abschnitt IV, 3, S. 190—278; M. Grübler, Lehrbuch der Technischen Mechanik. I. Bd. Bewegungslehre. Berlin 1919; M. Grübler, Getriebelehre. Berlin 1917; K. Heun, Lehrbuch der Mechanik. 1. Teil. Kinematik. Leipzig 1906; A. Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik. I. Bd. Einführung in die Mechanik, Abschnitt 1 u. 2. Berlin 1921; Th. Pöschl, Lehrbuch der Technischen Mechanik, S. 98—170. Berlin 1923; F. Wittenbauer, Graphische Dynamik. Berlin 1923; M. Krause, Analysis der ebenen Bewegung. Leipzig 1920.

2. Relativität aller Bewegungen. Wie bereits angegeben wurde, ist jede Bewegung eines Körpers auf einen bestimmten Bezugskörper zu beziehen, und es ist einleuchtend, daß ein Körper für verschiedene Bezugskörper verschiedene Bewegungen ausführen kann. Alle Bewegungen von Körpern sind also stets relative Bewegungen. Ebenso handelt es sich bei der Ruhelage eines Körpers immer nur um die relative Ruhe bezüglich eines bestimmten Bezugskörpers.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich, daß man den Bezugskörper im allgemeinen nicht als in Ruhe befindlich ansehen darf. Wir kennen keinen Körper, von dem wir mit Sicherheit wissen, daß er in absoluter Ruhe ist. In vielen Fällen werden wir als Bezugskörper für die Betrachtung von Bewegungen den Erdkörper benutzen und diesen dann sehr oft als ruhend ansehen, obwohl z. B. bei der Untersuchung der Bewegung von Flugzeugen oder von Geschossen die Bewegung der Erde im Weltraum nicht vernachlässigt werden darf. Bei der Betrachtung der Bewegung von Maschinengetrieben wird man in der Regel das Maschinengestell, das meist mit der Erde als starr verbunden anzusehen ist, als ruhenden Bezugskörper benutzen, doch kommen hier sehr häufig Fälle vor, in denen ein anderer, und zwar ein bewegter Bezugskörper verwendet wird. Als Beispiel sei die Doppelschiebersteuerung der Dampfmaschinen genannt, bei der der Grundschieber sich auf dem Schieberspiegel, der mit dem Maschinengestell starr verbunden ist, bewegt, während der Expansionsschieber auf dem Grundschieber gleitet. Für die Beurteilung der Arbeitsweise der Steuerung ist hier nur die Relativbewegung des Expansionsschiebers gegen den Grundschieber, der hier daher als Bezugskörper auftritt, von Bedeutung. Ein anderer Fall tritt bei der Drehbank auf. Wenn man auf dieser einen zylindrischen Körper abdreht, so beschreibt die Spitze des Drehstahles gegen das Maschinengestell, das man dann als ruhenden Bezugskörper annimmt, eine gerade Linie, dagegen gegen das Werkstück eine Schraubenlinie.

Es ist jedenfalls für die Untersuchung aller Bewegungsvorgänge außerordentlich wichtig, daß man sich stets über den Bezugskörper selbst und dann darüber klar wird, ob die Bewegung des Bezugskörpers von Einfluß auf die betrachtete Bewegung ist und gegebenenfalls, welcher Art dieser Einfluß ist.

II. Die Bewegung des Punktes.

3. Die geradlinige Bewegung des Punktes. Bewegt sich ein Punkt A auf einer Geraden s (Abb. 1), so kann die Bewegung in jeder der beiden Richtungen der Geraden erfolgen. Man wählt auf s einen beliebigen Punkt O als Bezugspunkt für die Bewegung des Punktes A und legt jeder der beiden Richtungen der Geraden von O aus ein Vorzeichen bei. Die Lage des bewegten Punktes A auf s ist dann durch die Entfernung $OA = s$ des Punktes A vom Bezugspunkt O eindeutig gegeben, wobei die Größe s ein bestimmtes Vorzeichen besitzt. Kennt man s als Funktion der Zeit t, ist also die Funktion $s = f(t)$ bekannt, so ist hierdurch die Bewegung des Punktes A auf der Geraden s gegeben. Die Gleichung $s = f(t)$ wollen wir die Bewegungsgleichung des Punktes A nennen. Da zu einer bestimmten Zeit der Punkt A nur eine bestimmte Lage haben kann, so muß die Funktion $s = f(t)$ immer eindeutig und stetig sein, wenn überhaupt eine Bewegung möglich sein soll.

Abb. 1. Geradlinige Bewegung des Punktes.

Unter der Anfangslage A_0 des Punktes A verstehen wir diejenige Lage, in der A seine Bewegung beginnt oder in der wir aus irgendwelchen Gründen die Beobachtung der Bewegung beginnen. Diese Anfangslage A_0 ist bestimmt durch die Entfernung $A_0O = s_0$ vom Bezugspunkt O und ferner durch die Zeit t_0,

zu der sich der Punkt A in der Lage A_0 befindet. Wenn der Punkt A sich aus seiner Anfangslage A_0 nach irgendeiner Lage A bewegt, so legt er hierbei den Weg $W = s - s_0$ zurück, und zwar in der Zeit $t - t_0$. Hierbei ist darauf zu achten, daß die Größen s ihrer Definition entsprechend die Entfernungen des bewegten Punktes A vom Bezugspunkt O, aber nicht zurückgelegte Wege sind. Es kann sich in vielen Fällen als zweckmäßig erweisen, die Anfangslage A_0 als Bezugspunkt für die Bewegung zu benutzen. Dann ist $s_0 = 0$ zu setzen.

Um den Bewegungsverlauf bei der geradlinigen Bewegung zu veranschaulichen, benutzt man ein Diagramm, bei dem man als Abszisse die Zeit und als Ordinate die Größe s aufträgt, oder genauer gesagt Strecken, die der Zeit t bzw. der Größe s proportional sind. Wir setzen

$$x = \mu t, \qquad y = \nu s$$

und tragen diese Größen in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein (Abb. 2). Den verschiedenen Lagen des geradlinig bewegten Punktes A entsprechen die Punkte B im Diagramm, welche eine Diagrammkurve bestimmen, die man das Weg-Zeit-Diagramm oder das Weg-Zeit-Schaubild nennt. Dieses Diagramm ermöglicht es, für jeden beliebigen Zeitpunkt die zugehörige Lage des bewegten Punktes A zu ermitteln. Man hat zu diesem Zwecke im Diagramm für die der vorgelegten Zeit entsprechende Abszisse die zugeordnete Ordinate zu zeichnen, auf der durch die Diagrammkurve das zugehörige $y = \nu s$ bestimmt wird.

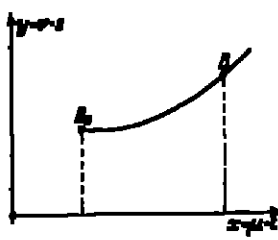


Abb. 2. Weg-Zeit-Diagramm der geradlinigen Bewegung.

Die oben eingeführten Größen μ und ν sind Maßstabkonstanten, deren Dimension sich daraus ergibt, daß die Größen x, y, s Längen sind und daher in Längeneinheiten (l_I) gemessen werden, während die Zeit t in Zeiteinheiten (t_I) gemessen wird. Wir erhalten aus

$$\nu = \frac{y}{s}, \qquad \dim(\nu) = \frac{\dim(y)}{\dim(s)} = \frac{l_I}{l_I} = 1.$$

Die Maßstabkonstante ν ist also eine unbenannte Zahl, und zwar der Zeichnungsmaßstab, in dem die Wegstrecken aufgetragen sind. Dagegen finden wir aus

$$\mu = \frac{x}{t}, \qquad \dim(\mu) = \frac{\dim(x)}{\dim(t)} = \frac{l_I}{t_I}.$$

Wir sehen also, daß die Maßstabskonstante μ keine unbenannte Zahl ist, sondern in bestimmten Einheiten gemessen werden muß. Dieser Umstand ist deshalb wichtig, weil sich der Zahlenwert für μ verschieden ergeben wird, je nachdem ob man z. B. die Längeneinheiten in Zentimeter oder in Meter mißt. Die Maßstabkonstanten oder kurz gesagt die Maßstäbe μ und ν können, wenn ein Weg-Zeit-Diagramm gezeichnet werden soll, willkürlich gewählt werden. Wenn dagegen ein bestimmtes Diagramm vorgelegt ist, mit Hilfe dessen die Bewegung untersucht werden soll, so sind zunächst die Maßstäbe μ und ν zu ermitteln. Hierzu müssen für irgendeinen Punkt B_1 des Diagramms die zugehörigen Größen s_1 und t_1 gegeben sein, während man aus dem Diagramm die entsprechenden Koordinaten x_1 und y_1 entnimmt. Dann lassen sich die Maßstäbe μ und ν aus den Beziehungen

$$\mu = \frac{x_1}{t_1} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{y_1}{s_1}$$

unmittelbar zahlenmäßig berechnen.

Das Weg-Zeit-Schaubild ermöglicht eine sehr übersichtliche Beurteilung und Untersuchung der geradlinigen Bewegung eines Punktes. Es ist einleuchtend, daß die Art der Bewegung wesentlich von der Diagrammkurve abhängig ist oder umgekehrt, daß jeder Bewegung eine bestimmte Diagrammkurve entspricht. Wir wollen hier einige Fälle betrachten, bei denen ein bestimmtes Schaubild gegeben ist und für die Untersuchung der Bewegung benutzt werden soll. Vorgelegt sei zunächst als Diagrammkurve eine gerade Linie, die mit der x-Achse den Winkel α einschließen möge (Abb. 3). Gesucht wird die Bewegungsgleichung $s = f(t)$, die sich aus der Gleichung der Diagrammkurve bestimmen lassen wird. Rein geometrisch erhalten wir als Gleichung der geraden Linie B_0B im Schaubild

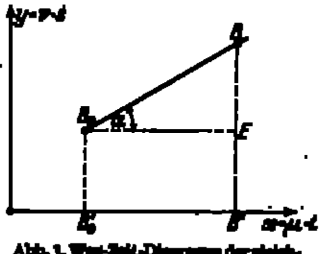


Abb. 3. Weg-Zeit-Diagramm der gleichförmigen geradlinigen Bewegung.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

woraus sich nach Einsetzen der Werte für x und y die Gleichung

$$s - s_0 = \frac{\mu}{\nu}\operatorname{tg}\alpha\,(t - t_0) = c\,(t - t_0) \qquad (1)$$

ergibt. Hierin ist zur Abkürzung die Konstante

$$\frac{\mu}{\nu}\operatorname{tg}\alpha = c$$

gesetzt worden. Die Größe $s - s_0 = W$ ist der vom geradlinig bewegten Punkte A in der Zeit $t - t_0$ zurückgelegte Weg. Wir finden somit aus der Gleichung (1), daß im Falle der geradlinigen Schaulinie der Punkt A in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt. Eine solche Bewegung nennt man **gleichförmig**. Ihre Bewegungsgleichung ist eine lineare Beziehung zwischen den Größen s und t. Die oben eingeführte Konstante $c = \mu/\nu \operatorname{tg}\alpha$ heißt die **Geschwindigkeit** der gleichförmigen Bewegung. Aus (1) folgt

$$c = \frac{s - s_0}{t - t_0},$$

Abb. 4. Weg-Zeit-Diagramm der gleichförmigen geradlinigen Bewegung mit negativer Geschwindigkeit.

woraus sich die Dimension der Geschwindigkeit zu

$$\dim(c) = \frac{\dim(s)}{\dim(t)} = \frac{l_I}{t_I} = l_I t_I^{-1}$$

ergibt. Werden z. B. die Längen in Meter und die Zeiten in Sekunden gemessen, so wird

$$\dim(c) = \mathrm{m\,sec}^{-1}.$$

Wir haben gefunden, daß bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit das Verhältnis des zurückgelegten Weges zur entsprechenden Zeit ist. Die Geschwindigkeit ist ein Vektor, der die Richtung der Bewegung besitzt. Ist die Geschwindigkeit negativ, so hat die Schaulinie im Diagramm einen Richtungswinkel α, für den $\operatorname{tg}\alpha$ negativ ist (Abb. 4). Die Weg-Zeit-Schaulinien werden zur Veranschaulichung von Eisenbahnfahrplänen benutzt (Abb. 5). Die Wartezeiten der Züge auf den einzelnen Stationen, in denen der Zug sich in Ruhe befindet, liefern im Diagramm Stücke von geraden Linien, die der Abszissenachse parallel sind.

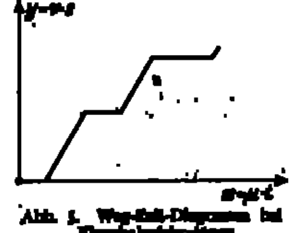


Abb. 5. Weg-Zeit-Diagramm bei Eisenbahnfahrplänen.

Im allgemeinen ist die Weg-Zeit-Schaulinie nicht eine Gerade, sondern irgendeine krumme Linie (Abb. 6). Die entsprechende Bewegung des Punktes A ist dann nicht mehr gleichförmig, sondern ungleichförmig, da in gleichen Zeiten nicht mehr gleiche Wege zurückgelegt werden. Infolgedessen muß hier auch die Geschwindigkeit anders definiert werden als bei der gleichförmigen Bewegung, bei der die Geschwindigkeit konstant ist. Zieht man an die Schaulinie in einem Punkte B, für den man die Geschwindigkeit ermitteln will, die Tangente, die mit der x-Achse den Winkel τ einschließen möge, so übertragen wir den Ausdruck der Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung $v = \frac{\mu}{\nu}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ auf die ungleichförmige Bewegung, indem wir deren Geschwindigkeit durch die entsprechende Beziehung

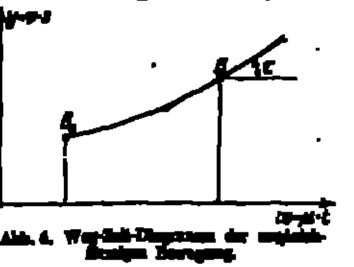


Abb. 6. Weg-Zeit-Diagramm der ungleichförmigen Bewegung.

$$v = \frac{\mu}{\nu}\,\mathrm{tg}\,\tau$$

definieren. Da

$$\mathrm{tg}\,\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{\nu}{\mu}\,\frac{ds}{dt}$$

ist, so erhalten wir als Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung den analytischen Ausdruck

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Wenn wir also die Bewegungsgleichung $s = f(t)$ irgendeiner ungleichförmigen Bewegung kennen, so erhalten wir aus ihr durch Differentiation nach der Zeit die Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit v ist ebenfalls ein Vektor, dem wir die Richtung der Bewegung des geradlinig bewegten Punktes A beilegen.

Wir können die Geschwindigkeit v, die wir aus der Bewegungsgleichung durch Differentiation als Funktion der Zeit erhalten, wieder durch ein Diagramm veranschaulichen. Wir tragen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Abb. 7) als Abszissen wieder die Strecken $x = \mu t$ und als Ordinaten die Strecken $y = \varkappa v$ auf, wobei $\varkappa$ eine neue Maßstabkonstante ist, deren Einheit sich zu

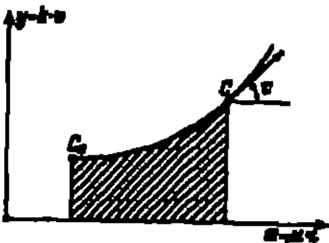


Abb. 7. Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der geradlinigen Bewegung des Punktes.

$$\dim(\varkappa) = \frac{\dim(y)}{\dim(v)} = \frac{l_1}{l_1 \cdot t_1^{-1}} = t_1$$

ergibt. Die Maßstabkonstante $\varkappa$ wird also in Zeiteinheiten gemessen. Das **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm** hat eine wichtige Eigenschaft. Ermittelt man die in Abb. 7 schraffierte Fläche F, so ergibt sich

$$F = \int_{x_0}^{x} y\,dx = \varkappa\mu\int_{t_0}^{t} v\,dt = \varkappa\mu\int_{s_0}^{s} ds.$$

Hierin ist $\int_{s_0}^{s} ds = W$ der vom geradlinig bewegten Punkte A in der Zeit $t - t_0$ zurückgelegte Weg, so daß

$$F = \varkappa\mu W \qquad \text{oder} \qquad W = \frac{F}{\varkappa\mu}$$

wird. Die in Abb. 7 schraffierte Diagrammfläche F entspricht also dem in der Zeit $t - t_0$ zurückgelegten Wege.

Im beliebigen Punkte C (Abb. 7) der Geschwindigkeit-Zeit-Schaulinie ziehen wir die Tangente, die mit der Abszissenachse den Winkel σ einschließt. Dann ist

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{dy}{dx} = \frac{\varkappa}{\mu}\frac{dv}{dt} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{\varkappa}\operatorname{tg}\sigma = w.$$

Die Größe $w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, die man also durch zweimalige Differentiation der Bewegungsgleichung $s = f(t)$ erhält, nennt man die **Beschleunigung** der geradlinigen Bewegung.

Schließlich benutzt man für die Untersuchung der geradlinigen Bewegung noch ein weiteres Schaubild, das **Geschwindigkeit-Weg-Diagramm**, bei dem man als Abszissen die Strecken $x = \nu s$ und als Ordinaten die Strecken $y = \varkappa v$ aufträgt (Abb. 8). In diesem Diagramm läßt sich die Beschleunigung

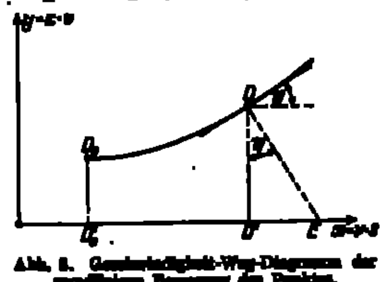


Abb. 8. Geschwindigkeit-Weg-Diagramm der geradlinigen Bewegung des Punktes.

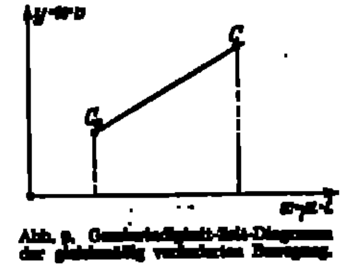


Abb. 9. Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der gleichmäßig veränderten Bewegung.

sehr einfach darstellen. Zieht man nämlich in einem beliebigen Punkte D der Schaulinie die Tangente und die Normale, so läßt sich die Subnormale $D'E$ mit Hilfe des Richtungswinkels η der Tangente in folgender Weise ausdrücken:

$$D'E = DD' \cdot \operatorname{tg}\eta = y\frac{dy}{dx} = \frac{\varkappa^2}{\nu}v\frac{dv}{ds}.$$

Setzt man hierin für v seinen Wert ds/dt ein, so folgt

$$D'E = \frac{\varkappa^2}{\nu}\frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = \frac{\varkappa^2}{\nu}\frac{dv}{dt} = \frac{\varkappa^2}{\nu}w.$$

Wir sehen also, daß im Geschwindigkeit-Weg-Diagramm die Subnormale der Schaulinie die Beschleunigung darstellt bzw. ihr proportional ist.

Wenn im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm die Schaulinie eine Gerade ist (Abb. 9), so erhalten wir die gleichmäßig veränderte Bewegung, deren Beschleunigung $w = dv/dt = w_0$ konstant ist. Man erhält hier durch Integration

$$v = v_0 + w_0(t - t_0).$$

Die Geschwindigkeitszunahme ist also bei der gleichmäßig veränderten Bewegung der Zeit proportional. Eine weitere Integration ergibt die Bewegungsgleichung

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}w_0(t - t_0)^2.$$

Wir sehen also, daß bei der gleichmäßig veränderten Bewegung der zurückgelegte Weg $W = s - s_0$ eine quadratische Funktion der Zeit ist. Setzt man, wie es häufig geschieht, die Anfangszeit $t_0 = 0$, so ergibt sich

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}w_0 t^2.$$

Setzt man schließlich noch $s_0 = 0$, $v_0 = 0$ und $w_0 = g$, so erhält man die Bewegungsgleichung des freien Falles aus der Ruhelage.

$$s = \frac{1}{2} g t^2 .$$

4. Die krummlinige Bewegung des Punktes. Ein Punkt A möge eine gegebene Kurve a durchlaufen. Wir verfahren hier zunächst ebenso wie bei der geradlinigen Bewegung und wählen auf der Kurve a einen beliebigen Bezugspunkt O, von dem aus wir die Lage des Punktes A auf der Bahnkurve a durch die Länge des Bogens OA bestimmen (Abb. 10), wobei wir dieser Länge wieder ein Vorzeichen beilegen. Setzen wir dann die Bogenlänge $\widehat{OA} = s$, so muß s wieder eine eindeutige stetige Funktion $s = f(t)$ der Zeit sein, wenn eine Bewegung des Punktes A möglich sein soll. Auch hier bezeichnen wir auf der Kurve a die Anfangslage der Punkte A mit A_0, die von O um die Kurvenlänge $\widehat{OA_0} = s_0$ entfernt ist und der die Zeit t_0 entspricht. Der von A zurückgelegte Weg ist dann $W = s - s_0$.



Abb. 10. Die krummlinige Bewegung des Punktes.

Man kann die Lage des Punktes A anstatt durch die Bogenlänge s auch durch den von einem Pol P aus nach A gezogenen Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ kennzeichnen, welcher ebenfalls eine eindeutige stetige Funktion von t sein muß.

Den Begriff der Geschwindigkeit können wir von der geradlinigen Bewegung unmittelbar übernehmen und setzen $v = ds/dt$. Die Geschwindigkeit ist hier ein Vektor $\mathfrak{v}$, der in der Bahntangente liegt, und zwar hat man, da ds der Betrag des vektoriellen Zuwachses $d\mathfrak{r}$ des Vektors $\mathfrak{r}$ ist,

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} . \tag{1}$$

Dagegen müssen wir die Beschleunigung bei der krummlinigen Bewegung anders definieren als bei der geradlinigen Bewegung, da wir, wie sich noch zeigen wird, die Beschleunigung allgemein als Änderung der Geschwindigkeit aufzufassen haben und sich die Geschwindigkeit bei der krummlinigen Bewegung nicht nur der Größe nach ändert wie bei der geradlinigen Bewegung, sondern auch ihrer Richtung nach.

5. Zerlegung einer Bewegung in Seitenbewegungen. Wir wollen zunächst die krummlinige Bahnkurve als ebene Kurve voraussetzen und erst im Anschluß daran die räumlichen Bahnkurven betrachten. Wir beziehen die gegebene Bahnkurve a auf ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem x, y mit dem Achsenwinkel α (Abb. 11). Dann greifen wir die Anfangslage A_0 und eine beliebige Lage A des bewegten Punktes heraus und projizieren beide auf die Koordinatenachsen. Wenn der Punkt A die Bahnkurve a durchläuft, so vollziehen seine Projektionen A_x und A_y entsprechende Bewegungen auf den beiden Koordinatenachsen. Diese Bewegungen nennt man **projizierte Bewegungen oder Seitenbewegungen**. Man spricht davon, daß man eine gegebene Bewegung in Seitenbewegungen

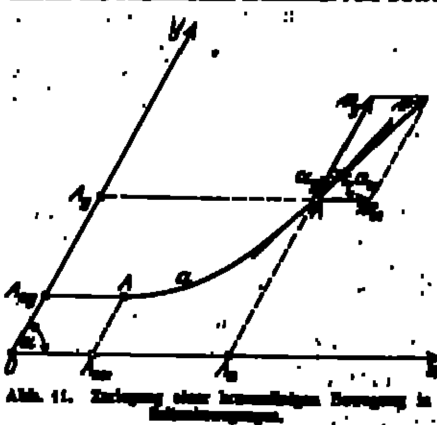


Abb. 11. Zerlegung einer krummlinigen Bewegung in Seitenbewegungen.

nach gegebenen Richtungen zerlegt. Diese Zerlegung hat den Vorteil, daß man wieder geradlinige Bewegungen erhält, deren Untersuchung sehr einfach ist. Umgekehrt kann man entsprechend zwei geradlinige Bewegungen zu einer resultierenden Bewegung zusammensetzen, bei der sich dann im allgemeinen eine krummlinige Bahnkurve ergibt.

Die Geschwindigkeit im Punkte A ist $v = ds/dt$, wobei ds das Bogenelement darstellt. Denken wir uns dieses Bogenelement auf die Koordinatenachsen projiziert, so erhalten wir für die Projektionen

$$dx = ds\frac{\sin\alpha_y}{\sin\alpha}, \qquad dy = ds\frac{\sin\alpha_x}{\sin\alpha},$$

wobei α_x und α_y die Winkel sind, welche die Bahntangente mit den entsprechenden Koordinatenachsen einschließt. Hieraus erhalten wir die Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v\frac{\sin\alpha_y}{\sin\alpha}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = v\frac{\sin\alpha_x}{\sin\alpha}. \tag{1}$$

Stellt man v, v_x und v_y als Vektoren dar, so erkennt man an den Ausdrücken (1), daß $\mathfrak{v}_x$ und $\mathfrak{v}_y$ die Seiten und $\mathfrak{v}$ die Diagonale eines Parallelogrammes bilden (Abb. 11), das man das Parallelogramm der Geschwindigkeiten nennt. Man kann mit Hilfe des Parallelogramms jede Geschwindigkeit in Seitengeschwindigkeiten oder Komponenten nach zwei gegebenen Richtungen zerlegen. Umgekehrt kann man zwei Geschwindigkeiten mit Hilfe des Parallelogramms zu einer resultierenden Geschwindigkeit zusammensetzen. Diese resultierende Geschwindigkeit ist die vektorielle Summe ihrer Komponenten und läßt sich daher auch schreiben $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_x + \mathfrak{v}_y$.

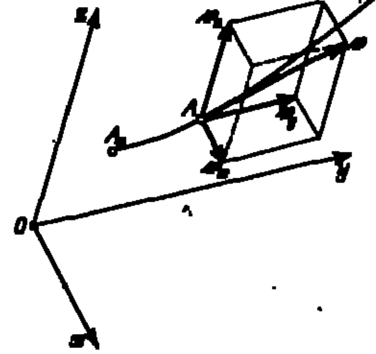


Abb. 12. Das Parallelepiped der Geschwindigkeiten.

Ist die vorgelegte Bahnkurve keine ebene, sondern eine räumliche Kurve, so läßt sich die vorstehende Betrachtung sinngemäß erweitern, wobei man statt des Parallelogramms das Parallelepiped der Geschwindigkeiten erhält. Man wählt drei beliebige Gerade, die durch einen Punkt gehen und nicht in einer Ebene liegen, als Achsen x, y, z eines schiefwinkligen Koordinatensystems (Abb. 12) und erhält dann in Richtung dieser drei Achsen die Geschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$, deren Resultierende die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des auf der Raumkurve sich bewegenden Punktes ist, die man wieder als vektorielle Summe $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_x + \mathfrak{v}_y + \mathfrak{v}_z$ schreiben kann. Kennt man die Bewegung des Punktes A auf der Raumkurve, so kann man diese Bewegung auf drei gegebene, durch einen Punkt gehende Geraden projizieren und erhält dann drei projizierte Bewegungen, die in der oben angegebenen Art als geradlinige Bewegungen untersucht werden können.

6. Die Beschleunigung der krummlinigen Bewegung. Der Punkt A möge sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf seiner krummlinigen Bahn bewegen; in der ihm benachbarten Lage sei seine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ (Abb. 13). Die Änderung der Geschwindigkeit, und zwar nicht nur hinsichtlich der Größe, sondern auch der Richtung, wird durch einen Vektor $\Delta\mathfrak{v}$ dargestellt, der, zu $\mathfrak{v}$ addiert, die neue Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ ergibt. Es ist also $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + \Delta\mathfrak{v}$. Unter der Beschleunigung der krummlinigen Bewegung wollen wir den Vektor $\mathfrak{w}$ verstehen, der die

Geschwindigkeitsänderung hinsichtlich Größe und Richtung verursacht, und wir schreiben

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}. \qquad (1)$$

Wir beziehen die Bewegung wieder auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem x, y und setzen der Einfachheit wegen zunächst eine ebene Bahnkurve voraus (Abb. 14). Dann zerlegen wir die beiden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ in Richtung der Achsen in ihre Komponenten $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}'_x$, $\mathfrak{v}'_y$. Dann sind $d\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}'_x - \mathfrak{v}_x$ und $d\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}'_y - \mathfrak{v}_y$ die Geschwindigkeitszunahmen der Seitenbewegungen, und daher $\mathfrak{w}_x = d\mathfrak{v}_x/dt$ und $\mathfrak{w}_y = d\mathfrak{v}_y/dt$ die entsprechenden Beschleunigungen. Da nun $d\mathfrak{v}$ die Resultierende von $d\mathfrak{v}_x$ und $d\mathfrak{v}_y$ und $\mathfrak{w} = d\mathfrak{v}/dt$ die resultierende Beschleunigung ist, so folgt, daß die Beschleunigungen der Seitenbewegungen als Resultierende nach dem Parallelogrammgesetz die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des krummlinig bewegten Punktes A ergeben. Wir finden also, daß das Parallelogrammgesetz auch für die Zerlegung und daher auch für die Zusammensetzung der Beschleunigungen gilt, und daß wir schreiben können $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_x + \mathfrak{w}_y$. Diese Betrachtung läßt sich auf

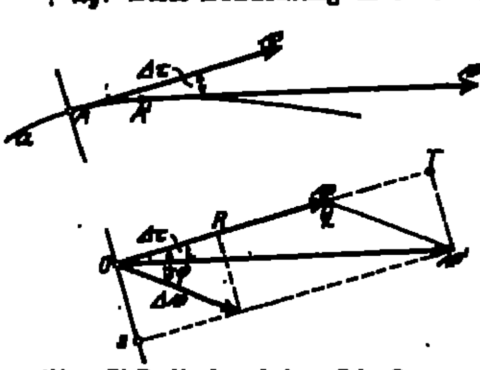


Abb. 13. Die Beschleunigung der krummlinigen Bewegung.

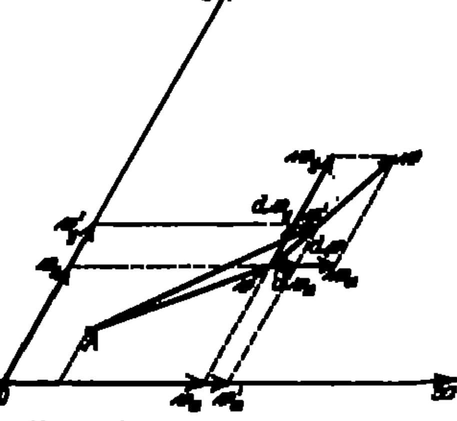


Abb. 14. Die Zerlegung der Beschleunigung der krummlinigen Bewegung nach gegebenen Richtungen.

räumliche Kurven erweitern, wobei man entsprechend wie bei den Geschwindigkeiten statt des Parallelogrammes das Parallelepiped zu benutzen hat und wobei sich $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_x + \mathfrak{w}_y + \mathfrak{w}_z$ ergibt.

Zerlegen wir (nach Abb. 13) die Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\mathfrak{v}$ in zwei Komponenten OR und OS in Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, d. h. der Bahntangente, und in Richtung der Bahnnormalen, so sind

$$\mathfrak{w}_t = \lim_{\Delta t=0}\left(\frac{OR}{\Delta t}\right) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{w}_n = \lim_{\Delta t=0}\left(\frac{OS}{\Delta t}\right)$$

die entsprechenden Komponenten der Gesamtbeschleunigung $\mathfrak{w}$. Wir nennen $\mathfrak{w}_t$ die **Tangentialbeschleunigung** und $\mathfrak{w}_n$ die **Normalbeschleunigung** des krummlinig bewegten Punktes A. Wir sehen, daß die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ ebenso wie ihre beiden Komponenten immer in der Ebene der beiden benachbarten Tangenten, d. h. in der **Schmiegungsebene** der Raumkurve, liegt. Die Normalbeschleunigung $\mathfrak{w}_n$ liegt in der **Hauptnormalen** der Raumkurve, d. h. derjenigen Kurvennormalen, die in der Schmiegungsebene gelegen ist. Sie ist stets nach der konkaven Seite der Kurve gerichtet. Die obigen Ausdrücke für die Größen $\mathfrak{w}_t$ und $\mathfrak{w}_n$ lassen sich mit Hilfe der Abb. 13 weiter umformen, und wir erhalten

$$\mathfrak{w}_t = \lim_{\Delta t=0}\left(\frac{OR}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t=0}\frac{OT - OQ}{\Delta t} = \lim_{\Delta t=0}\frac{v'\cos\Delta\tau - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t=0}\frac{v' - v}{\Delta t}.$$

Da $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + \Delta\mathfrak{v}$ ist, so wird

$$w_t = \lim_{\Delta t=0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt}. \tag{2}$$

Wir finden also, daß die Tangentialbeschleunigung gleich der Bahnbeschleunigung ist. Für die Normalbeschleunigung erhalten wir

$$w_n = \lim_{\Delta t=0}\left(\frac{OS}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t=0}\left(\frac{OS}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right).$$

Da $\lim\limits_{\Delta t=0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt} = v$ und ferner $\lim\limits_{\Delta t=0} OS = \lim\limits_{\Delta t=0}(v'\sin\Delta\tau) = v\lim\limits_{\Delta t=0}\Delta\tau$ ist, so wird

$$w_n = v^2\cdot\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}.$$

Um diesen Ausdruck noch weiter zu vereinfachen, ist es zweckmäßig, den Krümmungsradius ϱ der Kurve einzuführen. Die Hauptnormalen zweier benachbarter Lagen A und A' des bewegten Punktes (Abb. 15) schneiden sich im Krümmungsmittelpunkt K, und $KA = KA' = \varrho$ ist der Krümmungsradius der Kurve. Die Strecken KA und KA' schließen den Kontingenzwinkel $\Delta\tau$ der Kurve miteinander ein. Dann ist das Bogenelement der Raumkurve

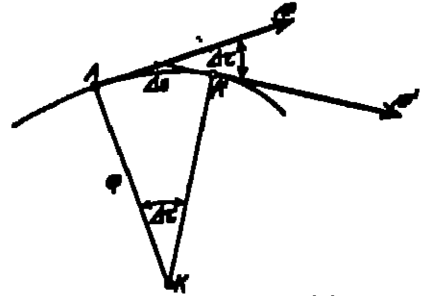


Abb. 15. Die Krümmung der Bahnkurve.

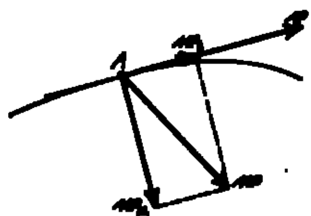


Abb. 16. Normal- und Tangentialbeschleunigung.

$$\lim\Delta s = \varrho\lim\Delta\tau \qquad \text{und daher} \qquad \varrho = \lim\frac{\Delta s}{\Delta\tau}.$$

Infolgedessen finden wir

$$w_n = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{3}$$

Wir sehen, daß die Normalbeschleunigung nur von der Größe der Geschwindigkeit und der Krümmung der Bahnkurve abhängig ist. Während die Tangentialbeschleunigung ein Maß für die Größenänderung der Geschwindigkeit darstellt, gibt die Normalbeschleunigung die Größe der Richtungsänderung an. Im Falle der geradlinigen Bewegung ist $\varrho = \infty$ und daher $w_n = 0$, da hier eine Richtungsänderung der Geschwindigkeit nicht auftreten kann. Bewegt sich ein Punkt A auf seiner Bahnkurve gleichförmig, so ist seine Tangentialbeschleunigung gleich Null, und die Gesamtbeschleunigung liegt in der Hauptnormalen der Bahnkurve. Bei der allgemeinen Bewegung eines Punktes A auf seiner Bahnkurve ist die Beschleunigung stets nach der konkaven Seite der Kurve gerichtet (Abb. 16).

7. Darstellung der Bewegung eines Punktes in Polarkoordinaten. Auf die Darstellung der Bewegung eines Punktes in rechtwinkligen Koordinaten

kann hier verzichtet werden, da die entsprechenden Überlegungen schon bei der Behandlung der projizierten Bewegungen (Ziff. 5) angestellt wurden. Man hat dort nur an Stelle des allgemeinen schiefwinkligen Koordinatensystems den speziellen Fall rechtwinkliger Koordinaten zu benutzen. Dann erhält man für die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und der Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des bewegten Punktes in Richtung der Koordinatenachsen

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}; \tag{1}$$

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{2}$$

Ganz andere Beziehungen ergeben sich dagegen, wenn die Bewegung eines Punktes in Polarkoordinaten dargestellt werden soll. Hier wird die Lage des bewegten Punktes A durch die Anomalie φ und den Fahrstrahl r (Abb. 17)

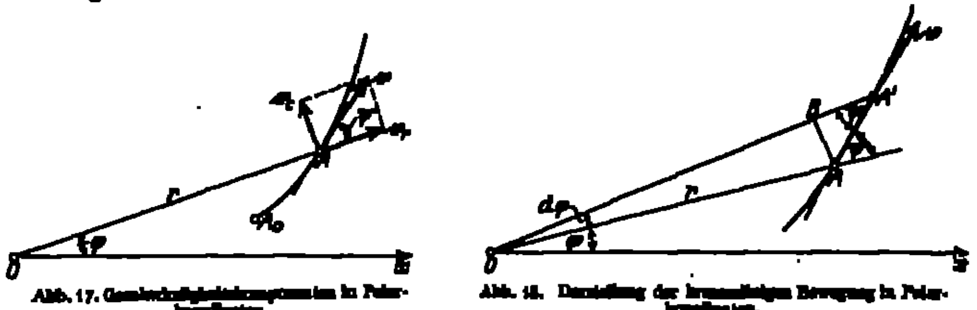


Abb. 17. Geschwindigkeitskomponenten in Polarkoordinaten. Abb. 18. Darstellung der krummlinigen Bewegung in Polarkoordinaten.

gegeben. Die Bewegung des Punktes A ist bestimmt, wenn man diese Polarkoordinaten r und φ als eindeutige und stetige Funktionen der Zeit kennt. Man kann dann für jeden Wert t der Zeit die zugehörigen Werte r und φ eindeutig angeben und damit die Lage des Punktes A zu jeder Zeit t ermitteln.

Wir zerlegen die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes A in zwei Komponenten $\mathfrak{v}_r$ und $\mathfrak{v}_\varphi$, und zwar in Richtung OA und dazu senkrecht. Bezeichnet man den Winkel zwischen Fahrstrahl und Kurventangente mit ψ, so gilt $v_r = v\cos\psi$ und $v_\varphi = v\sin\psi$. Nun ist bekanntlich $v = ds/dt$, wobei $ds = AA'$ das Bogenelement der Bahnkurve ist. Ferner ergibt sich rein geometrisch aus Abb. 18

$$\sin\psi = \frac{AB}{AA'} = \frac{r\,d\varphi}{ds}, \qquad \cos\psi = \frac{BA'}{AA'} = \frac{dr}{ds}.$$

Infolgedessen erhalten wir

$$v_r = \frac{ds}{dt}\,\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\varphi = \frac{ds}{dt}\,r\,\frac{d\varphi}{ds} = r\,\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Wenn r und φ als Funktionen der Zeit bekannt sind, können wir hiernach die Größe der Vektoren $\mathfrak{v}_r$ und $\mathfrak{v}_\varphi$, die man die Radial- bzw. die Zirkulargeschwindigkeit nennt, berechnen. Auch die Größe der Gesamtgeschwindigkeit ergibt sich, und zwar zu

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}.$$

Zur Darstellung der Beschleunigung und ihrer Komponenten in Polarkoordinaten kann man von den rechtwinkligen Koordinaten ausgehen, und zwar in der Weise, daß man sie durch die Polarkoordinaten ausdrückt. Man erhält (Abb. 19)

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

Durch zweimalige Differentiation nach der Zeit finden wir

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi$$

und

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\varphi - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos\varphi - r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sin\varphi,$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\varphi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin\varphi + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos\varphi.$$

Zerlegt man w_x und w_y in Richtung von w_r und w_z in Komponenten, so lassen sich diese beiden Komponenten durch w_x und w_y darstellen, und zwar erhält man rein geometrisch nach Abb. 19

$$\left.\begin{aligned} w_r &= w_x\cos\varphi + w_y\sin\varphi = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ w_z &= -w_x\sin\varphi + w_y\cos\varphi = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wir können also, wenn r und φ als Funktionen der Zeit bekannt sind, die Größen w_r und w_z, die man die Radial- bzw. die Zirkularbeschleunigung des bewegten Punktes A nennt, sowie die Gesamtbeschleunigung $w = \sqrt{w_r^2 + w_z^2}$ als Funktionen der Zeit darstellen. Die Fläche des unendlich kleinen Dreieckes AOA' (Abb. 20), die vom Fahrstrahl r während der Bewegung des Punktes A überstrichen wird, hat die Größe $df = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Hieraus erhält man die sog. Flächengeschwindigkeit

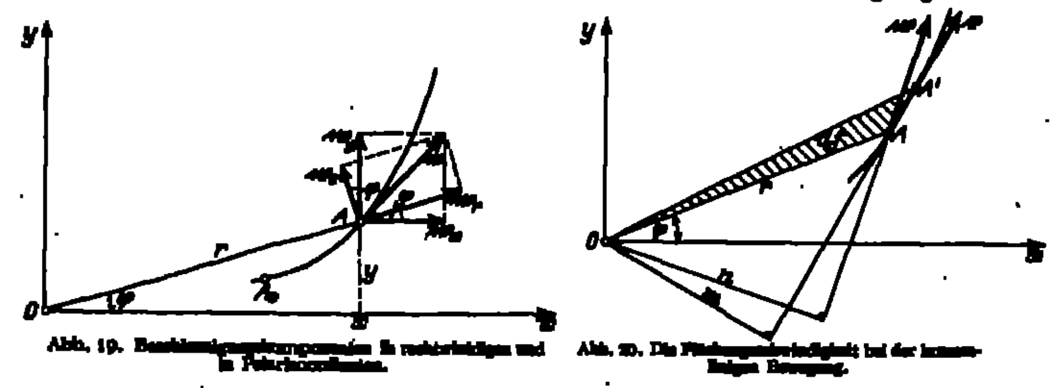


Abb. 19. Beschleunigungskomponenten in rechtwinkligen und in Polarkoordinaten.

Abb. 20. Die Flächengeschwindigkeit bei der krummlinigen Bewegung.

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r v_z = \frac{1}{2}v m$$

und die Flächenbeschleunigung

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{1}{2}r w_z = \frac{1}{2}w n,$$

wobei m und n die Längen der vom Ursprung O auf die Wirkungslinien von v bzw. w gefällten Lote sind. Bei der sog. Zentralbewegung, zu der z. B. die Planetenbewegung gehört, geht die Gesamtbeschleunigung immer durch denselben Punkt P. Wählt man diesen zum Ursprung eines Polarkoordinatensystems, so ist dauernd $n = 0$ und daher $d^2f/dt^2 = 0$. Infolgedessen wird df/dt konstant, und wir erhalten das Ergebnis, daß bei Zentralbewegungen die Flächengeschwindigkeit df/dt konstant ist, der Fahrstrahl r also in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.

Im Anschluß hieran soll kurz auf die Behandlung von **Zylinderkoordinaten** eingegangen werden, mit deren Hilfe sich die Bewegung von Punkten auf Raumkurven untersuchen lassen. Hier tritt zu den Polarkoordinaten r und φ der Ebene noch eine zu dieser Ebene senkrechte Koordinate z. Die Geschwindigkeit hat dann die Komponenten

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{5}$$

und die Größe $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}$. Entsprechend sind die Beschleunigungskomponenten

$$w_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \qquad w_\varphi = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right), \qquad w_z = \frac{d^2 z}{dt^2}, \tag{6}$$

und die Beschleunigung selbst

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_\varphi^2 + w_z^2}.$$

8. Geschwindigkeitspläne. Für die Untersuchung der Bewegung eines Punktes A, der sich auf einer krummen Linie a bewegt, sind die Geschwindig-

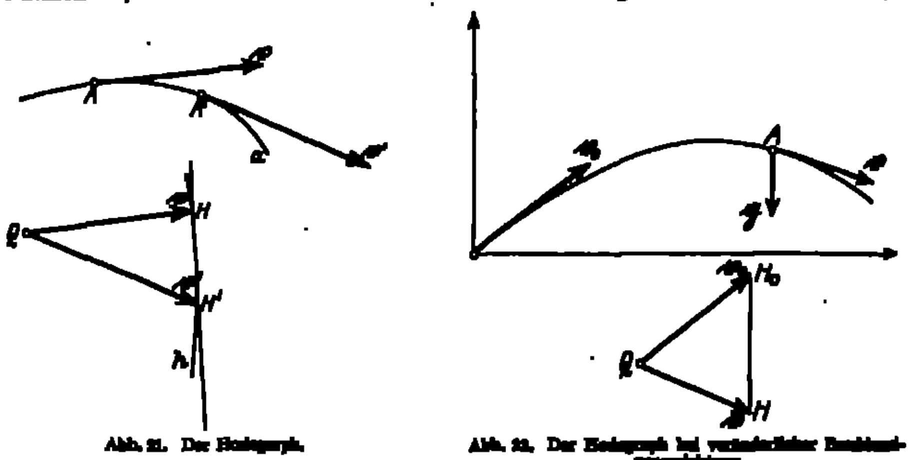


Abb. 21. Der Hodograph.

Abb. 22. Der Hodograph bei unveränderlicher Beschleunigungsrichtung.

keitspläne in verschiedener Hinsicht sehr aufschlußreich. Wir wollen uns hier auf den Fall der **ebenen** Bahnkurven beschränken, da bei den räumlichen Kurven das Aufzeichnen der Geschwindigkeitspläne nur sehr selten in Frage kommt.

Trägt man die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes A von einem festen Punkte Q aus nach Größe und Richtung auf, so beschreibt der Endpunkt H dieses Geschwindigkeitsvektors während der Bewegung des Punktes A eine Kurve h, die man den **Hodographen** der Bewegung des Punktes A nennt (Abb. 21), während Q der **Pol** des Hodographen heißt. Wir betrachten jetzt die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ in zwei benachbarten Lagen A und A' und die entsprechenden Hodographenpunkte H und H'. Dann enthält das Dreieck HQH' die beiden Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ und als dritte Seite HH', die früher eingeführte Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\mathfrak{v}$ (vgl. Ziff. 6). Da, wie wir gefunden hatten, $\Delta\mathfrak{v}$ die Richtung der Beschleunigung besitzt, und da H und H' benachbarte Hodographenpunkte sind, so finden wir den bemerkenswerten **Satz**: Die Hodographentangente ist der Beschleunigung, und zwar der Gesamtbeschleunigung des bewegten Punktes parallel. Als Beispiel hierfür sei der schiefe Wurf im luftleeren Raume angeführt (Abb. 22), bei dem der bewegte Punkt A eine Parabel be-

schreibt und die wirkende Beschleunigung die stets vertikale Erdbeschleunigung g ist. Der Hodograph ist daher eine vertikale Gerade.

Ein anderer Geschwindigkeitsplan ergibt sich durch Übertragung des Geschwindigkeit-Weg-Diagramms (vgl. Ziff. 3) auf die krummlinige Bewegung. Bei der geradlinigen Bewegung hatten wir gefunden, daß die Subnormale im Geschwindigkeit-Weg-Diagramm der Beschleunigung des bewegten Punktes entspricht. Wir verfahren nun bei der krummlinigen Bewegung so, daß wir im bewegten Punkte A seinen Geschwindigkeitsvektor um 90° gedreht, also in der Kurvennormalen auftragen. Dabei ist es, worauf wir noch zurückkommen werden, gleichgültig, ob diese Drehung um 90° im Uhrzeigersinn oder in entgegengesetzter Richtung erfolgt. Der Endpunkt V des um 90° gedrehten Geschwindigkeitsvektors beschreibt während der Bewegung des Punktes A eine Kurve, die man den V-Plan der Bewegung des Punktes A nennt (Abb. 23). Dieser V-Plan gestattet, wie GRÜBLER gezeigt hat, eine einfache zeichnerische Ermittlung der Beschleunigung w des Punktes A.

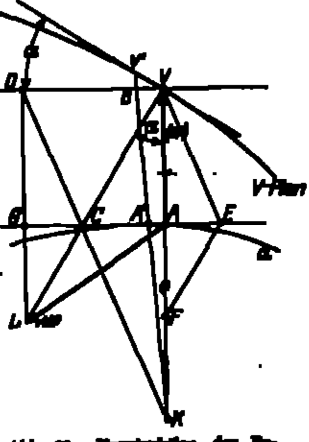


Abb. 23. Konstruktion der Beschleunigung der krummlinigen Bewegung mit Hilfe des V-Planes.

Wir hatten als Beschleunigungskomponenten die Tangentialbeschleunigung w_t und die Normalbeschleunigung w_n gefunden, wobei sich $w_t = dv/dt$ und $w_n = v^2/\varrho$ ergeben hatte.

Den Krümmungsmittelpunkt K der Bahnkurve a (Abb. 23) verbinden wir mit dem zugehörigen Punkt A und dem benachbarten Punkte A' und erhalten auf dem V-Plane die entsprechenden Punkte V und V'. Dann ist $AV = v$, $A'V' = v'$ und $A'V' - AV = v' - v = dv$, wobei $dv = BV'$ die Größenänderung der Geschwindigkeit darstellt. Wenn wir den Winkel zwischen Bahntangente und entsprechender V-Plantangente mit α bezeichnen, so wird $dv = BV' = BV\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Nun folgt ferner rein geometrisch aus Abb. 23, wenn $AA' = ds$ das Bahnelement bezeichnet,

$$BV = AA' \cdot \frac{\varrho + v}{\varrho} = ds\,\frac{\varrho + v}{\varrho}.$$

Dann wird

$$dv = ds\,\frac{\varrho + v}{\varrho}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Nun können wir die Tangentialbeschleunigung ermitteln und erhalten

$$w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds} = v\,\frac{\varrho + v}{\varrho}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{KV}{KA} \cdot AV \cdot \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Wir ziehen durch V die V-Plannormale, die die Bahntangente in C schneidet und mit AV den Winkel α einschließt, und ziehen die Gerade KC, welche die durch V zur Bahntangente gezogene Parallele in D trifft. Dann erhält man aus ähnlichen Dreiecken (Abb. 23)

$$DV = \frac{KV}{KA} \cdot CA = \frac{KV}{KA} \cdot AV \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = w_t.$$

Wir finden also, daß durch die Strecke DV die Tangentialbeschleunigung w_t dargestellt wird.

Zieht man durch V zu KC die Parallele, die die Bahntangente in E trifft, und durch E zu CV die Parallele, die AK in F schneidet, so stellt die Strecke AF

die **Normalbeschleunigung** des Punktes A dar, wie sich in folgender Weise ergibt. Aus ähnlichen Dreiecken folgt

$$AF = AV \cdot \frac{AE}{AC} = AV \cdot \frac{AV}{AK} = \frac{v^2}{\varrho} = w_n .$$

Damit haben wir die Tangential- und die Normalbeschleunigung gefunden und daher auch die Gesamtbeschleunigung bestimmt. Nun läßt sich noch eine weitere Beziehung ableiten. Wir ziehen durch D zu AV die Parallele, welche die Bahntangente in G und die V-Plannormale in L schneidet. Dann folgt wieder aus ähnlichen Dreiecken

$$GL = AV \cdot \frac{GC}{CA} = AV \cdot \frac{GD}{AK} = \frac{v^2}{\varrho} = w_n .$$

Da hiernach durch die Strecke GL die Normalbeschleunigung w_n und ferner durch $AG = VD = w_t$ die Tangentialbeschleunigung dargestellt wird, so stellt die Strecke AL nach Größe und Richtung die Gesamtbeschleunigung des Punktes A dar, und wir finden den bemerkenswerten **Satz**: Die V-Plannormale geht stets durch den Endpunkt des Beschleunigungsvektors des bewegten Punktes A. Aus diesem Satze läßt sich, wie LAUFFER gezeigt hat, noch ein weiterer Schluß ziehen. Für die bisherige Untersuchung des V-Planes ist es, wie schon erwähnt wurde, gleichgültig, ob man für die Konstruktion des V-Planes die Geschwindigkeit des Punktes A im Uhrzeigersinn oder entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn um 90° dreht. Infolgedessen muß der oben gefundene Satz auch für beide V-Pläne gelten, so daß wir den weiteren Satz erhalten: Die Normalen entsprechender Punkte der beiden V-Pläne, die sich zur Bewegung eines Punktes A zeichnen lassen, schneiden sich im Endpunkt L des Beschleunigungsvektors w des bewegten Punktes (Abb. 24). Dieser Satz ermöglicht eine recht einfache zeichnerische Ermittlung der Beschleunigung eines krummlinig bewegten Punktes A, wenn man dessen Geschwindigkeitsverlauf kennt.

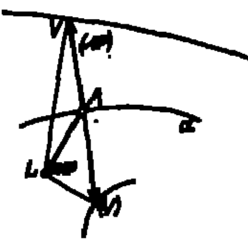


Abb. 24. V-Plan und Beschleunigung.

III. Die ebene Bewegung des starren Körpers.

9. Die Grundlagen der ebenen Bewegung. Wenn sich ein Körper so bewegt, daß die Bahnen aller seiner Punkte derselben Ebene parallel sind, so sprechen wir von der **ebenen oder komplanen Bewegung** des Körpers. Diese Bewegung verdient insbesondere deshalb eine besondere Behandlung, weil sie eine große praktische Bedeutung insofern hat, als bei allen Maschinen ebene Mechanismen auftreten, bei denen jedes einzelne Glied eine komplane Bewegung vollzieht. Wenn wir alle diejenigen Punkte des komplan bewegten Körpers herausgreifen, die in einer Normalen zur Ebene der Bahnkurven liegen, so finden wir, daß alle diese Punkte kongruente Bahnen durchlaufen. Es ist daher ausreichend, wenn man die Bewegungen derjenigen Punkte des Körpers untersucht, die in einer der Ebene der Bahnkurven parallelen Schnittebene liegen, die man sich noch unbegrenzt nach allen Seiten hin erweitert denken kann. Wir betrachten also die Bewegungen aller Punkte einer bewegten Ebene E, die sich gegen eine mit ihr zusammenfallende ruhende Ebene R bewegt, wobei die Bahnkurven sämtlicher Punkte in der gleichen Ebene R gelegen sind.

Die Bewegung der Ebene E ist vollständig und eindeutig durch die Bewegung **zweier** ihrer Punkte bestimmt, wie man in der folgenden Weise erkennt.

Wenn zwei Punkte A und B der Ebene E auf gegebenen Bahnkurven a bzw. b geführt werden (Abb. 25), so wird ein beliebiger dritter Punkt C der Ebene E, dessen Lage durch seine Entfernungen von A und B gegeben sei, eine ganz bestimmte Bewegung vollziehen müssen, und jeder Lage der Strecke AB wird sich eine und nur eine Lage des Punktes C zuordnen lassen, so daß der Punkt C eine eindeutig bestimmte Bewegung vollziehen muß. Da C ein beliebiger Punkt der bewegten Ebene E ist, so finden wir, daß die Bewegungen aller Punkte der Ebene E eindeutig bestimmt sind, wenn man die Bewegungen zweier Punkte kennt.

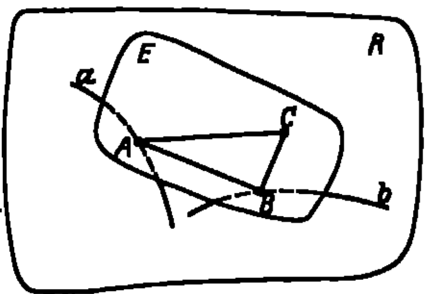


Abb. 25. Die ebene Bewegung.

Es seien zwei verschiedene Lagen E_1 und E_2 der Ebene E vorgelegt und durch je zwei entsprechende Lagen A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 zweier ihrer Punkte bestimmt (Abb. 26). Zeichnet man dann zu A_1A_2 und B_1B_2 die Mittellote, die sich in D schneiden mögen, so erkennt man, daß der Punkt D als Drehpunkt für diejenige Bewegung benutzt werden kann, durch welche die Ebene E aus der Lage E_1 in die Lage E_2 gelangt. Denn man erkennt sofort aus Abb. 26, daß die Winkel A_1DA_2 und B_1DB_2 einander gleich sind, und daß A_1 und A_2 sowie B_1 und B_2 auf je einem Kreisbogen um D liegen. Bestimmt man nun noch die Lagen C_1 und C_2 eines beliebigen dritten Punktes C der Ebene E, so findet man, daß auch C_1 und C_2 auf einem Kreisbogen um D liegen, und daß der Winkel C_1DC_2 den entsprechenden Winkeln für die Punkte A_1, A_2 und B_1, B_2 gleich ist. Dieser Winkel φ ist infolgedessen für alle Punkte der bewegten Ebene E derselbe, und man nennt ihn den **Drehwinkel** der Lagen E_1 und E_2 der bewegten Ebene E. Wir finden also, daß zwei Lagen E_1 und E_2 einer Ebene E stets durch Drehung um einen eindeutig bestimmten Punkt D ineinander übergeführt werden können.

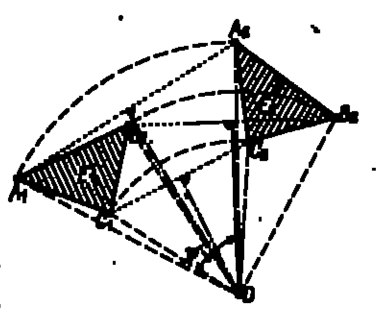


Abb. 26. Zwei endlich verschiedene Lagen einer Ebene und ihr Drehpunkt.

10. Der Momentanpol und die Polkurven. Die Bewegung einer Ebene E sei dadurch gegeben, daß zwei ihrer Punkte, A und B, auf entsprechenden Bahnkurven a bzw. b geführt werden. Wir greifen die beiden unendlich benachbarten Lagen E und E' mit ihren Punkten A, B bzw. A', B' heraus (Abb. 27) und wenden auf sie den Satz an, daß ein eindeutig bestimmter Punkt P vorhanden sein muß, der als Drehpunkt für die Bewegung dient, durch welche die Ebene E aus der Lage E in die unendlich benachbarte Lage E' gelangt. Da dieser Drehpunkt als Schnittpunkt zweier Mittellote gefunden wurde, und hier die Strecken AA' und BB' unendlich klein sind, so folgt, daß der Drehpunkt P auf den Bahnnormalen der Punkte A und B gelegen ist.

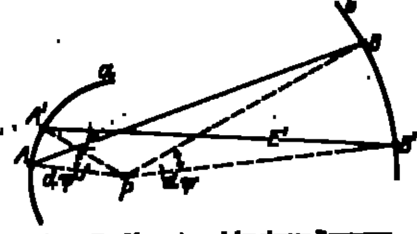


Abb. 27. Der Momentanpol der ebenen Bewegung.

Wir sehen also, daß der Drehpunkt P, den man den **Momentanpol** der Ebene E nennt, als Schnittpunkt der entsprechenden Bahnnormalen zweier Punkte der bewegten Ebene gefunden wird. Hieraus folgt unmittelbar der **Satz**: Die Bahn-

normalen sämtlicher Punkte der bewegten Ebene gehen durch einen Punkt, den Momentanpol. In jedem einzelnen Augenblick kann die Bewegung der Ebene ersetzt gedacht werden durch eine unendlich kleine Drehung um den Momentanpol P. Dieser ist daher auch derjenige Punkt der bewegten Ebene E, der augenblicklich keine Geschwindigkeit besitzt.

Jeder Lage der Ebene E während ihrer Bewegung entspricht ein eindeutig bestimmter Momentanpol P, und diese sämtlichen Momentanpole werden in der bewegten Ebene E eine Kurve und ferner in der ruhenden Ebene R ebenfalls eine Kurve bilden. Diese beiden Kurven nennt man die Polkurven der Bewegung der Ebene E, und zwar die Kurve, die in der ruhenden Ebene R liegt, die ruhende Polkurve p, und die andere, die in der bewegten Ebene E gelegen ist, die bewegte Polkurve π. Zwischen den beiden Polkurven bestehen mehrere wichtige Beziehungen. In jedem Augenblick haben sie einen Punkt, und zwar den augenblicklichen Momentanpol, gemeinsam. Wenn man ferner die bewegte Polkurve, die eine feste Kurve der bewegten Ebene E ist, um einen unendlich kleinen Winkel dreht, so wandert der Momentanpol sowohl auf der bewegten wie auch auf der ruhenden Polkurve um dieselbe unendlich kleine Strecke. Die entsprechenden Bogenelemente beider Kurven sind also einander gleich. Hieraus folgt, daß sich die beiden Polkurven in jedem Augenblick im Momentanpol berühren, und daß während der Bewegung der Ebene E die bewegte Polkurve auf der ruhenden Polkurve abrollt, ohne dabei zu gleiten. Wir finden also: Jede ebene Bewegung kann man durch das gleitfreie Abrollen zweier Polkurven aufeinander ersetzt denken. Wir können daher bei der ebenen Bewegung auch von zwei willkürlich gewählten Kurven, die wir als Polkurven verwenden, ausgehen.

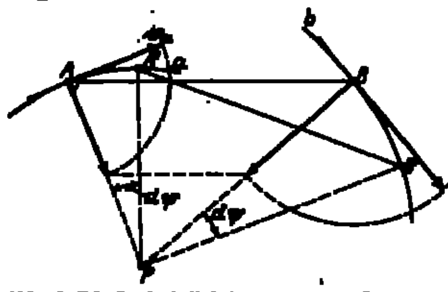


Abb. 28. Die Geschwindigkeit bei der ebenen Bewegung.

Kehrt man die Bewegung um, indem man die ruhende Polkurve als bewegte und die bewegte als ruhende benutzt, so erhält man die sog. umgekehrte Bewegung. Diese ist von der ursprünglichen Bewegung völlig verschieden, wie schon das einfache Beispiel von Kreis und Gerade erkennen läßt. Wenn der Kreis auf der Geraden rollt, beschreiben alle Punkte der bewegten Ebene Zykloiden, wenn dagegen umgekehrt die Gerade auf dem Kreise abrollt, sind die Bahnkurven aller Punkte der bewegten Ebene Kreisevolventen.

Da die Bahnnormalen aller Punkte der bewegten Ebene durch den Momentanpol gehen, so stehen die Bahntangenten und daher auch die Geschwindigkeiten aller Punkte senkrecht auf den entsprechenden Verbindungslinien mit dem Momentanpol. Da der Drehwinkel $d\varphi$ der Ebene für alle Punkte die gleiche Größe hat, so haben die Punkte A und B die Bahnelemente (Abb. 28)

$$ds_a = PA \cdot d\varphi, \qquad ds_b = PB \cdot d\varphi.$$

Demnach sind die Geschwindigkeiten der Punkte A und B

$$v_a = \frac{ds_a}{dt} = PA \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \qquad v_b = \frac{ds_b}{dt} = PB \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Hieraus folgt: Die Geschwindigkeiten aller Punkte der bewegten Ebene sind den Entfernungen vom Momentanpol proportional. Den Proportionalitäts-

faktor $d\varphi/dt = \omega$ nennt man die **Winkelgeschwindigkeit** (**Drehschnelle**) der Ebene. Sie hat die Dimension

$$\dim(\omega) = \dim\left(\frac{v}{r}\right) = t_T^{-1}$$

und wird in der Regel in $\sec^{-1}$ gemessen.

Dreht man die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte A und B im gleichen Sinne um 90°, so folgt ferner, daß die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeitsvektoren, der sog. orthogonalen Geschwindigkeiten, auf einer Geraden liegen, die der Verbindungslinie AB parallel ist. Diese Beziehung ermöglicht es, die Geschwindigkeit aller Punkte der Ebene zu ermitteln, wenn man die Geschwindigkeiten **zweier** Punkte kennt. Zeichnet man die beiden orthogonalen Geschwindigkeiten, etwa der Punkte A und B, so schneiden sie sich im Momentanpol P, außerdem müssen die Endpunkte V_a und V_b der orthogonalen Geschwindigkeiten auf einer Parallelen zu AB liegen. Soll dann die Geschwindigkeit eines beliebigen dritten Punktes C der bewegten Ebene ermittelt werden, so zieht man durch V_a zu AC und durch V_b zu BC die Parallelen (Abb. 29), die sich im Endpunkte V_c der orthogonalen Geschwindigkeit des Punktes C schneiden. Man erkennt, daß das Dreieck $V_aV_bV_c$ zum Dreieck ABC ähnlich und ähnlich gelegen ist.

Abb. 29. Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen den Geschwindigkeiten und den Punkten der bewegten Ebene.

Betrachtet man die Geschwindigkeiten aller Punkte einer Geraden g, die durch den Momentanpol P geht, so liegen die Endpunkte Y_1, Y_2, ... (Abb. 30) der **nicht** um 90° gedrehten, sondern in der ursprünglichen Lage befindlichen Geschwindigkeitsvektoren ebenfalls auf einer durch P gehenden Geraden. Wenn dagegen die Gerade g nicht durch P geht (Abb. 31), sondern eine allgemeine Lage hat, so benutzt man wieder die orthogonalen Geschwindigkeiten, deren Vektorendpunkte V_1, V_2, V_3, ..., dann auf einer Geraden liegen, die der Geraden g parallel ist.

Abb. 30. Geschwindigkeitszustand einer Geraden durch den Momentanpol.

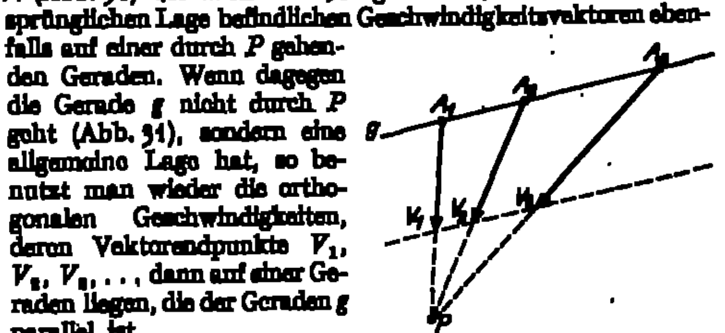


Abb. 31. Geschwindigkeitszustand einer beliebigen Geraden.

11. Die Krümmung der Bahnkurven.

Wir hatten bei der Bewegung des Punktes gesehen, daß bei der Ermittlung der Beschleunigung der Krümmungsradius ϱ gebraucht wird, da die Normalbeschleunigung eines bewegten Punktes $w_n = v^2/\varrho$ ist. Um den Beschleunigungszustand einer bewegten Ebene untersuchen zu können, ist es daher notwendig, zunächst die Krümmung der Bahnkurven der Punkte der bewegten Ebene zu behandeln.

In Abb. 32 ist p die ruhende Polkurve und A ein Punkt der bewegten Ebene E, der sich auf seiner Bahn a bewegt, die an der Stelle A den Krümmungsmittelpunkt K besitzt. Die Gerade AK schneidet die ruhende Polkurve p im Momentanpol P. Betrachtet man die zu A benachbarte Lage A', in die A nach der unendlich kleinen Zeit dt gelangt, so geht die Bahnnormale zu A' ebenfalls durch K;

und die Gerade $A'K$ schneidet die ruhende Polkurve p in dem neuen Momentanpole P'. Das Element PP' der ruhenden Polkurve soll mit $d\sigma$, das Bahnelement AA' des Punktes A mit ds bezeichnet werden. Die Gerade AK soll ferner mit der Polkurvennormalen n den Winkel α einschließen, und es sei $\sphericalangle AKA' = d\tau$, $\sphericalangle APA' = d\varphi$. Schlägt man um K mit KP den Kreis, der $A'K$ in B schneiden möge, so ist $BP = PP' \cos\alpha$ und daher

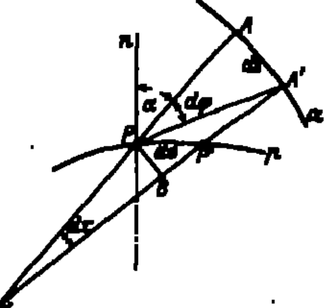


Abb. 32. Die Krümmung der Bahnkurven.

$$\frac{PB}{AA'} = \frac{d\sigma\cos\alpha}{ds} = \frac{KP}{KA} = \frac{c}{a+c},$$

wobei also $PA = a$ und $PK = c$ gesetzt wird. Da $d\varphi$ der unendlich kleine Drehwinkel der bewegten Ebene E ist, so gilt $ds = a\,d\varphi$ und daher

$$\frac{d\sigma}{d\varphi}\,\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{c}{a+c}$$

oder

$$\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)\cos\alpha = \frac{d\varphi}{d\sigma}.$$

In Abb. 32 liegen die beiden zusammengehörigen Punkte A und K auf verschiedenen Seiten von P, so daß $\varrho = a + c$ ist. Wenn dagegen A und K auf derselben Seite von P gelegen sind, so wird $\varrho = a - c$, so daß wir, um beide Möglichkeiten mit einer Gleichung zu erfassen, zu schreiben haben

$$\left(\frac{1}{c} \pm \frac{1}{a}\right)\cos\alpha = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{1}{d}. \tag{1}$$

In dieser Gleichung sind die Größen auf der linken Seite von der Lage des Punktes A abhängig, während der Ausdruck $d\varphi/d\sigma = 1/d$ auf der rechten Seite für alle Punkte der bewegten Ebene E denselben Wert hat. Für den betrachteten Augenblick ist also die Strecke d als konstant für die ganze Ebene zu betrachten; sie wird aber im nächsten Augenblick einen anderen Wert annehmen und daher eine Funktion der Zeit sein. Wir wollen jetzt weiterhin die augenblickliche Lage der bewegten Ebene E betrachten. Dann sind die Größen a und α die Polarkoordinaten des Punktes A und c, α diejenigen des Punktes K in der bewegten Ebene E. Wenn wir jetzt alle Punkte A herausgreifen, für welche $\cos\alpha/a$ eine Konstante ist, so entsprechen diesen Punkten A Krümmungsmittelpunkte K, für die $\cos\alpha/c$ einen konstanten Wert besitzt. Da $a/\cos\alpha$ = konst. und $c/\cos\alpha$ = konst. die Polargleichungen von Kreisen sind, welche die Polkurven im Momentanpol berühren, so finden wir, daß die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen aller Punkte, die auf einem Kreise liegen, der die Polkurven im Momentanpol berührt, ebenfalls auf einem Kreise gelegen sind, der die Polkurven im Momentanpol berührt.

Ein besonderes Interesse beansprucht der Fall, daß der Krümmungsmittelpunkt unendlich fern liegt, oder daß der Krümmungsradius ϱ unendlich groß ist. Hier haben wir $PK = c = \infty$ zu setzen und erhalten dann aus (1)

$$\frac{a}{\cos\alpha} = d \tag{2}$$

als Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte A, deren Bahnen im Augenblick einen unendlich großen Krümmungsradius besitzen oder, mit anderen Worten, die im Augenblick einen Wendepunkt ihrer Bahn durchlaufen. Die Gleichung (2) ist die Gleichung eines Kreises, der die Polkurven im Momentanpol berührt und den Durchmesser d besitzt. Diesen Kreis nennt man den

Wendekreis. Als dem Wendekreis zugeordneter geometrischer Ort der Krümmungsmittelpunkte ist die unendlich ferne Gerade der Ebene anzusehen. Damit hat die oben definierte Strecke $d = d\sigma/d\varphi$ eine bestimmte geometrische Bedeutung erlangt. Wenn wir einen beliebigen Punkt W des Wendekreises W betrachten (Abb. 33), so finden wir, daß seine Bahntangente, die eine Wendetangente ist, durch den Endpunkt W_0 des durch den Momentanpol P gehenden Wendekreisdurchmessers geht. Wir sehen also, daß sich alle Wendetangenten der bewegten Ebene im betrachteten Augenblick in dem gleichen Punkte W_0 schneiden, den man den Wendepol nennt.

Durch einen beliebigen Punkt A der bewegten Ebene E ziehen wir den Polstrahl, der den Wendekreis im Punkt W schneiden möge und auf dem der Krümmungsmittelpunkt K der Bahn des Punktes A bekannt sei. Es sei $PW = w$ und ferner wieder $PA = a$, $PK = \varrho$. Dann ist $w = d\cos\alpha$ und daher nach (1)

$$\frac{1}{\varrho} \pm \frac{1}{a} = \frac{1}{w}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{a \pm \varrho}{\varrho} = \frac{a}{w}. \qquad (3)$$

Abb. 33. Der Wendekreis.

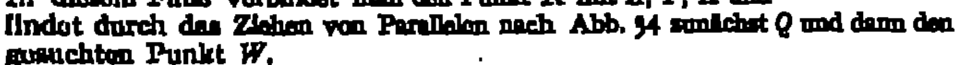
Diese Beziehung ermöglicht eine von GRÜBLER angegebene sehr einfache geometrische Konstruktion, durch welche man den Krümmungsmittelpunkt K findet, wenn die drei Punkte A, W, P gegeben sind. Man zieht durch einen beliebigen Punkt Q (Abb. 34) die Verbindungslinien mit A, W, P, dann durch P zu WQ die Parallele, die AQ in R schneidet, und schließlich durch R zu PQ die Parallele, die AP im gesuchten Krümmungsmittelpunkt K trifft.
Aus Abb. 34 folgt nämlich

$$\frac{AK}{PK} = \frac{AR}{QR} = \frac{AP}{WP}$$

oder, da $AK = a \pm \varrho$, $PK = \varrho$, $AP = a$, $WP = w$ ist,

$$\frac{a \pm \varrho}{\varrho} = \frac{a}{w},$$

wodurch die Richtigkeit der angegebenen Konstruktion erwiesen ist. Die entsprechende Konstruktion ergibt sich nach (3) und nach Abb. 34, wenn die Punkte A, P, K gegeben sind und der Punkt W gesucht wird, d. h. derjenige Punkt der Geraden AP, der augenblicklich einen Wendepunkt seiner Bahn beschreibt. In diesem Falle verbindet man den Punkt R mit A, P, K und



findet durch das Ziehen von Parallelen nach Abb. 34 zunächst Q und dann den gesuchten Punkt W.

Abb. 34. Beziehung zwischen Momentan-, Krümmungsmittelpunkt und Wendepunkt.

Als Beispiel soll das Gelenkviereck $K_1A_1A_2K_2$ betrachtet werden, bei dem die Punkte A_1 und A_2 auf Kreisen um die ruhenden Punkte K_1 und K_2 geführt werden, die daher die Krümmungsmittelpunkte zu A_1 und A_2 sind (Abb. 35). Den Momentanpol P der bewegten Strecke A_1A_2 erhalten wir hier als Schnittpunkt der beiden Bahnnormalen A_1K_1 und A_2K_2. Wir wählen den Schnittpunkt der Geraden A_1A_2 und K_1K_2 als beliebigen Punkt R, ziehen durch P zu RK_1K_2 die Parallele, die A_1A_2 in Q schneidet, und durch Q zu RP die Parallele, die A_1K_1 in W_1 und A_2K_2 in W_2 schneidet. Dann sind W_1 und W_2 diejenigen Punkte des Wendekreises, die auf den Geraden A_1P bzw. A_2P liegen. Da der Wendekreis auch durch den Momentanpol P geht, so finden wir ihn hier als

den Kreis durch die drei Punkte P, W_1, W_2. Damit ist auch die Polkurventangente und der Wendepol W_0 bestimmt, da die Polkurven den Wendekreis im Momentanpol berühren und der durch P gehende Durchmesser des Wendekreises diesen im Wendepol W_0 schneidet.

Wir werden später sehen, daß es für die Untersuchung des Beschleunigungszustandes der bewegten Ebene wichtig ist, den Wendekreis, den Wendepol und die Polkurventangente zu kennen. Die angegebene Konstruktion gilt natürlich nicht nur für das Gelenkviereck, sondern allgemein, wenn A_1 und A_2 zwei beliebige Punkte der bewegten Ebene und K_1 und K_2 die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte sind.

Aus Abb. 35 folgt, wenn man den Winkel, den die Polkurventangente mit der Geraden PW_0 einschließt, mit φ bezeichnet, daß $\sphericalangle PW_0W_2 = \sphericalangle PW_1W_2 = \varphi$

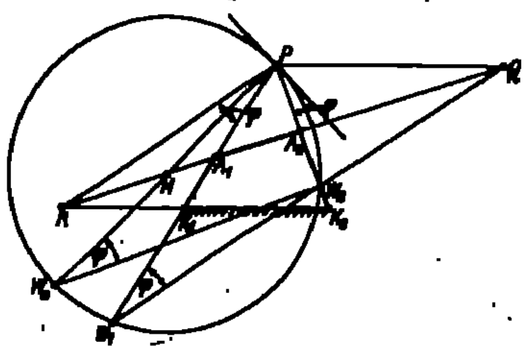


Abb. 35. Konstruktion des Wendekreises beim Gelenkviereck.

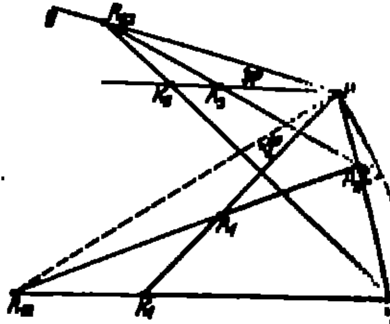


Abb. 36. Konstruktion von Krümmungsmittelpunkten.

ist. Da ferner W_1W_2 und PR einander parallel sind, so ist auch $\sphericalangle RPW_1 = \sphericalangle PW_1W_2 = \varphi$. Diese Beziehung liefert eine Konstruktion der Polkurventangente ohne Kenntnis des Wendekreises und der Punkte W_1 und W_2. Trägt man nämlich den Winkel RPA_1 in P an A_2P an, und zwar in dem aus Abb. 35 ersichtlichen Sinne, so ist der freie Schenkel dieses Winkels die Polkurventangente.

Die oben abgeleitete Winkelbeziehung, die als Satz von BOBILLIER bekannt ist, führt zu der Aronholdschen Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes, eine Konstruktion, durch welche zu jedem beliebigen Punkte A_2 der bewegten Ebene E der Krümmungsmittelpunkt K_2 gefunden wird, wenn zwei Punkte A_1 und A_2 mit ihren Krümmungsmittelpunkten K_1 und K_2 gegeben sind. Wir erhalten hier wieder (Abb. 36) als Schnittpunkt der Geraden A_1K_1 und A_2K_2 den Momentanpol P und als Schnittpunkt von A_1A_2 und K_1K_2 den Punkt R_{12}. An PA_2 tragen wir in P den Winkel φ im Sinne A_1PR_{12} an und erhalten eine Gerade g, die von der Verbindungslinie A_2A_3 in einem Punkte R_{23} geschnitten wird. Die Gerade K_2R_{23} schneidet dann die Gerade PA_3 im gesuchten Krümmungsmittelpunkt K_3. Man kann natürlich auch so vorgehen, daß man an PA_3 den Winkel A_2PR_{12} anträgt und dadurch eine Gerade g' erhält, die von A_1A_3 in R_{13} geschnitten wird. Dann schneidet die Verbindungslinie $R_{13}K_1$ die Gerade PA_3 ebenfalls in K_3.

Wir hatten gesehen, daß der Wendekreisdurchmesser $d = d\sigma/d\varphi$ ist, wobei $d\sigma$ das Bogenelement der Polkurve und $d\varphi$ der unendlich kleine Drehwinkel der Ebene ist. Ferner haben wir $d\varphi/dt = \omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Ebene genannt. Die Größe $d\sigma/dt$ bedeutet offenbar die Geschwindigkeit, mit der der Momentanpol auf der Polkurve wandert. Diese Geschwindigkeit $u = d\sigma/dt$

nennt man die **Polwechselgeschwindigkeit** der Ebene. Sie ist, worauf besonders zu achten ist, nicht die Geschwindigkeit desjenigen Punktes der bewegten Ebene, der augenblicklich der Momentanpol ist, denn dieser Punkt hat ja die Geschwindigkeit Null. Wir finden also

$$d = \frac{u}{\omega} \qquad \text{und daher} \qquad u = d \cdot \omega .$$

Die Polwechselgeschwindigkeit ist also gleich dem Produkt aus Wendekreisdurchmesser und Winkelgeschwindigkeit der Ebene.

12. Der Beschleunigungszustand der bewegten Ebene. Der Momentanpol P und der Wendekreis w seien gegeben (Abb. 37), dann kennt man auch die Polkurventangente und den Wendepol W_0. Ein beliebiger Punkt A der bewegten Ebene E möge die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ besitzen. Diese Beschleunigung zerlegen wir in zwei Komponenten, und zwar die eine in Richtung AP und die andere dazu senkrecht. Die erste ist die Normalbeschleunigung $\mathfrak{w}_n$ und die zweite die Tangentialbeschleunigung $\mathfrak{w}_t$, und es ist, wie wir bei der Untersuchung der Bewegung des Punktes gesehen haben, $w_n = v^2/\varrho$ und $w_t = dv/dt$, wobei $\varrho = AK$ der Krümmungsradius der Bahn des Punktes A ist. Die Normalbeschleunigung können wir schreiben

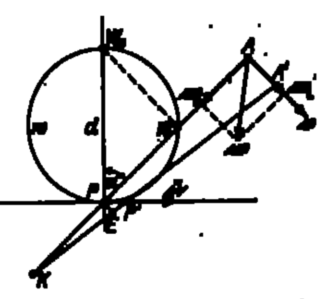


Abb. 37. Beschleunigung und Wendekreis.

$$w_n = \frac{AP^2}{\varrho}\omega^2 = \frac{s^2}{\varrho}\omega^2 = \frac{s^2}{s+e}\omega^2 ,$$

wobei wieder $AP = s$ und $PK = e$ gesetzt ist. Nun ist nach Ziff. 11, Gleichung (3)

$$PW = w = \frac{se}{s+e}$$

und daher

$$AW = s - w = \frac{s^2}{s+e},$$

so daß wir erhalten

$$w_n = AW \cdot \omega^2 .$$

Da aber ferner

$$AW = AP - WP = s - d\cos\alpha$$

ist, so folgt auch

$$w_n = s\omega^2 - d\omega^2\cos\alpha = s\omega^2 - u\omega\cos\alpha . \tag{1}$$

Die Tangentialbeschleunigung läßt sich schreiben

$$w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(s\omega)}{dt} = s\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{ds}{dt} .$$

Wandert der Punkt A nach der benachbarten Lage A', so schneidet $A'K$ die Polkurve im neuen Momentanpol P' (Abb. 37). Während der Polkurvenbogen um die Länge $PP' = d\sigma$ zunimmt, nimmt die Strecke $AP = s$ um die Größe $P'E = ds$ ab. Wir erhalten aus dem kleinen Dreieck $PP'E$ $ds = -d\sigma \sin\alpha$ und daher

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{d\sigma}{dt}\sin\alpha .$$

Hierin ist $d\sigma/dt = u$ die Polwechselgeschwindigkeit. Wegen der Beziehung $u = d\sigma/dt = \omega d$ folgt

$$\frac{ds}{dt} = -d \cdot \omega \sin\alpha$$

und daher

$$w_t = s\frac{d\omega}{dt} - d \cdot \omega^2 \sin\alpha = s\varepsilon - u\omega\sin\alpha , \tag{2}$$

wobei man $\varepsilon = d\omega/dt$ die **Winkelbeschleunigung** der Ebene nennt. Die Winkelbeschleunigung hat die Dimension

$$\dim(\varepsilon) = \dim\left(\frac{\omega}{t}\right) = t^{-2}$$

und wird meist in $\sec^{-2}$ gemessen.

Aus den Gleichungen (1) und (2) erkennt man, daß die Gesamtbeschleunigung $\mathfrak{w}$ des Punktes A sich als Vektorsumme in der Form schreiben läßt

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_2 + \mathfrak{w}_3,$$

wobei die Komponente $w_1 = a\omega^2$ nach dem Momentanpol hin gerichtet ist, die zweite Komponente $w_2 = a\varepsilon$ auf AP senkrecht steht und die dritte $w_3 = u\omega = d\cdot\omega^2$ dem Wendekreisdurchmesser PW_0 parallel ist und die Richtung PW_0 besitzt (Abb. 38). Setzt man die beiden Komponenten $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_3$ zusammen, so findet man, daß ihre Resultierende die Größe $AW_0\cdot\omega^2$ besitzt und durch W_0 geht, da die Größen der beiden Komponenten $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_3$ den entsprechenden Seiten des Dreiecks APW_0 proportional sind. Wir können also die Beschleunigung des Punktes A auch durch zwei Komponenten ersetzen, von denen die eine die

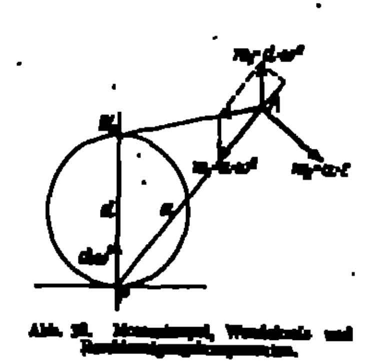


Abb. 38. Momentanpol, Wendekreis und Beschleunigungskomponenten.

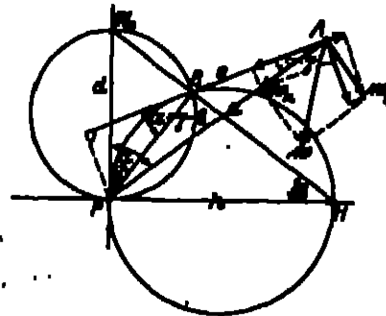


Abb. 39. Der Beschleunigungspol.

Größe $a\varepsilon$ besitzt und in der Bahntangente liegt, während die zweite nach dem Wendepol W_0 gerichtet ist und die Größe $AW_0\cdot\omega^2$ hat. Die Beschleunigungskomponente $w_3 = d\cdot\omega^2$, die man die **Polbeschleunigung** nennt, ist für alle Punkte der Ebene dieselbe. Sie ist zugleich die Beschleunigung desjenigen Punktes der bewegten Ebene, der mit dem Momentanpol zusammenfällt und daher augenblicklich in Ruhe ist. Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_1 + \mathfrak{w}_3 = AW_0\cdot\omega^2$ nennt man die **Wendebeschleunigung**.

Der Wendekreis war als geometrischer Ort aller Punkte gefunden worden, die momentan Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen, also unendlich großen Krümmungsradius ϱ besitzen. Da die Normalbeschleunigung die Größe $w_n = v^2/\varrho$ hat, so finden wir, daß der Wendekreis auch der geometrische Ort aller Punkte ist, deren Normalbeschleunigung augenblicklich Null ist. Es liegt nahe, auch nach denjenigen Punkten zu suchen, die keine Tangentialbeschleunigung besitzen, deren Geschwindigkeit sich also augenblicklich nicht ändert. Setzen wir in Gleichung (2) $w_t = 0$, so folgt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = d\cdot\frac{\omega^2}{\varepsilon} = h. \tag{3}$$

Diese Gleichung stellt in den Polarkoordinaten a und α den geometrischen Ort aller Punkte dar, deren Tangentialbeschleunigung augenblicklich Null ist. Da die Größen d, ω, ε für alle Punkte der bewegten Ebene denselben Wert haben, so ist die Gleichung (3) die Gleichung eines Kreises (Abb. 39), der den Durch-

messer $h = d \cdot \omega^2/\varepsilon$ besitzt und der den Wendekreis im Momentanpol orthogonal schneidet. Die Verbindungslinie des zweiten Schnittpunktes B beider Kreise mit dem Wendepol W_0 schneidet den zweiten Kreis auf der Polkurventangente in einem Punkte H. Den Kreis, auf dem alle Punkte liegen, die keine Tangentialbeschleunigung besitzen, nennt man den **Wechselkreis**. Der Schnittpunkt B von Wendekreis und Wechselkreis hat weder eine Normal- noch eine Tangentialbeschleunigung. Er ist daher derjenige Punkt der Ebene, dessen Gesamtbeschleunigung augenblicklich Null ist. Man nennt ihn den **Beschleunigungspol** der Ebene. Der andere Schnittpunkt beider Kreise, nämlich der Momentanpol P, hat dagegen nicht die Beschleunigung Null, was darin begründet ist, daß der augenblicklich mit P zusammenfallende Punkt der bewegten Ebene eine Spitze, also einen singulären Punkt, seiner Bahn durchläuft. Aus Abb. 39 folgt

$$\sphericalangle W_0PB = \sphericalangle W_0HP = \beta,$$

wobei

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{d}{h} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

ist. Wenn man den Wendekreis ermittelt hat und auch die Winkelbeschleunigung ε kennt, so kann man den Wechselkreis ermitteln, indem man durch den Wendepol W_0 unter dem Winkel β gegen die Polkurventangente eine Gerade zieht, die die Polkurventangente in H schneidet. PH ist dann der Durchmesser des Wechselkreises.

Der Beschleunigungspol hat eine große Bedeutung für die Ermittlung des Beschleunigungszustandes der bewegten Ebene. Wir wollen die Beschleunigung eines beliebigen Punktes A in zwei Komponenten zerlegen, und zwar in Richtung von AB und dazu senkrecht, und verfahren dabei so, daß wir die Tangential- und die Normalbeschleunigung nach diesen beiden Richtungen zerlegen und die entsprechenden Komponenten addieren. Wir hatten für die Tangential- und die Normalbeschleunigung gefunden

$$w_t = a\varepsilon - d\cdot\omega^2\sin\alpha, \qquad w_n = a\omega^2 - d\cdot\omega^2\cos\alpha.$$

Mit den Bezeichnungen der Abb. 39 erhalten wir für die Beschleunigungskomponente in Richtung von AB

$$w' = w_n\cos\gamma - w_t\sin\gamma = a(\omega^2\cos\gamma - \varepsilon\sin\gamma) - d\cdot\omega^2\cos(\alpha+\gamma)$$

und für die dazu senkrechte Komponente

$$w'' = w_n\sin\gamma + w_t\cos\gamma = a(\omega^2\sin\gamma + \varepsilon\cos\gamma) - d\cdot\omega^2\sin(\alpha+\gamma).$$

Unter Benutzung der aus der Abb. 39 sich ergebenden geometrischen Beziehung

$$a\sin\gamma = d\cos\beta\sin(\alpha+\gamma-\beta)$$

und der Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

lassen sich die Ausdrücke für w' und w'' umformen und in die Gestalt

$$w' = \omega^2[a\cos\gamma - d\cdot\cos\beta\cos(\alpha+\gamma-\beta)],$$
$$w'' = \varepsilon[a\cos\gamma - d\cdot\cos\beta\cos(\alpha+\gamma-\beta)]$$

bringen. Nun ist aber

$$BA = s = a\cos\gamma - d\cdot\cos\beta\cos(\alpha+\gamma-\beta)$$

und daher

$$w' = s\omega^2, \qquad w'' = s\varepsilon.$$

Die Gesamtbeschleunigung wird daher

$$\mathfrak{w} = \sqrt{\mathfrak{w}'^2 + \mathfrak{w}''^2} = s\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,.$$

Sie schließt mit AB den Winkel β ein, denn es ist (Abb. 40)

$$\frac{\mathfrak{w}''}{\mathfrak{w}'} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{tg}\beta\,.$$

Wir finden also, daß die Beschleunigung jedes beliebigen Punktes der bewegten Ebene dem Abstande vom Beschleunigungspol proportional ist und mit der Verbindungslinie mit dem Beschleunigungspol den für alle Punkte gemeinsamen Winkel β einschließt. Für denjenigen Punkt der Ebene, der augenblicklich mit dem Momentanpol P zusammenfällt, erhalten wir die Beschleunigung

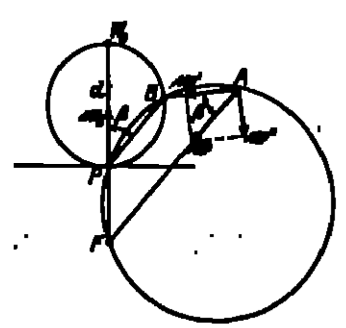


Abb. 40. Richtung der Beschleunigung.

$$\mathfrak{w}_0 = d\cdot\cos\beta\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = d\cdot\frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}}\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2} = d\cdot\omega^2,$$

wie bereits oben gefunden wurde. Da $\sphericalangle BPW_0 = \beta$ ist, so liegt diese Beschleunigung im Wendekreisdurchmesser PW_0.

Die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ des beliebigen Punktes A möge die Polkurvennormale PW_0 in F schneiden. Dann ist das Viereck $ABPF$ ein Kreisviereck, weil die beiden gegenüberliegenden Winkel bei A und bei F sich zu 180° ergänzen (Abb. 40). Diese Eigenschaft ergibt eine Konstruktion des Beschleunigungspoles B, wenn der Momentanpol P, der Wendekreis W, ein Punkt A und dessen Beschleunigungsrichtung gegeben sind. Man bringt diese Beschleunigungsrichtung mit dem durch P gelegten Wendekreisdurchmesser in F zum Schnitt und legt durch die drei Punkte A, P, F einen Kreis, der den Wendekreis im gesuchten Beschleunigungspole B schneidet.

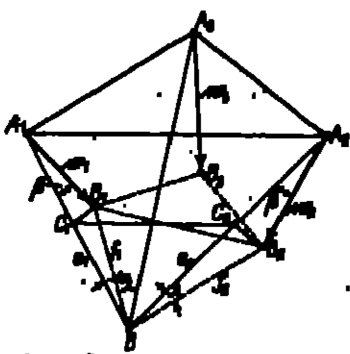


Abb. 41. Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen den Punkten der bewegten Ebene und den entsprechenden Endpunkten der Beschleunigungsvektoren.

Gegeben seien zwei Punkte A_1 und A_2 mit ihren Beschleunigungen $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ sowie dem Beschleunigungspol B (Abb. 41). Dreht man die Beschleunigungsvektoren A_1B_1 und A_2B_2 um A_1 bzw. A_2, und zwar um den Drehwinkel β, so gelangen die Punkte B_1 und B_2 nach den Punkten C_1 bzw. C_2, die auf A_1B bzw. A_2B liegen. Da $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ den Abständen $A_1B = s_1$ bzw. $A_2B = s_2$ proportional sind, so ist die Verbindungslinie C_1C_2 der Geraden A_1A_2 parallel. Da

$$\frac{\mathfrak{w}_1}{s_1} = \frac{\mathfrak{w}_2}{s_2}$$

ist und ferner die beiden Dreiecke A_1B_1B und A_2B_2B den Winkel β gemeinsam haben, so sind sie einander ähnlich. Aus dieser Ähnlichkeit folgt, wenn man $B_1B = f_1$ und $B_2B = f_2$ setzt,

$$\frac{f_1}{s_1} = \frac{f_2}{s_2} \qquad \text{und daher} \qquad \frac{f_1}{f_2} = \frac{s_1}{s_2}.$$

Da $\sphericalangle B_1BA_1 = \sphericalangle B_2BA_2 = \lambda$ ist, so ist auch $\sphericalangle A_2BA_1 = \sphericalangle B_2BB_1$. Infolgedessen sind auch die Dreiecke A_1A_2B und B_1B_2B einander ähnlich, woraus

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{s_1}{f_1} = \frac{s_2}{f_2}$$

folgt. Nehmen wir noch einen dritten Punkt A_3 mit seiner Beschleunigung A_3B_3 hinzu, so erhalten wir mit den entsprechenden Bezeichnungen auf dieselbe Weise

$$\frac{A_1A_3}{B_1B_3} = \frac{e_1}{f_1} = \frac{e_3}{f_3}, \qquad \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{e_2}{f_2} = \frac{e_3}{f_3}.$$

Wir erhalten das von BURMESTER gefundene Ergebnis, daß die beiden Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ gleiche Seitenverhältnisse haben und daher einander ähnlich sind. Diese Eigenschaft führt zur Konstruktion der Beschleunigung eines Punktes A_3, wenn zwei Punkte A_1 und A_2 mit ihren Beschleunigungen A_1B_1 bzw. A_2B_2 gegeben sind. Man findet dann den gesuchten Endpunkt B_3 des Beschleunigungsvektors A_3B_3 als dritten Endpunkt eines Dreieckes $B_1B_2B_3$, das dem entsprechenden Dreiecke $A_1A_2A_3$ ähnlich ist.

13. Analytische Behandlung der ebenen Bewegung. Die analytische Behandlung der ebenen Bewegung ist für verschiedene Untersuchungen sehr fruchtbar gewesen, so daß an dieser Stelle ihre Hauptgedanken angegeben werden sollen. Wir wählen (Abb. 42) in der ruhenden Ebene R ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y mit dem Ursprung O und in der bewegten Ebene E ebenfalls ein rechtwinkliges Koordinatensystem ξ, η mit dem Ursprung Ω. Die Lage der bewegten Ebene E ist dann bestimmt, wenn wir die Koordinaten a, b des Punktes Ω und den Winkel ϑ kennen, den die ξ-Achse mit der x-Achse einschließt. Die Bewegung der Ebene ist offenbar völlig bestimmt, wenn die drei Größen a, b, ϑ als eindeutige und stetige Funktionen der Zeit t vorgelegt sind.

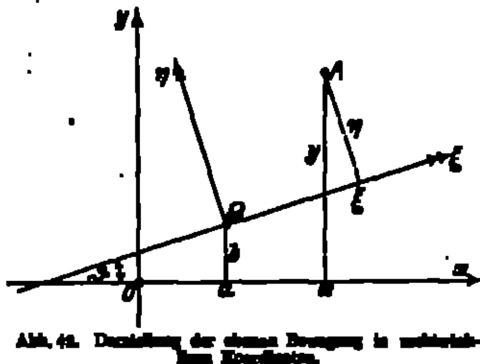


Abb. 42. Darstellung der ebenen Bewegung in rechtwinkligen Koordinaten.

In der bewegten Ebene sei ein beliebiger Punkt A durch seine Koordinaten ξ, η gegeben. Dann folgte aus den Beziehungen für die Koordinatentransformation

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta, \\ y &= b + \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Diese beiden Gleichungen nennt man die **Bewegungsgleichungen** der Ebene. Kennt man a, b, ϑ als eindeutige und stetige Funktionen der Zeit und eliminiert man aus den beiden Gleichungen (1) die Zeit, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, und zwar die Gleichung der Bahnkurve. Wir differentiieren die Gleichungen (1) nach ϑ und erhalten

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\vartheta} &= \frac{da}{d\vartheta} - \xi\sin\vartheta - \eta\cos\vartheta, \\ \frac{dy}{d\vartheta} &= \frac{db}{d\vartheta} + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus erhalten wir die Geschwindigkeitskomponenten

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \omega\left(\frac{da}{d\vartheta} - \xi\sin\vartheta - \eta\cos\vartheta\right), \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \omega\left(\frac{db}{d\vartheta} + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta\right). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Um den Momentanpol P zu finden, setzen wir $v_x = 0$, $v_y = 0$ und erhalten, da im allgemeinen ω immer von 0 verschieden ist,

$$\frac{da}{d\vartheta} - \xi\sin\vartheta - \eta\cos\vartheta = 0\,,$$

$$\frac{db}{d\vartheta} + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta = 0\,.$$

Hieraus ergeben sich die Koordinaten ξ_p, η_p des Momentanpoles in der bewegten Ebene zu

$$\left.\begin{aligned} \xi_p &= \frac{da}{d\vartheta}\sin\vartheta - \frac{db}{d\vartheta}\cos\vartheta\,,\\ \eta_p &= \frac{da}{d\vartheta}\cos\vartheta + \frac{db}{d\vartheta}\sin\vartheta\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Koordinaten x_p, y_p des Momentanpoles in der ruhenden Ebene erhalten wir, indem wir in den Bewegungsgleichungen (1) die Werte $\xi = \xi_p$ und $\eta = \eta_p$ einsetzen. Wir finden

$$\left.\begin{aligned} x_p &= a - \frac{db}{d\vartheta}\,,\\ y_p &= b + \frac{da}{d\vartheta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Da a, b und ϑ Funktionen der Zeit t sind, so stellen die Gleichungen (4) die bewegte Polkurve und die Gleichungen (5) die ruhende Polkurve in Parameterform mit dem Parameter t dar.

Den Wendekreis erhalten wir, indem wir $d^2y/dx^2 = 0$ setzen. Aus $d^2y/dx^2 = 0$ folgt

$$\frac{dx}{d\vartheta}\frac{d^2y}{d\vartheta^2} - \frac{dy}{d\vartheta}\frac{d^2x}{d\vartheta^2} = 0\,.$$

Setzen wir hierin für die einzelnen Differentialquotienten ihre Werte ein, so erhalten wir die Gleichung des Wendekreises. Er hat den Durchmesser

$$d = \sqrt{\left(\frac{da}{d\vartheta} - \frac{d^2b}{d\vartheta^2}\right)^2 + \left(\frac{db}{d\vartheta} + \frac{d^2a}{d\vartheta^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx_p}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy_p}{d\vartheta}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d\xi_p}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_p}{d\vartheta}\right)^2} = \frac{d\sigma}{d\vartheta}\,,$$

wobei $d\sigma$ das Bogenelement der Polkurven ist. Als Wechselgeschwindigkeit des Poles finden wir nun

$$u = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = d\cdot\omega\,.$$

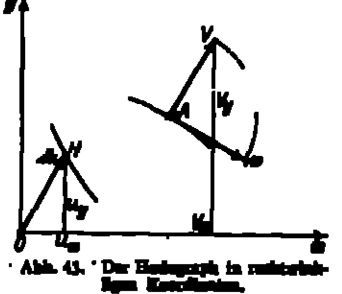
Wenn wir die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y [Gleichungen (3)] nach der Zeit differentiieren, so erhalten wir die entsprechenden Beschleunigungskomponenten

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \omega^2\left(\frac{d^2a}{d\vartheta^2} - \xi\cos\vartheta + \eta\sin\vartheta\right) + \varepsilon\left(\frac{da}{d\vartheta} - \xi\sin\vartheta - \eta\cos\vartheta\right),\\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \omega^2\left(\frac{d^2b}{d\vartheta^2} - \xi\sin\vartheta - \eta\cos\vartheta\right) + \varepsilon\left(\frac{db}{d\vartheta} + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta\right). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wir wollen nun die schon früher behandelten Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne betrachten, und zwar zunächst den Hodographen der um 90° gedrehten Geschwindigkeiten. Die um 90° gedrehte Geschwindigkeit u eines Punktes A hat die Komponenten u_x und u_y (Abb. 43), für die man unter Benutzung von (3) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{dy}{dt} = \frac{db}{dt} + \omega(\xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta)\,,\\ u_y &= -\frac{dx}{dt} = -\frac{da}{dt} + \omega(\xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

erhält. Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Bewegungsgleichungen (1) der ebenen Bewegung, so erkennt man, daß die Hodographenbewegung der Bewegung der starren Ebene E ähnlich ist. Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit ω die Ähnlichkeitsfunktion. Hieraus folgt ferner, daß das Dreieck, das von drei beliebigen Punkten der bewegten Ebene gebildet wird, immer dem Dreieck der entsprechenden Hodographenpunkte ähnlich ist. Beide Dreiecke sind aber auch ähnlich gelegen, weil sowohl bei der Hodographenbewegung, wie auch bei der Bewegung der starren Ebene E der gleiche Drehwinkel ϑ als Bewegungsparameter auftritt.


Abb. 43. Der Hodograph in rechtwinkligen Koordinaten.

Der zweite Geschwindigkeitsplan, dessen Bewegungsgleichungen wir aufstellen wollen, ist der V-Plan, den man erhält, indem man in jeder Lage des betrachteten Punktes A der bewegten Ebene E seine um 90° gedrehte Geschwindigkeit aufträgt. Der Endpunkt V dieses um 90° gedrehten Geschwindigkeitsvektors durchläuft während der Bewegung des Punktes A auf seiner Bahnkurve eine andere Kurve, den V-Plan des Punktes A. Die Koordinaten dieses Punktes V seien V_x, V_y und lassen sich schreiben

$$V_x = x + u_x = a + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta + \frac{db}{dt} + \omega(\xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta),$$

$$V_y = y + u_y = b + \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta - \frac{da}{dt} + \omega(\xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} V_x &= a + \frac{db}{dt} + (1+\omega)(\xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta),\\ V_y &= b - \frac{da}{dt} + (1+\omega)(\xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Wir sehen, wenn wir diese Gleichungen, welche die Bewegung des V-Planes darstellen, mit den Bewegungsgleichungen (1) der Ebene E vergleichen, daß auch diese Bewegung des V-Planes der Bewegung der Ebene E ähnlich ist, und daß zwei entsprechende Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $V_1V_2V_3$ einander ähnlich und ähnlich gelegen sind. Die Ähnlichkeitsfunktion hat hier den Wert $1+\omega$. Wenn ein Punkt V_0 des V-Planes während der Bewegung der Ebene E in Ruhe bleibt, dann nennt man die Bewegung des V-Planes einförmig. Dieser Fall tritt ein, wenn ein entsprechender Punkt A_0 der bewegten Ebene E sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreise bewegt. Wählt man A_0 zum Ursprung des bewegten Koordinatensystems, so daß für ihn $\xi = 0$, $\eta = 0$ zu setzen ist, und wählt man ferner den Maßstab für die Streckendarstellung der Geschwindigkeit so, daß

$$a + \frac{db}{dt} = 0, \qquad b - \frac{da}{dt} = 0$$

ist, dann erhalten wir als Bewegungsgleichungen der einförmigen V-Pläne

$$\left.\begin{aligned} V_x &= (1+\omega)(\xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta),\\ V_y &= (1+\omega)(\xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, daß alle V-Pläne der bewegten Ebene ähnliche und ähnlich gelegene Kurven sind. Der gemeinsame Ähnlichkeitspol ist der zu einem Punkte V_0 entartete V-Plan des gleichförmig auf einem Kreise bewegten Punktes A_0.

Als Beispiel sei das **Schubkurbelgetriebe** herangezogen (Abb. 44). Der Punkt A_0 soll sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 auf einem Kreise vom Radius r bewegen und der Geschwindigkeitsmaßstab sei so gewählt, daß v_0 durch die Strecke r dargestellt wird. Für den geradlinig geführten Punkt A_1

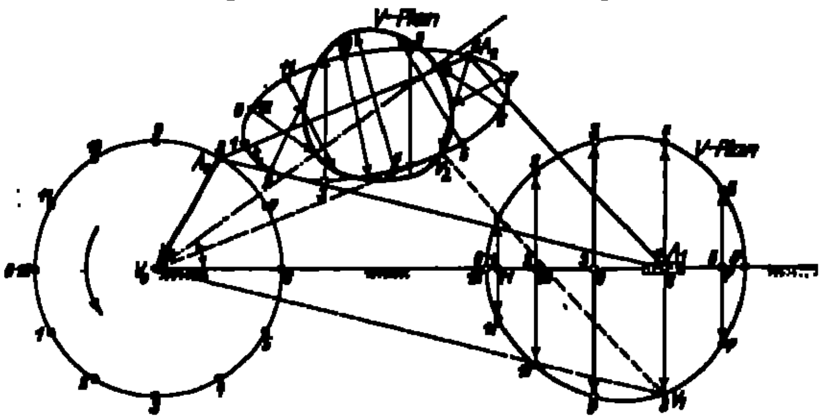


Abb. 44. Der V-Plan beim Schubkurbelgetriebe.

kann man den V-Plan durch das Ziehen von Parallelen sofort ermitteln. Beim zentrischen Schubkurbelgetriebe hat dieser V-Plan eine durch V_0 gehende Symmetrieachse. Wählt man in der Ebene der Pleuelstange A_0A_1 einen beliebigen Punkt A_2, so ist dessen V-Plan demjenigen des Punktes A_1 ähnlich und bezüglich des Punktes V_0 als Ähnlichkeitspol ähnlich gelegen. Er hat daher auch eine durch V_0 gehende Symmetrieachse, die mit V_0A_1 den Winkel $A_1A_0A_2$ einschließt.

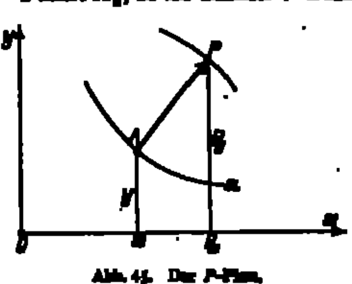


Abb. 45. Der P-Plan.

Schließlich soll noch ein Beschleunigungsplan behandelt werden, und zwar derjenige, der dem V-Plane entspricht und den man den P-Plan nennt. Bewegt sich ein Punkt A auf seiner Bahnkurve und trägt man in jeder Lage des Punktes A seine Beschleunigung nach Größe und Richtung auf, so beschreibt der Endpunkt P des Beschleunigungsvektors eine Kurve, den P-Plan des Punktes A. Unter Benutzung der Gleichungen (6) erhalten wir als Koordinaten des Punktes P (Abb. 45)

$$P_x = x + w_x = a + \frac{d^2 a}{dt^2} + (1-\omega^2)(\xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta) - \varepsilon(\xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta),$$

$$P_y = y + w_y = b + \frac{d^2 b}{dt^2} + (1-\omega^2)(\xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta) + \varepsilon(\xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta),$$

oder

$$P_x = a + \frac{d^2 a}{dt^2} + \xi[(1-\omega^2)\cos\vartheta - \varepsilon\sin\vartheta] - \eta[(1-\omega^2)\sin\vartheta + \varepsilon\cos\vartheta],$$

$$P_y = b + \frac{d^2 b}{dt^2} + \xi[(1-\omega^2)\sin\vartheta + \varepsilon\cos\vartheta] + \eta[(1-\omega^2)\cos\vartheta - \varepsilon\sin\vartheta].$$

Wir führen einen Winkel λ durch die Beziehung $\operatorname{tg}\lambda = \varepsilon(1-\omega^2)$ ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned} P_x &= a + \frac{d^2 a}{dt^2} + \sqrt{(1-\omega^2)^2 + \varepsilon^2}\,[\xi\cos(\vartheta+\lambda) - \eta\sin(\vartheta+\lambda)],\\ P_y &= b + \frac{d^2 b}{dt^2} + \sqrt{(1-\omega^2)^2 + \varepsilon^2}\,[\xi\sin(\vartheta+\lambda) + \eta\cos(\vartheta+\lambda)]. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Hieran erkennt man, daß die Bewegung der *P*-Pläne der Bewegung der starren Ebene ähnlich ist. Das Dreieck, das in einer bestimmten Lage der Ebene E aus den entsprechenden *P*-Planpunkten P_1, $P_2 P_3$ dreier Punkte A_1, A_2, A_3 gebildet wird, ist dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ ähnlich, aber nicht ähnlich gelegen, da die Ebene E sich um den Winkel ϑ dreht, während der entsprechende Drehwinkel des Systems der *P*-Pläne die Größe $\vartheta + \lambda$ besitzt.

IV. Die allgemeine Bewegung starrer Körper.

14. Allgemeine Grundlagen der Bewegungen starrer Körper. Unter einem starren Körper verstehen wir hier ein System geometrischer Punkte, deren gegenseitige Entfernungen während der Bewegung des Körpers sich nicht verändern. Infolgedessen stehen die Bewegungen der einzelnen Punkte des Körpers in einer gewissen Abhängigkeit voneinander, deren Betrachtung die Grundlage für die ganze Behandlung der Bewegung starrer Körper bilden muß.

Jede Lage eines Körpers ist vollständig und eindeutig bestimmt durch die Lage dreier beliebiger seiner Punkte, die nicht in einer Geraden liegen und daher ein Dreieck bilden, das sog. Grunddreieck. Ist nämlich ein solches Grunddreieck ABC eines Körpers gegeben, so ist die Lage jedes beliebigen weiteren Punktes D des Körpers durch seine Entfernungen von den Eckpunkten des Grunddreieckes bestimmt. Wenn man diese drei Entfernungen kennt, so findet man den Punkt D als Schnittpunkt der drei Kugelflächen, die um die Eckpunkte des Grunddreieckes ABC gelegt sind und die Radien AD, BD, CD besitzen. Da sich hierbei zwei Punkte D ergeben, die bezüglich der Ebene des Grunddreieckes symmetrisch zueinander liegen, so ist zu beachten, daß nur derjenige der beiden Punkte D in Betracht kommt, für den das Tetraeder $ABCD$ dem entsprechenden Tetraeder in dem vorgelegten Körper wirklich kongruent und nicht nur symmetrisch ist. Wir finden also, daß dann der Punkt D eindeutig bestimmt ist, und daß sich in der gleichen Weise die Lage jedes beliebigen Punktes eines vorgelegten Körpers eindeutig gegen ein beliebig gegebenes Grunddreieck bestimmen läßt. Hieraus folgt, daß die Bewegung eines starren Körpers durch die Bewegungen dreier seiner Punkte, die nicht in einer Geraden liegen dürfen, vollständig und eindeutig bestimmt ist.

Betrachtet man die Bewegung eines starren Körpers während eines endlichen Zeitraumes, so spricht man von der endlichen Bewegung, wenn man dagegen nur zwei unendlich benachbarte Lagen herausgreift, von der unendlich kleinen Bewegung oder der Elementarbewegung des starren Körpers. Man kann daher jede endliche Bewegung eines starren Körpers aus einer Aufeinanderfolge von Elementarbewegungen zusammengesetzt denken. Wichtig ist der Umstand, daß jede beliebige Elementarbewegung eines starren Körpers sich auf zwei einfache Bewegungen zurückführen läßt, nämlich auf eine Schiebung (Translation) und eine Drehung (Rotation), die man infolgedessen als die Grundbewegungen bezeichnen kann.

Bei einer Elementarschiebung haben die Bahnelemente aller Körperpunkte gleiche Größe und gleiche Richtung. Infolgedessen besitzen bei einer endlichen Schiebung alle Körperpunkte den gleichen Geschwindigkeitsvektor und den gleichen Beschleunigungsvektor, so daß man bei der Schiebung von der Geschwindigkeit bzw. der Beschleunigung des starren Körpers sprechen kann. Ferner beschreiben bei der Schiebung alle Punkte des starren Körpers kongruente gleichliegende Bahnen.

Die Drehung eines starren Körpers ist dadurch gekennzeichnet, daß bei ihr mindestens zwei Punkte des Körpers in Ruhe bleiben. Wählt man diese beiden

Punkte, etwa A und B, als zwei Eckpunkte des Grunddreieckes und einen beliebigen Punkt C als dritten Eckpunkt, so wird offenbar die Bahn des Punktes C die Eigenschaft haben, daß alle ihre Punkte von zwei ruhenden Punkten A und B unveränderlichen Abstand haben. Hieraus folgt, daß sich der beliebige Punkt C auf einem Kreise bewegt, dessen Ebene senkrecht auf der Geraden AB steht, und dessen Mittelpunkt C' auf AB liegt (Abb. 46). Alle Punkte der Geraden AB befinden sich in Ruhe, und man nennt diese Gerade die **Drehachse**. Wir finden also, daß bei der Drehung eines starren Körpers stets eine Drehachse vorhanden ist, d. h. eine Gerade, deren sämtliche Punkte sich in Ruhe befinden, und daß alle übrigen Körperpunkte Kreise beschreiben, deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen und deren Ebenen senkrecht auf der Drehachse stehen.

Abb. 46. Das Grunddreieck bei der Drehung.

Um die Bewegung des beliebigen Körperpunktes C zu untersuchen, legen wir in Abb. 47 seine Kreisbahn in die Zeichenebene, in der daher die Drehachse sich als Punkt D projiziert. In der Anfangslage des Körpers, d. h. zur Zeit t_0, sei der Punkt C in der Lage C_0. Benutzen wir diese Anfangslage als Bezugspunkt für die Bewegung des Punktes C, so ist der von C zurückgelegte Weg

$$s = \widehat{C_0C} = r_c\varphi,$$

wobei r_c der Radius des von C beschriebenen Kreises und φ der Zentriwinkel des zu s gehörigen Kreisbogens ist. Wenn wir wieder die auf der Drehachse liegenden Punkte A und B und den beliebigen Punkt C als Eckpunkt des Grunddreieckes betrachten, so erkennen wir, daß durch den Winkel φ (Abb. 47) die Lage des Körpers vollständig bestimmt ist. Hieraus folgt, daß auch die **Bewegung** des Körpers bestimmt ist, wenn der Winkel φ als Funktion der Zeit gegeben ist. Diesen Winkel φ nennt man den **Drehwinkel** des Körpers. Wir finden somit, daß bei der Drehung eines starren Körpers alle Körperpunkte Kreisbögen von gleichem Zentriwinkel φ beschreiben. Die Geschwindigkeit des beliebigen Körperpunktes C ergibt sich zu

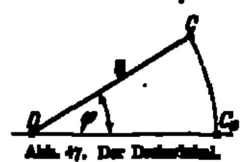


Abb. 47. Der Drehwinkel.

$$v_c = \frac{ds}{dt} = r_c\frac{d\varphi}{dt} = r_c\omega.$$

Die hierdurch definierte Größe $\omega = d\varphi/dt$, die für alle Punkte des Körpers den gleichen Wert hat, nennt man auch hier wieder die **Winkelgeschwindigkeit** (**Drehschnelle**) des Körpers. Es ergibt sich, daß die Geschwindigkeit jedes Körperpunktes dem Abstande von der Drehachse proportional ist. Die Beschleunigung des beliebigen Körperpunktes C sei $\mathfrak{w}$, ihre Komponenten in Richtung der Bahnnormale bzw. Bahntangente seien $\mathfrak{w}_n$ und $\mathfrak{w}_t$. Dann ist

$$\mathfrak{w}_n = \frac{v_c^2}{r} = r_c\omega^2 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{w}_t = \frac{dv_c}{dt} = r_c\frac{d\omega}{dt} = r_c\varepsilon.$$

Die Größe $\varepsilon = d\omega/dt$ nennt man wieder die **Winkelbeschleunigung** des Körpers. Wir sehen, daß sowohl die **Normalbeschleunigung** $\mathfrak{w}_n$ wie auch die **Tangentialbeschleunigung** $\mathfrak{w}_t$ jedes Körperpunktes dem Abstande von der Drehachse proportional sind. Die resultierende Beschleunigung des Punktes C ist nun

$$\mathfrak{w} = \sqrt{\mathfrak{w}_n^2 + \mathfrak{w}_t^2} = r_c\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

sie ist also ebenfalls dem Abstande von der Drehachse proportional. Der Winkel β_c

den die Beschleunigung w mit dem Abstand von der Drehachse einschließt (Abb. 48), ist bestimmt durch die Beziehung

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{w_t}{w_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

er hat also für die sämtlichen Körperpunkte denselben Wert. (Über eine für manche Zwecke wichtige vektorielle Darstellung dieser Ergebnisse vgl. Ziff. 26.)

Bisher war angenommen worden, daß die Drehachse sich in Ruhe befindet. Wenn jedoch während der Bewegung des Körpers die Drehachse im Körper ihre Lage verändert, so können wir nur die Elementarbewegung untersuchen. Die Drehachse heißt dann die **Momentanachse** der Drehung. Wesentlich ist für die Untersuchung der Bewegung, daß die Elementardrehung um eine veränderliche Drehachse mit der unendlich kleinen Drehung um eine ruhende Drehachse übereinstimmt, und zwar während zweier unendlich benachbarter Lagen. Infolgedessen ist auch der Geschwindigkeitszustand hier derselbe wie im Falle der ruhenden Drehachse, so daß wir finden

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad v = \frac{ds}{dt} = r\omega = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Ganz anders verhält es sich dagegen mit dem Beschleunigungszustand bei der Elementardrehung eines Körpers um eine veränderliche Drehachse, da man bei der Untersuchung der Beschleunigung nicht mit der Betrachtung von **zwei** unendlich benachbarten Lagen auskommt, sondern dazu **drei** solcher Lagen braucht. Infolgedessen ist hier die Lagenänderung der Drehachse von Einfluß. Für die Normalbeschleunigung erhalten wir

Abb. 48. Die Beschleunigung bei der Drehbewegung.

$$w_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{r^2\omega^2}{\varrho},$$

wobei der Krümmungsradius ϱ von dem Abstand r des betrachteten Körperpunktes von der Drehachse verschieden ist, da bei veränderlicher Drehachse die Bahnen der Körperpunkte im allgemeinen nicht mehr Kreise sind. Als Tangentialbeschleunigung ergibt sich

$$w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dr}{dt}.$$

Das zweite Glied $\omega dr/dt$ in diesem Ausdruck rührt davon her, daß infolge der Lagenänderung der Drehachse im bewegten Körper die Entfernung r irgendeines Körperpunktes von der Drehachse nicht mehr konstant, sondern veränderlich ist.

15. Die Zusammensetzung von Elementarbewegungen starrer Körper. Bei der Zusammensetzung von Elementarbewegungen handelt es sich um folgende Fragestellung. Ein Körper K_3 vollzieht eine bestimmte Bewegung gegen einen Körper K_2, der seinerseits sich in bestimmter Weise gegen einen Bezugskörper K_1 bewegt. Welcher Art ist dann die Bewegung des Körpers K_3 gegen K_1? Diese gesuchte Bewegung ergibt sich durch **Zusammensetzung** der beiden Bewegungen von K_3 gegen K_2 und von K_2 gegen K_1.

Zunächst soll statt des Körpers K_3 nur ein Punkt A_3 betrachtet werden, der momentan gegen den Körper K_2 die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{32}$ besitzt. Der Körper K_2 vollzieht gegen K_1 eine Bewegung, bei welcher derjenige Punkt A_2 von K_2, der augenblicklich mit A_3 zusammenfällt, sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ bewegen möge (Abb. 49). Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{31}$, mit der sich der Punkt A_3 gegen K_1 als Bezugskörper bewegt, findet man dann durch vektorielle Addition der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{21}$ und $\mathfrak{v}_{32}$ bzw. durch Zusammensetzung mit Hilfe des Parallelogrammes. Dieses Parallelogramm der Geschwindigkeiten er-

gibt ein einfaches Mittel, um aus den Bewegungen von K_3 gegen K_2 und von K_2 gegen K_1 die Bewegung von K_3 gegen K_1 zu finden, indem man die Untersuchung auf die drei Punkte A_3, B_3, C_3 des Körpers K_3 erstreckt; denn, wie wir gesehen haben, ist die Bewegung jedes Körpers durch die Bewegung dreier seiner Punkte, der Eckpunkte des Grunddreieckes, bestimmt.

Wir wollen noch einmal den Punkt A_3 des Körpers K_3 betrachten und ferner die momentan mit ihm zusammenfallenden Punkte A_2 des Körpers K_2 sowie A_1 des Körpers K_1. Die entsprechenden Geschwindigkeiten seien durch die Zeiger gekennzeichnet, in denen die zweite der beiden Ziffern sich auf den Bezugskörper bezieht. So bedeutet z. B. $\mathfrak{v}_{32}$ die Geschwindigkeit des Punktes A_3 gegen den Bezugskörper K_2. Hieraus folgt, daß wir insgesamt die sechs Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{12}$, $\mathfrak{v}_{21}$, $\mathfrak{v}_{13}$, $\mathfrak{v}_{31}$, $\mathfrak{v}_{23}$, $\mathfrak{v}_{32}$ erhalten, von denen jede sich durch Zusammensetzung von zwei anderen ergibt, und deren Vektoren daher ein Sechseck mit parallelen Gegenseiten ergeben (Abb. 50). Man erkennt, daß

$$\mathfrak{v}_{23} + \mathfrak{v}_{32} = 0, \quad \mathfrak{v}_{13} + \mathfrak{v}_{31} = 0, \quad \mathfrak{v}_{12} + \mathfrak{v}_{21} = 0 \qquad (1)$$

ist bzw. daß die sechs Geschwindigkeiten paarweise gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung besitzen.

Im folgenden sollen verschiedene Möglichkeiten der Zusammensetzung von Elementarbewegungen erörtert werden, wobei von den bereits behandelten Schiebungen und Drehungen als Grundbewegungen ausgegangen wird.

16. **Zusammensetzung von zwei Schiebungen.** Der Körper K_3 vollzieht gegen den Körper K_2 eine Schiebung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{32}$ und K_2 gegen K_1 eine Schiebung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$. Nun besitzen bei einer Schiebung alle Körperpunkte nach Größe und Richtung die gleiche Geschwindigkeit. Infolgedessen ergibt sich für alle Punkte des Körpers K_3 dieselbe Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{31}$. Wir erhalten daher als Elementarbewegung des Körpers K_3 gegen K_1 eine Schiebung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{31}$. Wie aus den obigen Betrachtungen und aus Abb. 50 folgt, ist

$$\mathfrak{v}_{31} = \mathfrak{v}_{32} + \mathfrak{v}_{21}. \qquad (1)$$

Wenn nicht nur zwei, sondern noch mehr Schiebungen zusammengesetzt werden sollen, so ergibt sich unmittelbar, daß die zusammengesetzte Bewegung wieder eine Schiebung ist, deren Geschwindigkeit die vektorielle Summe der Geschwindigkeiten der einzelnen Schiebungen ist.

Umgekehrt kann man jede Schiebung in beliebig viele Schiebungen von vorgeschriebenen Richtungen zerlegen. Diese Zerlegung ist jedoch nur in dem Falle eindeutig, daß die Zahl der Schiebungskomponenten drei beträgt und die Schiebungsrichtungen nicht der gleichen Ebene parallel sind. Dann erhalten wir die Schiebungsgeschwindigkeiten in den Kanten eines Parallelepipeds, dessen Diagonale die gegebene, zu zerlegende Schiebungsgeschwindigkeit des Körpers ist.

17. **Zusammensetzung einer Drehung und einer Schiebung parallel der Drehachse.** Der Körper K_3 vollzieht gegen den Körper K_2 eine Drehung um eine Achse D_{32} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{32}, und K_2 vollzieht gegen K_1 eine Schiebung mit der zu D_{32} parallelen Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ (Abb. 51). Ein beliebiger Punkt A_3 des Körpers K_3 hat gegen K_1 die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{31}$, die sich als Resultierende aus den beiden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{32}$ und $\mathfrak{v}_{21}$ ergibt.

die aufeinander senkrecht stehen. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{32}$ hat die Größe $v_{32}=r_3\omega_{32}$, wobei r_3 den Abstand des Punktes A_3 von der Drehachse D_{32} bedeutet, und liegt in einer Ebene senkrecht zur Drehachse D_{32}. Wenn die Größen ω_{32} und $\mathfrak{v}_{21}$ unveränderlich sind, beschreibt der beliebige Punkt A_3 des Körpers K_3 eine Schraubenlinie, deren Achse die Drehachse D_{32} ist und die auf einem Kreiszylinder vom Radius r_3 liegt. Eine derartige Bewegung, bei der alle Punkte des bewegten Körpers K_3 Schraubenlinien mit der gleichen Achse beschreiben, nennt man eine **Schraubung**, da sie vollständig mit der Bewegung einer Schraubenmutter auf einer Schraubenspindel übereinstimmt. Die gemeinsame Achse aller Schraubenlinien, die von den Punkten des Körpers K_3 beschrieben werden, heißt die **Schraubenachse**. Wenn diese Bewegung nur während einer unendlich kleinen Zeit ausgeführt wird, nennt man sie eine **Elementarschraubung** und die entsprechende Schraubenachse die **Momentanachse der Schraubung**. Bei der endlichen Schraubung und ebenso bei der Elementarschraubung haben alle Punkte des Körpers, die auf einem Kreiszylinder um die Schraubenachse liegen, gleiche Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{31}$, die den Zylinder berühren und mit dessen Mantellinien denselben Winkel einschließen. Umgekehrt kann man jede Schraubung in eine Drehung um die Schraubenachse und eine Schiebung in Richtung der Schraubenachse zerlegen, wie sich unmittelbar erkennen läßt.

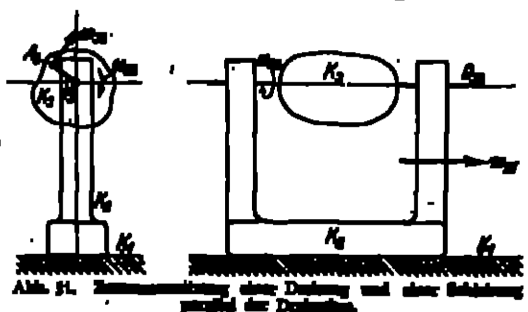


Abb. 51. Zusammensetzung einer Drehung und einer Schiebung parallel der Drehachse.

18. Zusammensetzung einer Drehung und einer Schiebung senkrecht zur Drehachse. Der Körper K_3 vollzieht gegen K_2 eine Drehung um die Achse D_{32} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{32}, und K_2 vollzieht gegen K_1 eine Schiebung mit der Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$, die senkrecht zur Drehachse D_{32} gerichtet ist (Abb. 52). Ein beliebiger Punkt A_3 des Körpers K_3 hat gegen K_2 die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{32}$, die auf dem von A_3 auf D_{32} gefällten Lote r_3 senkrecht steht und die Größe $v_{32}=r_3\omega_{32}$ besitzt. Da der augenblicklich mit A_3 zusammenfallende Punkt A_2 des Körpers K_2 die Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ gegen den Körper K_1 hat, so ist die Geschwindigkeit des Punktes A_3 gegen K_1

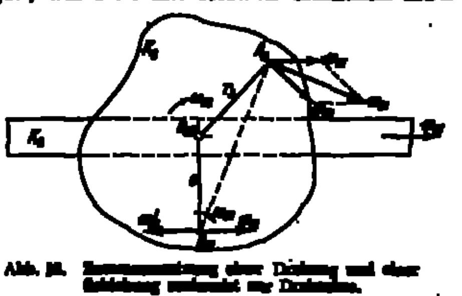


Abb. 52. Zusammensetzung einer Drehung und einer Schiebung senkrecht zur Drehachse.

$$\mathfrak{v}_{31}=\mathfrak{v}_{32}+\mathfrak{v}_{21}.$$

Es gibt Punkte im Körper K_3, für welche $\mathfrak{v}_{31}=0$ wird. Diese Punkte liegen offenbar in einer Ebene durch D_{32}, die zur Schiebungsgeschwindigkeit senkrecht ist, denn für alle Punkte dieser Ebene, die von der Drehachse D_{32} den Abstand s haben, ist (Abb. 52)

$$\mathfrak{v}_{31}=v_{32}\pm v_{21}=v_{21}-s\,\omega_{32}.$$

Hieraus folgt, daß $v_{31}=0$ wird für alle diejenigen Punkte des Körpers K_3, die von der Drehachse D_{32} den Abstand

$$s=\frac{v_{21}}{\omega_{32}} \qquad (1)$$

haben. Diese Punkte liegen daher auf einer zu D_{32} parallelen Geraden D_{31}. Wir sehen also, daß im vorliegenden Falle die Bewegung des Körpers K_3 gegen K_1 eine Drehung um eine Achse D_{31} ist, die von der Drehachse D_{32} den Abstand $s = v_{21}/\omega_{32}$ besitzt. Um die Winkelgeschwindigkeit ω_{31} dieser Drehung zu erhalten, beachten wir, daß alle Punkte des Körpers K_3, die auf der Drehachse D_{32} liegen, gegen K_1 die Geschwindigkeit v_{21} besitzen. Für die Drehung um D_{31}, die der Körper K_3 gegen K_1 ausführt, erhalten wir daher die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{31} = \frac{v_{21}}{s} = \omega_{32}.$$

Wir finden, daß die Drehung um die Drehachse D_{31} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{31} erfolgt, die die gleiche Größe und die gleiche Richtung hat wie die Winkelgeschwindigkeit ω_{32}. Die Zusammensetzung einer Drehung mit einer Schiebung senkrecht zur Drehachse ergibt also wieder eine Drehung, und zwar mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit und um eine parallele Achse, die mit der gegebenen in einer Ebene senkrecht zur Schiebungsrichtung im Abstande s nach der Seite hin liegt, nach der die Schiebungsgeschwindigkeit zeigt, wenn man sie im Drehsinn der Winkelgeschwindigkeit um 90° dreht.

Abb. 53. Die Bewegung des rollenden Rades.

Als Beispiel möge das Wagenrad betrachtet werden (Abb. 53). Der Wagen K_2 vollzieht gegen den Erdkörper K_1 eine Schiebung mit der Schiebungsgeschwindigkeit v_{21} und das Rad K_3, das den Halbmesser r_3 besitzt, dreht sich gegen den Wagen K_2 um seine Achse D_{32}. Rollt das Rad K_3 auf der Unterlage, so ist seine Bewegung gegen K_1 eine Momentandrehung um die Achse D_{31}, die durch den Berührungspunkt des Rades mit der Unterlage geht und der Achse D_{32} parallel ist. Diese Momentandrehung besitzt die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{31} = \omega_{32} = \frac{v_{21}}{r_3},$$

mit der sich das Rad K_3 augenblicklich um die Achse D_{31} dreht.

Umgekehrt kann man jede Drehung um eine Achse D_{31} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{31} in eine Drehung um eine beliebige andere parallele Achse D_{32} und eine Schiebung senkrecht zur Ebene beider Achsen zerlegen. Die entsprechende Winkelgeschwindigkeit ist $\omega_{32} = \omega_{31}$. Wenn die beiden parallelen Drehachsen den Abstand s besitzen, so hat die Schiebungsgeschwindigkeit v_{21} die Größe

$$v_{21} = s\,\omega_{31}. \tag{2}$$

19. Zusammensetzung einer Drehung mit einer beliebig gerichteten Schiebung. Die gegebene Schiebung kann man in zwei Schiebungen zerlegen, von denen die eine die Richtung der Drehachse und die andere die zur Drehachse senkrechte Richtung besitzt. Dann setzt man zunächst die Drehung mit der zur Drehachse senkrechten Schiebung zusammen und erhält als zusammengesetzte Bewegung wieder eine Drehung um eine parallele Drehachse. Diese Drehung setzt man nun mit der Schiebung in Richtung der Drehachse zusammen und findet eine Schraubung, welche die neue Drehachse als Schraubenachse besitzt. Umgekehrt kann man jede Schraubung in eine Schiebung von beliebig gegebener Richtung und eine Drehung um eine zur Schraubenachse parallele Achse zerlegen.

20. Zusammensetzung zweier Drehungen um sich schneidende Achsen. Der Körper K_3 dreht sich um die Achse D_{32} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{32} gegen den Körper K_2 und dieser dreht sich gegen den Körper K_1 um die Achse D_{21}, welche die Drehachse D_{32} im Punkte O schneidet, mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{21} (Abb. 54). Die beiden Drehachsen D_{32} und D_{21} schließen den Winkel α miteinander ein. Über die zusammengesetzte Bewegung, d. h. die Bewegung von K_3 gegen K_1, kann man von vornherein sagen, daß sie eine Drehung um eine durch O gehende Drehachse sein muß, da der Punkt O als Schnittpunkt der beiden Drehachsen D_{32} und D_{21} bei den entsprechenden beiden Drehungen in Ruhe bleibt. Für jeden in der Ebene der Drehachsen D_{32} und D_{21} liegenden Punkt stehen die beiden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{32}$ und $\mathfrak{v}_{21}$ senkrecht zu dieser Ebene, so daß für alle Punkte dieser Ebene die Beziehung $\mathfrak{v}_{31} = \mathfrak{v}_{32} + \mathfrak{v}_{21}$ in die Gleichung $v_{31} = v_{32} \pm v_{21}$ übergeht. Die gesuchte Drehachse D_{31}, die durch den Punkt O gehen muß, muß alle Punkte enthalten, für welche $v_{31} = 0$ ist. A_3 sei ein solcher Punkt und F_3 und F_2 seien die Fußpunkte der von A_3 auf D_{32} bzw. D_{21} gefällten Lote, deren Längen mit l_3 bzw. l_2 bezeichnet werden. Dann gilt für den Punkt A_3

$$v_{31} = l_3\,\omega_{32} - l_2\,\omega_{21} = 0.$$

Bezeichnet man die Winkel, die A_3O mit den Drehachsen D_{32} und D_{21} bildet, mit α_3 bzw. α_2, so ist $l_3 = A_3O \cdot \sin\alpha_3$ und $l_2 = A_3O \cdot \sin\alpha_2$, und man erhält

$$\omega_{32}\sin\alpha_3 = \omega_{21}\sin\alpha_2.$$

Abb. 54. Zusammensetzung zweier Drehungen um sich schneidende Achsen.

Die noch unbekannten Winkel α_2 und α_3 unterliegen ferner der Beziehung $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha$. Aus diesem und aus der vorhergehenden Gleichung findet man

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\omega_{32}\sin\alpha}{\omega_{32}\cos\alpha + \omega_{21}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\omega_{21}\sin\alpha}{\omega_{32} + \omega_{21}\cos\alpha}. \tag{1}$$

Damit ist die Lage der Drehachse D_{31} bestimmt.

Um die Winkelgeschwindigkeit ω_{31} der Drehung um die Achse D_{31} zu finden, beachten wir, daß gegen den Körper K_1 jeder Punkt B_3 der Drehachse D_{32}, aufgefaßt als Punkt des Körpers K_3, dieselbe Geschwindigkeit hat wie der mit B_3 momentan zusammenfallende Punkt B_2 des Körpers K_2. Wir fällen von B_3 auf die Achse D_{31} das Lot B_3E und von B_2 auf die Drehachse D_{21} das Lot B_2C. Dann findet man für B_3 bzw. B_2 die Geschwindigkeiten

$$v_{31} = B_3E \cdot \omega_{31}, \qquad v_{21} = B_2C \cdot \omega_{21}.$$

Da $v_{31} = v_{21}$ ist, wie wir eben gesehen haben, so folgt

$$\omega_{31} = \omega_{21} \cdot \frac{B_2C}{B_3E} = \omega_{21} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_3} = \omega_{32}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_2}.$$

Setzt man hierin die für $\operatorname{tg}\alpha_2$ und $\operatorname{tg}\alpha_3$ gefundenen Werte ein, so ergibt sich

$$\omega_{31} = \sqrt{\omega_{21}^2 + \omega_{32}^2 + 2\,\omega_{21}\,\omega_{32}\cos\alpha}. \tag{2}$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß die Winkelgeschwindigkeiten als **Vektoren** aufzufassen sind, die man in der gleichen Weise wie die Geschwindigkeiten mit Hilfe des Parallelogrammes zusammensetzen kann. Man trägt die Winkelgeschwindigkeiten vom Schnittpunkte der Drehachsen in irgendeinem Maßstabe

in den entsprechenden Drehachsen auf, und zwar nach der Richtung hin, von der aus gesehen die Drehung in einem bestimmten Sinne erfolgt. In Abb. 55 sind die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{o}_{21}$ und $\mathfrak{o}_{32}$ nach der Richtung hin aufgetragen, von der aus gesehen die Drehung im Gegenzeigersinne erfolgt, so daß also Drehsinn und Vektorpfeil einander zugeordnet sind wie Drehung und Vorwärtsbewegung einer **rechtsgängigen Schraube**. Durch Addition der Winkelgeschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{o}_{21}$ und $\mathfrak{o}_{32}$ ergibt sich die gesuchte Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}_{31}$ und damit auch die Lage der gesuchten Drehachse D_{31}. Wir können auch schreiben

$$\mathfrak{o}_{31} = \mathfrak{o}_{32} + \mathfrak{o}_{21}. \qquad (3)$$

Abb. 55. Das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten.

Das in Abb. 55 dargestellte Parallelogramm nennt man das **Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten**. Es tritt bei der Zusammensetzung von Drehungen um sich schneidende Achsen an die Stelle des Parallelogramms der Geschwindigkeiten bei der Zusammensetzung von Schiebungen. Wir finden also: Die Zusammensetzung zweier Drehungen um sich schneidende Achsen D_{32} und D_{21} ergibt eine Drehung um eine Achse D_{31}, die durch den Schnittpunkt der beiden Achsen D_{32} und D_{21} geht und in der Ebene dieser beiden Drehachsen liegt. Die Lage der Drehachse D_{31} und die zugeordnete Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}_{31}$ erhält man durch Addition der Winkelgeschwindigkeitsvektoren $\mathfrak{o}_{32}$ und $\mathfrak{o}_{21}$.

Diese Betrachtungen lassen erkennen, daß die Zusammensetzung beliebig vieler Drehungen um Drehachsen, die sich sämtlich in einem Punkte schneiden, wieder auf eine Drehung führt, und zwar um eine Drehachse, die durch den gemeinsamen Schnittpunkt der übrigen Drehachsen geht. Die Lage dieser Drehachse und die Größe und Richtung der zugeordneten Winkelgeschwindigkeit ergibt sich durch Addition der Winkelgeschwindigkeitsvektoren, die den zusammenzusetzenden Drehungen zugehören.

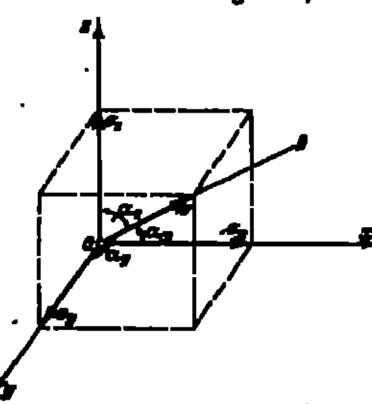


Abb. 56. Zerlegung einer Drehung in drei Drehungen um sich schneidende Achsen.

Umgekehrt kann man jede Drehung in zwei Drehungen zerlegen, deren Achsen D_{32} und D_{21} mit der gegebenen Drehachse D_{31} in einer Ebene liegen und sich mit ihr in einem Punkte schneiden. Hier sind die Winkel α_1, α_2 und α_3 und die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}_{31}$ gegeben. Man erhält dann die gesuchten Winkelgeschwindigkeiten durch die Beziehungen (Abb. 55)

$$\omega_{32} = \omega_{31}\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}, \quad \omega_{21} = \omega_{31}\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha}. \qquad (4)$$

Man kann jede Drehung auch in mehr als zwei andere Drehungen zerlegen. Diese Zerlegung führt aber nur in dem Falle zu einer eindeutigen Lösung, in dem die Zerlegung in drei Drehungen erfolgt, und zwar um Achsen, die sich mit der gegebenen Drehachse in einem Punkte schneiden, und auch nur dann, wenn von den gegebenen bzw. gewählten drei Drehachsen nicht zwei mit der ersten Drehachse in einer Ebene liegen. Diese Zerlegung einer Drehung in drei Drehungen wird häufig angewendet, wenn die Drehung um eine beliebige Drehachse D mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ in die drei Drehungen um die Achsen eines recht-

winkligen Koordinatensystems x, y, z zerlegt werden soll. Sind α_x, α_y, α_z die Winkel, welche die Drehachse D mit den Koordinatenachsen einschließt, so ergeben sich für die Winkelgeschwindigkeiten der gesuchten Drehungen um die Koordinatenachsen die Werte (Abb. 56)

$$\omega_x = \omega \cos\alpha_x, \qquad \omega_y = \omega \cos\alpha_y, \qquad \omega_z = \omega \cos\alpha_z.$$

21. Zusammensetzung zweier Drehungen um parallele Achsen. Wenn zwei Drehungen um die parallelen Drehachsen D_{32} und D_{21} mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_{32} und ω_{21} zusammenzusetzen sind, so erkennt man unmittelbar, daß die zusammengesetzte Bewegung wieder eine Drehung ist, und zwar um eine Drehachse D_{31}, die den beiden ersten parallel ist und mit ihnen in einer Ebene liegt. Wir nehmen zunächst an, daß die Drehungen um die Drehachsen D_{32} und D_{21} im gleichen Sinne erfolgen. Dann ergibt sich aus Abb. 57a, welche eine Projektion auf eine zu den Drehachsen senkrechte Ebene darstellt, die Lage der gesuchten Drehachse D_{31} aus der Bedingung, daß alle Punkte von D_{31} die Geschwindigkeit

$$e_2\omega_{32} - e_1\omega_{21} = 0$$

Abb. 57a und b. Zusammensetzung zweier Drehungen um parallele Achsen.

haben müssen, wobei e_2 und e_1 die Abstände der Drehachse D_{31} von den Achsen D_{32} bzw. D_{21} sind. Da ferner $e_2 + e_1 = e$ und e eine gegebene Strecke ist, so findet man die Lage der Drehachse D_{31} durch die Beziehungen

$$e_2 = e\frac{\omega_{21}}{\omega_{32}+\omega_{21}}, \qquad e_1 = e\frac{\omega_{32}}{\omega_{32}+\omega_{21}}. \tag{1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_{31} um die Drehachse D_{31} erhält man als algebraische Summe der beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21}$. Die Zusammensetzung zweier gleichsinniger Drehungen um parallele Achsen ergibt also wieder eine Drehung um eine parallele Achse in der Ebene der beiden gegebenen Achsen, und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit, die den Drehsinn der beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten besitzt.

Wenn die Drehungen um die beiden Drehachsen D_{32} und D_{21} entgegengesetzten Drehsinn haben und ω_{21} die größere der beiden Winkelgeschwindigkeiten bedeutet, so liegt die gesuchte Drehachse nicht mehr zwischen den beiden Drehachsen D_{32} und D_{21}, sondern außerhalb dieses Raumes, und zwar auf der Seite der größeren Winkelgeschwindigkeit. Aus Abb. 57b ergibt sich für die Lage der Drehachse D_{31}

$$e_2\omega_{32} - e_1\omega_{21} = 0 \qquad \text{und} \qquad e_2 - e_1 = e,$$

woraus man

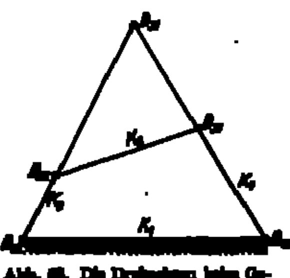
$$e_2 = e\frac{\omega_{21}}{\omega_{21}-\omega_{32}}, \qquad e_1 = e\frac{\omega_{32}}{\omega_{21}-\omega_{32}}$$

erhält. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um D_{31} ist $\omega_{31} = \omega_{21} - \omega_{32}$. Sie hat den Drehsinn der größeren der beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten. Wir finden also, daß die Zusammensetzung zweier ungleichsinniger Drehungen um parallele Achsen wieder eine Drehung um eine parallele Drehachse ergibt, die aber außerhalb des Raumes zwischen den beiden gegebenen Drehachsen liegt, und zwar auf der Seite der größeren Winkelgeschwindigkeit.

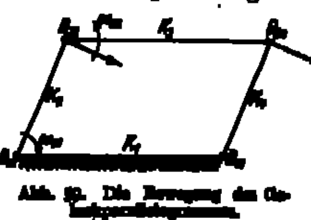
Wenden wir die Ergebnisse der Zusammensetzung von Drehungen um parallele Achsen auf die ebenen Mechanismen an, wo wir uns die Drehachsen durch Gelenkpunkte oder Pole ersetzt denken dürfen, so finden wir, daß die Pole

der Relativbewegung dreier Ebenen bzw. Glieder stets in einer Geraden liegen müssen. Z. B. erhält man beim Gelenkviereck den Pol D_{31} (Abb. 58) aus der Eigenschaft, daß einmal die drei Pole D_{12}, D_{23}, D_{31} der Glieder K_1, K_2, K_3 und ferner die Pole D_{14}, D_{43}, D_{31} der Glieder K_1, K_4, K_3 auf je einer Geraden liegen müssen. Dieser Satz, daß die drei Pole der Relativbewegung dreier Ebenen auf einer Geraden liegen, wird mit Vorteil zur Ermittlung der Pole bei den mehrgliedrigen Mechanismen benutzt.

Eine Besonderheit tritt ein, wenn zwei Drehungen um parallele Drehachsen D_{32} bzw. D_{21} zusammenzusetzen sind, wobei die beiden Drehungen entgegengesetzten Drehsinn haben und die Winkelgeschwindigkeiten ω_{32} und ω_{21} gleich groß sind. Man nennt den Inbegriff zweier solcher Drehungen ein Drehpaar. Hier wird $e_1 = e_2 = \infty$, d. h. die gesuchte Drehachse D_{31} liegt unendlich fern. Hier erhalten wir also als zusammengesetzte Bewegung keine Drehung, sondern eine Schiebung senkrecht zur Ebene der beiden Drehachsen. Die Geschwindigkeit dieser Schiebung ist $v_{31} = r\omega_{32} = r\omega_{21}$, wo r den Abstand der beiden Drehachsen mißt. Das Produkt $r\omega_{32} = r\omega_{21}$ heißt das Moment des Drehpaares.


Abb. 58. Die Drehachsen beim Gelenkviereck.

Diesen Fall haben wir beim Gelenkparallelogramm (Abb. 59) vor uns, bei dem die Kurbel K_2 sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{21} gegen den Steg K_1 und die Koppel K_3 im entgegengesetzten Drehsinne mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_{32} = \omega_{21}$ gegen die Kurbel K_2 dreht. Die Bewegung, die sich durch Zusammensetzung der beiden Drehungen von K_3 gegen K_2 und von K_2 gegen K_1 ergibt, besteht hier darin, daß die Koppel K_3 gegen den Steg eine Schiebung senkrecht zur Ebene der beiden Drehachsen D_{32} und D_{21} vollzieht.


Abb. 59. Die Bewegung des Gelenkparallelogramms.

Man kann umgekehrt auch jede Drehung um eine Achse D_{31} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{31} in zwei Drehungen um parallele Achsen D_{32} und D_{21} zerlegen, die mit D_{31} in einer Ebene liegen. Hier sind die Größen e_1, e_2 und $e = e_1 + e_2$ gegeben (Abb. 57a), und die Winkelgeschwindigkeiten ω_{32} und ω_{21} werden gesucht, deren Summe $\omega_{32} + \omega_{21} = \omega_{31}$ ebenfalls bekannt ist. Benutzt man die oben gefundene Beziehung

$$e_2\omega_{32} - e_1\omega_{21} = 0,$$

so folgt

$$\omega_{32} = \omega_{31}\frac{e_1}{e}, \qquad \omega_{21} = \omega_{31}\frac{e_2}{e}, \tag{1}$$

d. h. die beiden gesuchten Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Abstände der entsprechenden Drehachsen von der gegebenen Drehachse.

22. Zusammensetzung zweier Drehungen um sich kreuzende Achsen. Der allgemeinste Fall der Zusammensetzung zweier Drehungen ist der der Zusammensetzung zweier Drehungen um sich kreuzende (d. h. im allgemeinen nicht schneidende) Achsen D_{32} und D_{21}. Man nennt den Inbegriff zweier solcher Drehungen ein Drehkreuz. Der kürzeste Abstand der beiden Drehachsen sei $F_1F_2 = e$ (Abb. 60a), und der Winkel, unter dem sich die beiden Achsen kreuzen, sei α. Auf dem kürzesten Abstande, d. h. dem gemeinsamen Lot der beiden Drehachsen, wählen wir einen zunächst beliebigen Punkt O, der von F_1 und F_2 die Entfernungen e_1 bzw. e_2 haben möge. Abb. 60b stellt die Projektion der

Drehachsen auf eine Ebene dar, die auf dem kürzesten Abstand F_1F_2 senkrecht steht, und Abb. 60c die Projektion auf eine Ebene, die auf der genannten Ebene senkrecht steht. Durch den Punkt O ziehen wir die Parallele D'_{II} zu D_{II} und die Parallele D'_{I} zu D_{I} und zerlegen die Drehung um D_{II} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{II} in eine Drehung um die parallele Achse D'_{II} mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω_{II} und in eine Schiebung senkrecht zur Ebene der beiden Drehachsen D_{II} und D'_{II} mit der Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{II}$ (Abb. 60b). Ebenso zerlegen wir die Drehung um die Drehachse D_{I} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{I} in eine Drehung um die parallele Drehachse D'_{I} mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω_{I} und in eine Schiebung senkrecht zur Ebene der Achsen D_{I} und D'_{I} mit der Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{I}$ (Abb. 60b). Wie bei der Zerlegung einer Drehung in eine Drehung um eine parallele Drehachse und in eine Schiebung senkrecht zur Ebene beider Achsen gezeigt wurde, ergibt sich

$$v_{II} = e_2\,\omega_{II}, \qquad v_{I} = e_1\,\omega_{I}.$$

Wir setzen nun zunächst die beiden Drehungen um die sich schneidenden Drehachsen D'_{II} und D'_{I} mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_{II} bzw. ω_{I} zusammen,

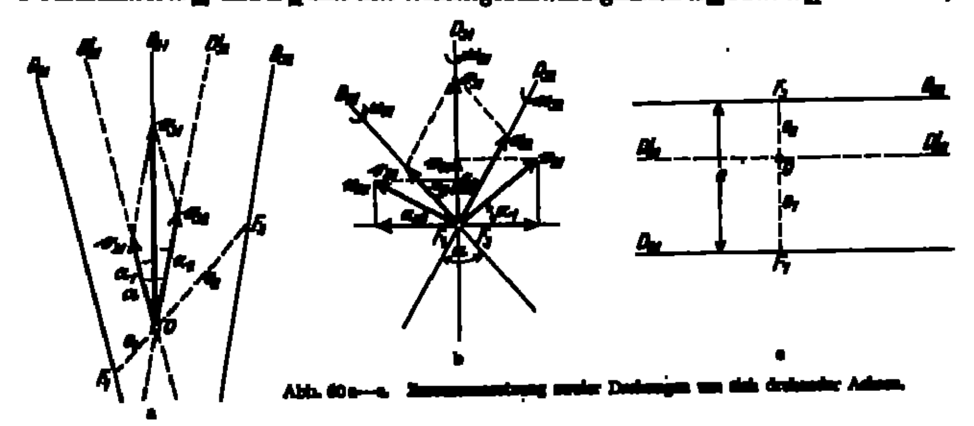


Abb. 60a—c. Zusammensetzung zweier Drehungen um sich kreuzende Achsen.

und zwar mit Hilfe des Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten, durch das wir auch die Lage der resultierenden Drehachse D_{III} finden, die durch O geht und mit den Drehachsen D_{II} und D_{I} die Winkel α_{2} bzw. α_{1} einschließt (Abb. 60a u. 60b). Dann setzen wir die beiden Schiebungen mit den Schiebungsgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{II}$ und $\mathfrak{v}_{I}$ zusammen und zerlegen zu diesem Zwecke $\mathfrak{v}_{II}$ und $\mathfrak{v}_{I}$ in Komponenten in Richtung von D_{III} und dazu senkrecht. Wir erhalten dann eine Schiebung in Richtung der Drehachse D_{III} mit der Schiebungsgeschwindigkeit

$$v_{III} = v_{I}\sin\alpha_1 + v_{II}\sin\alpha_2 = e_1\omega_{I}\sin\alpha_1 + e_2\omega_{II}\sin\alpha_2$$

und eine dazu senkrechte Schiebung mit der Schiebungsgeschwindigkeit

$$v'_{III} = v_{I}\cos\alpha_1 - v_{II}\cos\alpha_2 = e_1\omega_{I}\cos\alpha_1 - e_2\omega_{II}\cos\alpha_2.$$

Der Punkt O war auf dem gemeinsamen Lote F_1F_2 der beiden Drehachsen D_{II} und D_{I} willkürlich gewählt worden. Wir wollen nun O so bestimmen, daß die beiden Schiebungen mit den Schiebungsgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{II}$ und $\mathfrak{v}_{I}$ zusammengesetzt eine Schiebung in Richtung der Drehachse D_{III} ergeben, daß also die Geschwindigkeitskomponente v'_{III} der zusammengesetzten Schiebung verschwindet. Dies erfordert, daß

$$v'_{III} = e_1\omega_{I}\cos\alpha_1 - e_2\omega_{II}\cos\alpha_2 = 0.$$

wird. Aus dieser Beziehung und aus den Gleichungen $s_1 + s_2 = s$, $\omega_{31} = \omega_{32} \cos\alpha_1 + \omega_{21} \cos\alpha_2$ erhalten wir zur Bestimmung der Lage des Punktes O die Strecken

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s\frac{\omega_{21}\cos\alpha_2}{\omega_{32}\cos\alpha_1 + \omega_{21}\cos\alpha_2} = s\frac{\omega_{21}\cos\alpha_2}{\omega_{31}}, \\ s_2 &= s\frac{\omega_{32}\cos\alpha_1}{\omega_{32}\cos\alpha_1 + \omega_{21}\cos\alpha_2} = s\frac{\omega_{32}\cos\alpha_1}{\omega_{31}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_{31} sowie die Winkel α_1 und α_2, unter welchen die Drehachse D_{31} die gegebenen Drehachsen D_{32} und D_{21} kreuzt, sind unabhängig von der Lage des Punktes O. Da der Punkt O so gewählt bzw. bestimmt wurde, daß sich die beiden Schiebungen senkrecht zur Drehachse D_{31} aufheben, bleiben nur noch die beiden Schiebungen in Richtung von D_{31} übrig, deren Zusammensetzung eine Schiebung in Richtung der Drehachse D_{31} mit der Schiebungsgeschwindigkeit v_{31} ergibt, die sich unter Benutzung der für s_1 und s_2 gefundenen Ausdrücke auf die Form

$$v_{31} = s_1 \omega_{32} \sin\alpha_1 + s_2 \omega_{21} \sin\alpha_2 = s\frac{\omega_{32}\omega_{21}}{\omega_{31}} \sin\alpha \qquad (2)$$

bringen läßt.

Wir finden also: Die Zusammensetzung zweier Drehungen um sich kreuzende Achsen D_{32} und D_{21} ergibt eine Schraubung. Die Lage und die Richtung der Schraubenachse D_{31} sowie die Winkelgeschwindigkeit ω_{31} der Schraubung sind durch das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten ω_{32} und ω_{21} und ferner dadurch bestimmt, daß die Schraubenachse D_{31} den kürzesten Abstand s der Drehachse D_{32} und D_{21} unter rechtem Winkel in einem Punkt O schneidet, der auf s die beiden oben angegebenen Strecken s_1 und s_2 ausschneidet. Die Schiebungsgeschwindigkeit v_{31} der Schraubung hat die unter (2) angegebene Größe.

Umgekehrt kann man jede Schraubung mit einer Schraubenachse D_{31} zerlegen in zwei Drehungen um zwei sich kreuzende Achsen D_{32} und D_{21}. Dabei müssen diese beiden Drehachsen eine Senkrechte zur Schraubenachse unter rechtem Winkel schneiden. Hieraus folgt, daß man eine der beiden Drehachsen, z. B. D_{32}, ganz beliebig wählen kann. Wenn man dann das gemeinsame Lot dieser Drehachse D_{32} und der Schraubenachse D_{31} zeichnet, so muß die zweite Drehachse D_{21} so gewählt werden, daß sie das erwähnte gemeinsame Lot unter rechtem Winkel schneidet. Es zeigt sich, daß durch die Wahl der einen Drehachse D_{32} die zweite Drehachse D_{21} vollständig und eindeutig bestimmt ist. Durch D_{32} sind nämlich α_2 und s_1 bestimmt. Da man auch schreiben kann

$$s_1 = \frac{v_{31}}{\omega_{32}} \operatorname{cotg}\alpha_2, \qquad s_2 = \frac{v_{31}}{\omega_{21}} \operatorname{cotg}\alpha_1, \qquad (3)$$

wie sich durch einfaches Umrechnen aus den obigen Beziehungen ergibt, so ist nunmehr durch α_2 auch die Größe s_1 und ferner durch s_2 auch der Winkel α_1 bekannt, so daß damit die Lage der zweiten Drehachse vollständig bestimmt ist. Wenn die eine Drehachse D_{32} willkürlich gewählt worden ist, nennt man die zugeordnete eindeutig bestimmte zweite Drehachse D_{21} die zur Achse D_{32} konjugierte Drehachse. Zu jeder Schraubung lassen sich unendlich viele Paare einander konjugierter Drehachsen ermitteln. Die ganz analog auch bei der Zusammensetzung von Kräften auftretende Theorie der konjugierten Achsen wird in der Statik[1]) ausführlich behandelt werden.

23. Zusammensetzung zweier beliebiger Schraubungen. Der Körper K_3 vollzieht gegen den Körper K_2 eine Schraubung um die Schraubenachse D_{32} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{32} und der Schiebungsgeschwindigkeit v_{32}.

[1]) Siehe Kap. 6, Ziff. 61. ds. Bd. ds. Handb.

und der Körper K_2 vollzieht gegen den Körper K_1 ebenfalls eine Schraubung um eine beliebige andere Schraubenachse D_{III}, welche die Achse D_{II} unter einem beliebigen Winkel α kreuzen möge, mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}_{III}$ und der Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{III}$. Die Bewegung des Körpers K_2 gegen den Körper K_1 erhält man dann durch Zusammensetzung der beiden Schraubungen. Wir verfahren in der Weise, daß wir zunächst die beiden Drehungen um die sich kreuzenden Achsen D_{II} bzw. D_{III} zusammensetzen, wobei wir eine Schraubung um eine Achse D'_{II} mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}_{III}$ und der Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}'_{II}$ erhalten. Diese Schiebung setzen wir mit den beiden ersten Schiebungen zusammen, die die Schiebungsgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{II}$ und $\mathfrak{v}_{III}$ besitzen. Hierbei ergibt sich eine Schiebung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}''_{II} = \mathfrak{v}'_{II} + \mathfrak{v}_{II} + \mathfrak{v}_{III}$, die nunmehr mit der Drehung um die Achse D'_{II} mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}_{III}$ zusammenzusetzen ist. Die Zusammensetzung einer Drehung mit einer beliebigen Schiebung liefert aber, wie oben gezeigt wurde, eine Schraubung, deren Achse D_{III} der Achse D'_{II} parallel ist. Wir finden somit, daß die Zusammensetzung zweier beliebiger Schraubungen und daher auch beliebig vieler Schraubungen um beliebige Schraubenachsen stets wieder zu einer Schraubung führt.

24. Die Relativbewegung eines Punktes gegen einen bewegten starren Körper. Zwei Punkte A_2 und A_3 bewegen sich in bestimmter Gesetzmäßigkeit gegen einen Bezugskörper K_1. Es soll untersucht werden, von welcher Art die Bewegung des Punktes A_3 gegen den Punkt A_2 bzw. gegen einen Körper K_2 ist, dem der Punkt A_2 angehört, wie also einem auf dem Körper K_2 befindlichen Beobachter die Bewegung des Punktes A_3 erscheint. Die Fragestellung ist somit die folgende: Gegeben sind die Bewegungen des Punktes A_3 und des Körpers K_2 gegen den Körper K_1. Von welcher Art ist die Relativbewegung des Punktes A_3 gegen den Körper K_2, welches ist die relative Bahn und mit welcher Geschwindigkeit und mit welcher Beschleunigung erfolgt die Relativbewegung?

Wir unterscheiden die beiden Fälle, daß der Körper K_2 gegen K_1 eine Schiebung, und daß er eine Drehung vollzieht.

25. Relativbewegung eines Punktes gegen einen sich verschiebenden Körper. Der Körper K_2 vollzieht gegen den Körper K_1 eine Schiebung. Wir wählen im Körper K_1 ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z mit dem Ursprung O und im Körper K_2 ein rechtwinkliges Koordinatensystem ξ, η, ζ mit dem Ursprung A_2.

Da bei einer Schiebung sämtliche Körperpunkte gleiche Geschwindigkeitsvektoren besitzen, so bleiben sämtliche Geraden des Körpers K_2 bei ihrer Bewegung gegen K_1 ihrer ursprünglichen Lage stets parallel. Infolgedessen bedeutet es keine Einschränkung, wenn wir die Achsen ξ, η, ζ des mit dem Körper K_2 starr verbundenen Koordinatensystems als parallel mit den entsprechenden Achsen x, y, z des im Körper K_1 liegenden Koordinatensystems annehmen (Abb. 61).

Abb. 61. Relativbewegung und Relativgeschwindigkeit.

Die Bewegung des Körpers K_2 gegen K_1 sei dadurch gegeben, daß man die Koordinaten x_2, y_2, z_2 seines Ursprungs A_2 als eindeutige Funktionen der Zeit kennt. Ebenso seien die Koordinaten x_3, y_3, z_3 des Punktes A_3 gegen das Koor-

dinatensystem x, y, z als eindeutige Funktionen der Zeit gegeben. Dann ergibt sich die relative Bewegung des Punktes A_3 gegen den Körper K_2 aus den relativen Koordinaten

$$\xi = x_3 - x_2, \qquad \eta = y_3 - y_2, \qquad \zeta = z_3 - z_2,$$

die man nunmehr ebenfalls als eindeutige Funktionen der Zeit findet. Eliminiert man aus je zwei dieser drei Gleichungen die Zeit, so erhält man zwei Gleichungen mit den Veränderlichen ξ, η, ζ, in denen die Zeit nicht mehr auftritt. Diese beiden Gleichungen stellen die Relativbahn des Punktes A_3 gegen den Körper K_2 dar.

Um die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{32} = \mathfrak{v}_r$ des Punktes A_3 gegen den Körper K_2 zu erhalten, bilden wir zunächst ihre Komponenten $v_{r\xi}, v_{r\eta}, v_{r\zeta}$ durch Differentiation der entsprechenden Koordinaten nach der Zeit und finden

$$v_{r\xi} = \frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_2}{dt}, \qquad v_{r\eta} = \frac{dy_3}{dt} - \frac{dy_2}{dt}, \qquad v_{r\zeta} = \frac{dz_3}{dt} - \frac{dz_2}{dt}.$$

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Punktes A_3 gegen K_1 mit $\mathfrak{v}_{31}$ und die Schiebungsgeschwindigkeit des Körpers K_2 gegen K_1 mit $\mathfrak{v}_{21}$, so haben wir, was auch unmittelbar aus dem Geschwindigkeitsparallelogramm abzulesen wäre,

$$\mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}_{32} = \mathfrak{v}_{31} - \mathfrak{v}_{21}. \tag{1}$$

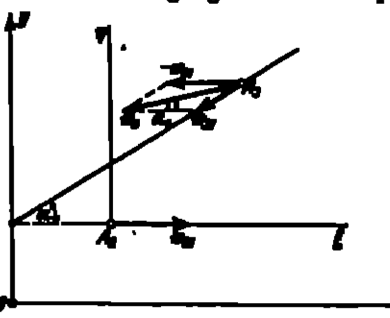
Die Komponenten $w_{r\xi}, w_{r\eta}, w_{r\zeta}$ der relativen Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ des Punktes A_3 findet man durch eine weitere Differentiation nach der Zeit zu

$$w_{r\xi} = \frac{d^2x_3}{dt^2} - \frac{d^2x_2}{dt^2}, \qquad w_{r\eta} = \frac{d^2y_3}{dt^2} - \frac{d^2y_2}{dt^2}, \qquad w_{r\zeta} = \frac{d^2z_3}{dt^2} - \frac{d^2z_2}{dt^2}$$

oder

$$\mathfrak{w}_r = \mathfrak{w}_{32} = \mathfrak{w}_{31} - \mathfrak{w}_{21}, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{w}_{31}$ die Beschleunigung des Punktes A_3 gegen den Körper K_1 und $\mathfrak{w}_{21}$ die Beschleunigung der vom Körper K_2 gegen K_1 ausgeführten Schiebung ist. Wir finden also, daß bei der Relativbewegung eines Punktes A_3 gegen einen Körper K_2, der eine Schiebung ausführt, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sich als vektorielle Differenzen der entsprechenden absoluten Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen ergeben.


Abb. 62. Beispiel zur Relativbewegung.

Als Beispiel soll der Fall behandelt werden, daß ein Wagen A_2 auf einer Straße (der ξ-Achse) mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ fährt, und daß auf einer zweiten Straße, die gegen die erste unter dem Winkel α geneigt ist, ein Radfahrer A_3 mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{31}$ in dem in Abb. 62 angegebenen Sinne fährt. Einem in dem Wagen A_2 befindlichen Beobachter erscheint die Bewegung des Radfahrers A_3 so, als ob sie mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}_{32} = \mathfrak{v}_{31} - \mathfrak{v}_{21}$ erfolgt. Diese Relativgeschwindigkeit hat die Größe $v_r = \sqrt{v_{31}^2 + v_{21}^2 + 2v_{31}v_{21}\cos\alpha}$ und schließt mit $\mathfrak{v}_{21}$ den Winkel α_1 ein, der durch die Beziehung $\sin\alpha_1 = \frac{v_{31}}{v_r}\sin\alpha$ bestimmt ist.

Die umgekehrte Aufgabe, daß man die Schiebungsbewegung des Körpers K_2 gegen den Bezugskörper K_1 und ferner die Relativbewegung des Punktes A_3 gegen den Körper K_2 kennt, und die Bewegung von A_3 gegen den Körper K_1

sucht, ist durch die angegebenen Beziehungen auch schon erledigt. Wir haben dann die Koordinaten x_3, y_3, z_3 und ξ, η, ζ (Abb. 61) als eindeutige Funktionen der Zeit gegeben und finden für die **absolute** Bewegung, d. h. für die Bewegung des Punktes A_3 gegen den Körper K_1, die Koordinaten

$$x_3 = x_2 + \xi, \qquad y_3 = y_2 + \eta, \qquad z_3 = z_2 + \zeta.$$

Hieraus folgt die Geschwindigkeit und die Beschleunigung

$$\mathfrak{v}_{31} = \mathfrak{v}_{21} + \mathfrak{v}_r, \qquad \mathfrak{b}_{31} = \mathfrak{b}_{21} + \mathfrak{b}_r. \tag{3}$$

Wenn wir also die Bewegung des Punktes A_3 gegen den Körper K_2 und ferner die Schiebungsbewegung von K_2 gegen den Körper K_1 kennen, so erhalten wir die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{31}$ von A_3 gegen K_1 als Vektorsumme der betreffenden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{32} = \mathfrak{v}_r$ und $\mathfrak{v}_{21}$. Das Entsprechende gilt auch für die Beschleunigung, aber, was hier besonders hervorgehoben werden muß, nur für den Fall, daß der Körper K_2 gegen K_1 eine **Schiebung** und keine **Drehung** ausführt. Wir sehen, daß wir hier auf dieselben Gedankengänge und dieselben Ergebnisse kommen, die wir bei der Zusammensetzung von Bewegungen erhalten haben.

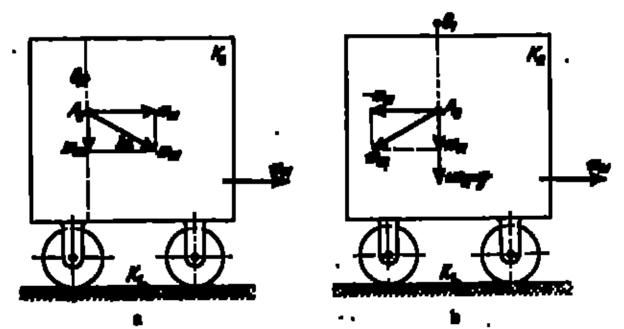


Abb. 63a u. b. Beispiel zur Relativbewegung.

Als Beispiel für die soeben behandelte umgekehrte Aufgabe soll das Folgende betrachtet werden. Ein Wagen K_2 bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ gegen den Erdkörper K_1 und ein Punkt A_3 fällt im Wagen frei herab, und zwar aus der im Wagen K_2 festliegenden Ruhelage O_2 (Abb. 63a). Dann ist die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{32} = \mathfrak{v}_r$ von A_3 gegen K_2 vertikal und hat die veränderliche Größe $v_{32} = gt$. Die Absolutbewegung von A_3, d. h. die Bewegung von A_3 gegen K_1, erfolgt mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{31} = \mathfrak{v}_{32} + \mathfrak{v}_{21}$, die mit der Horizontalen den durch die Beziehung $\operatorname{tg}\alpha = v_{32}/v_{21}$ bestimmten veränderlichen Winkel α einschließt. Einen ganz anderen Fall erhalten wir, wenn der Punkt A_3 aus einer Ruhelage O_1 herabfällt, die gegen den Körper K_1 in Ruhe ist. Hier kennt man nämlich die Bewegung von A_3 gegen K_1 und man untersucht dann die Relativbewegung von A_3 gegen den Wagen K_2 (Abb. 63b). Wir erhalten nach den zuerst gefundenen Beziehungen für die Relativbewegung die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}_{32} = \mathfrak{v}_{31} - \mathfrak{v}_{21}.$$

Was die Beschleunigungen anbelangt, so ist hier $w_{21} = 0$, da der Wagen sich gleichförmig bewegen soll, und $w_{31} = g$, da der Punkt A_3 frei herabfällt. Infolgedessen wird die Relativbeschleunigung

$$w_r = w_{32} = w_{31} - w_{21} = g.$$

26. Relativbewegung eines Punktes gegen einen sich drehenden starren Körper. Der Körper K_2 vollzieht gegen den Körper K_1 eine Drehung. In diesem Falle werden wir sehen, daß die Ermittlung der Relativgeschwindigkeit des Punktes A_3 gegen den Körper K_2 zu denselben Ergebnissen führt wie in dem Falle,

daß der Körper K_2 gegen K_1 eine Schiebung ausführt, daß aber die Ermittlung der Relativbeschleunigung sich wesentlich anders gestaltet.

Wir bringen zunächst die bereits in Ziff. 7 gefundene Darstellung der Geschwindigkeit und Beschleunigung desjenigen Punktes A_3 des Körpers K_2, der mit dem Punkt A_2 augenblicklich zusammenfällt, auf eine vektorielle Form. Zu dem Zweck legen wir von einem beliebigen Punkt O der Drehachse D aus (Abb. 64) den Vektor $\mathfrak{o}$ der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung des Körpers K_2 gegen den Körper K_1 in die Drehachse und beachten, daß natürlich auch die Winkelbeschleunigung $\varepsilon = d\omega/dt$ sich als ebensolcher Vektor $\mathfrak{e}$ in der Drehachse darstellen läßt. Ist dann $\mathfrak{r}_{31}$ der Fahrstrahl von O nach A_3, so bedeutet das Vektorprodukt $[\mathfrak{o}\mathfrak{r}_{31}]$ einen Vektor, der auf der Ebene der Vektoren $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{r}_{31}$ in solchem Sinne senkrecht steht, wie dies auch der Vektor $\mathfrak{v}_{31}$ der Geschwindigkeit des Punktes A_3 auf seiner Kreisbewegung um die Drehachse tut. Ist mit α der Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{r}_{31}$ bezeichnet, so hat das Vektorprodukt $[\mathfrak{o}\mathfrak{r}_{31}]$ den Betrag $\omega|\mathfrak{r}_{31}|\sin\alpha = FA_3\cdot\omega = v_{31}$, und daher darf man setzen

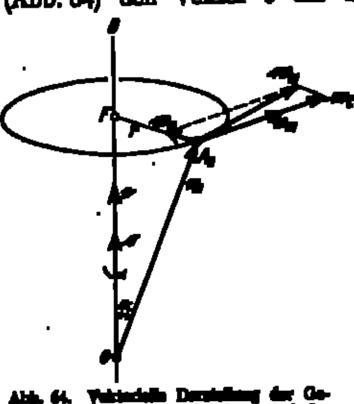


Abb. 64. Vektorielle Darstellung der Geschwindigkeit und Beschleunigung bei der Drehbewegung.

$$\mathfrak{v}_{31} = [\mathfrak{o}\mathfrak{r}_{31}]. \tag{1}$$

Hieraus folgt nach Ziff. 6, Gleichung (1) die Beschleunigung des Punktes A_3

$$\mathfrak{w}_{31} = \frac{d\mathfrak{v}_{31}}{dt} = \left[\frac{d\mathfrak{o}}{dt}\mathfrak{r}_{31}\right] + \left[\mathfrak{o}\frac{d\mathfrak{r}_{31}}{dt}\right],$$

wofür man wegen $d\mathfrak{o}/dt = \mathfrak{e}$ und $d\mathfrak{r}_{31}/dt = \mathfrak{v}_{31} = [\mathfrak{o}\mathfrak{r}_{31}]$ auch schreiben kann

$$\mathfrak{w}_{31} = [\mathfrak{e}\mathfrak{r}_{31}] + [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_{31}] = [\mathfrak{e}\mathfrak{r}_{31}] + \big[\mathfrak{o}[\mathfrak{o}\mathfrak{r}_{31}]\big]. \tag{2}$$

Der erste Vektor rechts liegt in der Tangente der Kreisbahn des Punktes A_3 und ist daher die Tangentialbeschleunigung $\mathfrak{w}_t$ mit dem schon in Ziff. 7 gefundenen Betrag εr, unter r den Kreishalbmesser FA_3 verstanden; der zweite Vektor rechts liegt in der Hauptnormale der Kreisbahn, weist nach dem Kreismittelpunkt F und besitzt den von Ziff. 7 her für die Normalbeschleunigung $\mathfrak{w}_n$ bekannten Betrag $r\omega^2$.

Wir gehen nun zur Geschwindigkeit des Punktes A_2 über. Genau wie schon in Ziff. 25 gilt nach dem Parallelogrammgesetz der Geschwindigkeiten auch hier wieder für die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ des Punktes A_2 gegen den Körper K_2

$$\mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}_{21} - \mathfrak{v}_{31}, \tag{3}$$

wenn $\mathfrak{v}_{21}$ seine Geschwindigkeit gegen K_1 und $\mathfrak{v}_{31}$ die Geschwindigkeit desjenigen Punktes A_3 von K_2 ist, der augenblicklich mit A_2 zusammenfällt. Es ist zweckmäßig, diese Gleichung gemäß (1) und gemäß Ziff. 4, Gleichung (1) auch noch in der Form zu schreiben

$$\frac{d'\mathfrak{r}_{21}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}_{21}}{dt} - [\mathfrak{o}\mathfrak{r}_{21}], \tag{4}$$

wo das Symbol d' die Differentiation bedeutet, wie sie ein die Drehung ω mitmachender Beobachter vom Körper K_2 aus vornehmen würde. Diese Gleichung gibt, wie in der Vektorrechnung gezeigt wird, ganz allgemein für jeden Vektor, der sich wie ein Fahrstrahl verhält, das Gesetz des Zusammenhangs zwischen

„absoluter" und „relativer" Differentiation bei rotierendem Bezugsystem an und darf daher auch auf den Vektor $\mathfrak{v}_{III}$ angewandt werden:

$$\frac{d'\mathfrak{v}_{III}}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_{III}}{dt} - [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_{III}].$$

Setzt man hier aus (3) $\mathfrak{v}_{III} = \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_{II}$ ein, so kommt

$$\frac{d'\mathfrak{v}_r}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_{III}}{dt} - \frac{d'\mathfrak{v}_{II}}{dt} - [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_r] - [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_{II}].$$

Führt man statt $\mathfrak{v}_{II}$ seine Werte aus (4) ein, so wird daraus

$$\frac{d'\mathfrak{v}_r}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_{III}}{dt} - \left[\frac{d'\mathfrak{o}}{dt}\,\mathfrak{r}_{III}\right] - \left[\mathfrak{o}\,\frac{d'\mathfrak{r}_{III}}{dt}\right] - [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_r] - [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_{II}].$$

Hierin ist $d'\mathfrak{r}_{III}/dt = \mathfrak{v}_r$ und $d'\mathfrak{o}/dt = d\mathfrak{o}/dt = \mathfrak{e}$ zu setzen (da ja die Winkelbeschleunigung $\mathfrak{e}$ auch von einem Beobachter auf dem Körper K_2 in ihrer vollen Stärke wahrgenommen wird), und so hat man

$$\frac{d'\mathfrak{v}_r}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_{III}}{dt} - [\mathfrak{e}\mathfrak{r}_{III}] - [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_{II}] - 2[\mathfrak{o}\mathfrak{v}_r]. \tag{5}$$

Nun bedeutet aber $d'\mathfrak{v}_r/dt = \mathfrak{w}_r$ die gesuchte Relativbeschleunigung von A_3 gegen K_2 und ebenso $d\mathfrak{v}_{III}/dt = \mathfrak{w}_{III}$ die Beschleunigung von A_3 gegen K_1. Ferner stellt gemäß (2) der zweite und dritte Vektor der rechten Seite die negative Beschleunigung $-\mathfrak{w}_{II}$ desjenigen Punktes von K_2 dar, der augenblicklich mit A_3 zusammenfällt. Den negativen letzten Vektor rechts nennt man die Coriolisbeschleunigung:

$$\mathfrak{w}_c = -2[\mathfrak{o}\mathfrak{v}_r] = 2[\mathfrak{v}_r\mathfrak{o}] \tag{6}$$

und kann somit statt (5) kürzer schreiben

$$\mathfrak{w}_r = \mathfrak{w}_{III} - \mathfrak{w}_{II} + \mathfrak{w}_c. \tag{7}$$

Man darf also die Relativbeschleunigung $\mathfrak{w}_r$ nicht einfach in derselben Weise bilden wie nach (3) die Relativgeschwindigkeit, nämlich als Differenz der Vektoren $\mathfrak{w}_{III}$ und $\mathfrak{w}_{II}$, sondern hat eine Zusatzbeschleunigung $\mathfrak{w}_c$ hinzuzufügen, die jetzt noch weiterer Erörterung bedarf.

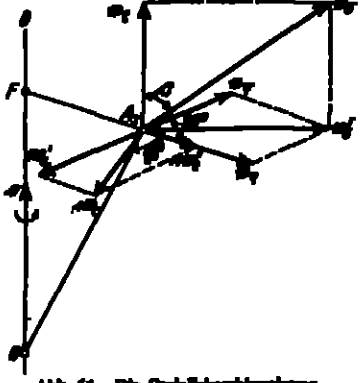


Abb. 65. Die Coriolisbeschleunigung.

Man zerlege (Abb. 65) die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ in eine Komponente $\mathfrak{v}_\zeta$ parallel zur Drehachse D und in eine dazu senkrechte Komponente $\mathfrak{v}_r'$ vom Betrag $v_r' = v_r \sin\beta$, falls β der Winkel ist, unter welchem $\mathfrak{v}_r$ die Drehachse kreuzt. Weiter zerlege man $\mathfrak{v}_r'$ in der zur Drehachse senkrechten Ebene durch A_3 in eine radiale Komponente $\mathfrak{v}_\varrho$ und in eine zirkulare $\mathfrak{v}_\varphi$. Dann liefert die Komponente $\mathfrak{v}_\zeta$ wegen $[\mathfrak{v}_\zeta\mathfrak{o}] = 0$ keinen Beitrag zur Coriolisbeschleunigung; die Komponente $\mathfrak{v}_\varrho$ liefert einen zirkularen Beitrag $\mathfrak{w}_c' = 2[\mathfrak{v}_\varrho\mathfrak{o}]$ vom Betrag $w_c' = 2v_\varrho\omega$ und die Komponente $\mathfrak{v}_\varphi$ einen radialen Beitrag $\mathfrak{w}_c'' = 2[\mathfrak{v}_\varphi\mathfrak{o}]$ vom Betrag $w_c'' = 2v_\varphi\omega$. Deren Resultante ist die ganze Coriolisbeschleunigung $\mathfrak{w}_c = 2[\mathfrak{v}_r'\mathfrak{o}]$ vom Betrag $2v_r\omega\sin\beta$. Der Vektor $\mathfrak{w}_c$ steht senkrecht zu den drei Vektoren $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{v}_r$ und $\mathfrak{v}_r'$, liegt also in einer zur Drehachse senkrechten Ebene, und seine Richtung geht aus derjenigen von $\mathfrak{v}_r'$ hervor, wenn man den Vektor $\mathfrak{v}_r'$ in dieser Ebene um 90° entgegen der Drehung $\mathfrak{o}$ dreht.

Wir erhalten somit das Ergebnis: Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ der Relativbewegung eines Punktes A_3 gegen einen Körper K_2, der sich um eine im Bezugskörper K_1 ruhende Achse D mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, setzt sich aus folgenden drei Komponenten zusammen: 1. der Beschleunigung $\mathfrak{w}_{31}$ der absoluten Bewegung des Punktes A_3, d. h. seiner Bewegung gegen K_1, 2. der entgegengesetzt genommenen Beschleunigung $\mathfrak{w}_{21}$ desjenigen Punktes des sich drehenden Körpers K_2, der augenblicklich mit dem bewegten Punkte A_3 zusammenfällt, 3. der Coriolisbeschleunigung $\mathfrak{w}_c$, welche die Drehachse D senkrecht kreuzt und auf der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ senkrecht steht. Die Coriolisbeschleunigung $\mathfrak{w}_c$ hat die Größe $w_c = 2\omega v_r \sin\beta$, wobei β der Winkel ist, den $\mathfrak{v}_r$ mit der Drehachse D einschließt. Die Richtung der Coriolisbeschleunigung erhält man, wenn man die zur Drehachse senkrechte Komponente $\mathfrak{v}_r'$ der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ in der zur Drehachse senkrechten Ebene entgegengesetzt dem Drehsinne der Winkelgeschindigkeit ω um 90° dreht. In Abb. 66 sind die Beschleunigungen $\mathfrak{w}_{31}$, $\mathfrak{w}_{21}$ und $\mathfrak{w}_c$ sowie die Relativbeschleunigung $\mathfrak{w}_r = \mathfrak{w}_{31} - \mathfrak{w}_{21} + \mathfrak{w}_c$ eingetragen.

Abb. 66. Relativbeschleunigung bei sich drehendem Bezugskörper.

Bisher war die Aufgabe behandelt worden, die Relativbewegung eines Punktes A_3 gegen einen Körper K_2 zu untersuchen, der sich gegen einen Körper K_1 um eine ruhende Drehachse dreht, wenn diese Drehbewegung sowie die Bewegung von A_3 gegen K_1 bekannt ist. Bei der Umkehrung dieser Aufgabe ist die Drehbewegung des Körpers K_2 gegen K_1 und ferner die Relativbewegung des Punktes A_3 gegen den sich drehenden Körper K_2 gegeben, während die Bewegung des Punktes A_3 gegen den Bezugskörper K_1 ermittelt werden soll. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{31}$ des Punktes A_3 gegen K_1 ergibt sich zu

$$\mathfrak{v}_{31} = \mathfrak{v}_{32} + \mathfrak{v}_{21}, \tag{8}$$

d. h. die Geschwindigkeit des Punktes A_3 gegen K_1 ist die vektorielle Summe der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{32}$ des Punktes A_3 gegen K_2 und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ desjenigen Punktes des Körpers K_2 gegen K_1, der augenblicklich mit A_3 zusammenfällt. Für die Beschleunigung finden wir gemäß (7)

$$\mathfrak{w}_{31} = \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_{21} - \mathfrak{w}_c. \tag{9}$$

Dieses Ergebnis können wir in folgender Weise aussprechen: Wenn man die Relativbewegung eines Punktes A_3 gegen einen Körper K_2 kennt, der sich um eine ruhende Achse D gegen einen Körper dreht, und auch diese Drehbewegung bekannt ist, so findet man die Beschleunigung des Punktes A_3 gegen den Körper K_1 als vektorielle Summe aus folgenden drei Komponenten: 1. der Beschleunigung $\mathfrak{w}_r$ der Relativbewegung des Punktes A_3 gegen K_2, 2. der Beschleunigung $\mathfrak{w}_{21}$ desjenigen Punktes des sich drehenden Körpers K_2 gegen K_1, der augenblicklich mit A_3 zusammenfällt, 3. der negativen Coriolisbeschleunigung $\mathfrak{w}_c$, d. h. der Beschleunigung von der Größe $w_c = 2\omega v_r \sin\beta$, die die Drehachse D senkrecht kreuzt und auf der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ senkrecht steht. Da hier $\mathfrak{w}_c$ mit negativem Vorzeichen erscheint, so ist $\mathfrak{w}_c$ in der durch den Drehsinn der Winkelgeschwindigkeit ω angegebenen Richtung aufzutragen, d. h. in der Richtung, in welche die zur Drehachse senkrechte Komponente $\mathfrak{v}_r'$ der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r$ zeigt, wenn man sie im Drehsinn der Winkelgeschwindigkeit ω um 90° dreht.

27. Anwendung auf das Kurbelschleifengetriebe. Als Beispiel soll das ebene Schleifkurbelgetriebe betrachtet werden (Abb. 67). Das ruhende Glied K_1

trägt die beiden Gelenkpunkte D und E. Um E dreht sich die Kurbel EA_2 von der Länge r_2 mit gegebener Winkelgeschwindigkeit ω_{21} und gegebener Winkelbeschleunigung ε_{21}. Der Kurbelendpunkt A_2 trägt ein Gleitstück, das auf der Schleifkurbel K_3 gleitet, die sich um den Punkt D drehen kann. Durch die Größen ω_{21} und ε_{21} ist die Bewegung des Punktes A_2 gegen den ruhenden Körper K_1 bestimmt. Die Bewegung der Schleifkurbel K_3 und die Relativbewegung von A_2 gegen K_3, d. h. die Gleitbewegung von A_2 und insbesondere die entsprechenden Beschleunigungen sind zu ermitteln.

Man verfährt in folgender Weise. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{21}$ des Punktes A_2 hat die bekannte Größe $v_{21} = r_2\omega_{21}$ und steht senkrecht auf EA_2. Zieht man durch den Endpunkt F des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}_{21}$ die Senkrechte zu A_2D, die die Gleitstange des Körpers K_3 in G schneidet, so ist $A_2G = \mathfrak{v}_{23} = \mathfrak{v}_r$ der Geschwindigkeitsvektor für die Gleitbewegung, d. h. für die Relativbewegung des Punktes A_2 gegen den Körper K_3. Der Vektor $GF = \mathfrak{v}_{31}$ ist dagegen die Geschwindigkeit desjenigen Punktes des Körpers K_3, der augenblicklich mit A_2 zusammenfällt. Die Abb. 67 zeigt, daß tatsächlich die Beziehung $\mathfrak{v}_{21} = \mathfrak{v}_{23} + \mathfrak{v}_{31}$ erfüllt ist. Hieraus findet man die Winkelgeschwindigkeit ω_{31} des Körpers K_3, denn es ist

$$\omega_{31} = \frac{v_{31}}{DA_2}.$$

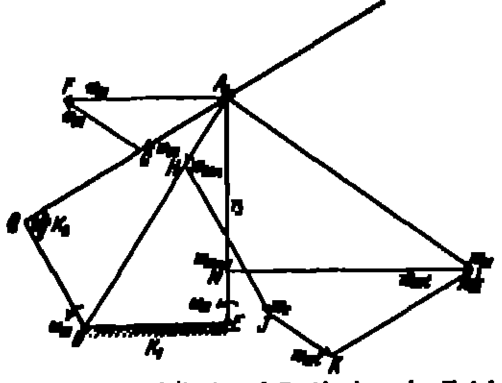


Abb. 67. Geschwindigkeit und Beschleunigung im Kurbelschleifengetriebe.

Bei der Ermittlung der Beschleunigungen gehen wir von der Beziehung (9) von Ziff. 26

$$\mathfrak{w}_{21} = \mathfrak{w}_{23} + \mathfrak{w}_{31} - \mathfrak{w}_c$$

aus, bei der $\mathfrak{w}_{23} = \mathfrak{w}_r$ die Relativbeschleunigung, d. h. die noch unbekannte Gleitbeschleunigung des Punktes A_2 gegen den Körper K_3 ist. Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_{21}$ ist die Beschleunigung der Bewegung des Punktes A_2 gegen den ruhenden Körper K_1, d. h. der Bewegung des Punktes A_2 auf dem Kreise um E, und zwar setzt sich $\mathfrak{w}_{21}$ aus der Normalkomponente $\mathfrak{w}_{21n} = A_2N$ in Richtung von A_2E und der dazu senkrechten Tangentialkomponente $\mathfrak{w}_{21t} = NL$ zusammen. Diese beiden Komponente sind bekannt, denn es ist $w_{21n} = r_2\omega_{21}^2$ und $w_{21t} = r_2\varepsilon_{21}$. Die Beschleunigung $\mathfrak{w}_{31}$, d. h. die Beschleunigung desjenigen Punktes von K_3, der augenblicklich mit A_2 zusammenfällt, hat die bekannte Normalkomponente $\mathfrak{w}_{31n} = A_2H$, die in der Geraden A_2D liegt und die Größe $w_{31n} = \frac{v_{31}^2}{A_2D} = A_2D \cdot \omega_{31}^2$ besitzt, und die noch unbekannte zu $\mathfrak{w}_{31n}$ senkrechte Tangentialkomponente $\mathfrak{w}_{31t}$. Die Coriolisbeschleunigung $\mathfrak{w}_c$ hat, da hier der Winkel β zwischen der Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}_{23}$ und der zur Ebene des Getriebes senkrechten Drehachse D gleich $90°$ ist, die Größe $w_c = 2\omega_{31}v_{23} = 2\frac{v_{31}v_{23}}{A_2D}$, die wir hiernach berechnen können. Da hier die Coriolisbeschleunigung negativ zu nehmen ist, so erhalten wir ihre Richtung, wenn wir die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_{23}$ im Sinne der Winkelgeschwindigkeit ω_{31} um $90°$ drehen. Wir können nun schreiben

$$\mathfrak{w}_{21} = \mathfrak{w}_{23} + (\mathfrak{w}_{31n} + \mathfrak{w}_{31t}) + (-\mathfrak{w}_c).$$

Hierin sind sämtliche Vektoren der Richtung nach bekannt, unbekannt sind

noch die Größen der Beschleunigungen $\mathfrak{w}_{32}$ bzw. $\mathfrak{w}_{31t}$. Wir ziehen durch den Punkt H (Abb. 67) den Vektor $HJ = -\mathfrak{w}_c$ und legen dann durch J zu A_3D eine Senkrechte, welche die durch L zur Gleitrichtung des Punktes A_3 gezogene Parallele im Punkte K schneidet. Dann stellt JK die Beschleunigung $\mathfrak{w}_{31t}$ und KL die Gleitbeschleunigung $\mathfrak{w}_{32}$ dar.

Man kann hier auch rein zeichnerisch vorgehen. Man benutzt dann an Stelle der Geschwindigkeitsvektoren die um 90° gedrehten Geschwindigkeiten, die durch Klammern gekennzeichnet sind (Abb. 68). Man trägt auf EA_3 die gegebene Geschwindigkeit $(\mathfrak{v}_{30}) = A_3(F)$ in irgendeinem Maßstabe auf, zieht durch (F) zur Gleitstange QA_3 die Senkrechte, welche DA_3 in (G) und QA_3 in C schneidet, und erhält damit die Geschwindigkeitsvektoren $(\mathfrak{v}_{31}) = A_3(G)$ und $(\mathfrak{v}_{32}) = (G)(F)$. Nun konstruieren wir die Normalbeschleunigung $\mathfrak{w}_{30n} = A_3N$, indem wir durch E zu QA_3 die Senkrechte EB und durch C zu $B(F)$ die Parallele ziehen, die A_3E in N schneidet. Dann aus ähnlichen Dreiecken folgt

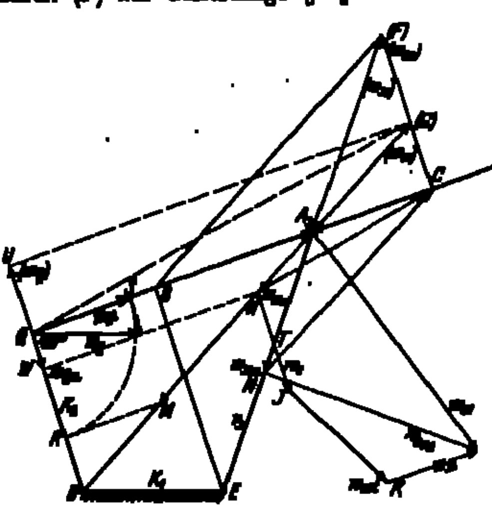


Abb. 68. Zeichnerische Ermittlung der Geschwindigkeit und Beschleunigung im Kurbelschleifengetriebe.

$$\frac{A_3N}{A_3(F)} = \frac{A_3C}{A_3B} = \frac{A_3(F)}{A_3E}$$

und hieraus

$$A_3N = \frac{A_3(F)^2}{A_3E} = \frac{\mathfrak{v}_{30}^2}{r_3} = \mathfrak{w}_{30n}.$$

In N tragen wir die zu $\mathfrak{w}_{30n}$ senkrechte Tangentialbeschleunigung $\mathfrak{w}_{30t} = NL$ an, deren Größe gegeben ist. Dann ermitteln wir die Normalbeschleunigung $\mathfrak{w}_{31n} = A_3H$, indem wir durch C zu $Q(G)$ die Parallele ziehen, die A_3D in H schneidet. Aus ähnlichen Dreiecken folgt nämlich

$$\frac{A_3H}{A_3(G)} = \frac{A_3C}{A_3Q} = \frac{A_3(G)}{A_3D}$$

und hieraus

$$A_3H = \frac{A_3(G)^2}{A_3D} = \frac{\mathfrak{v}_{31}^2}{A_3D} = \mathfrak{w}_{31n}.$$

Um die Coriolisbeschleunigung $\mathfrak{b}_c$ zu finden, deren Größe zu $\mathfrak{w}_c = 2\frac{\mathfrak{v}_{31}\cdot\mathfrak{v}_{32}}{A_3D}$ ermittelt wurde, ziehen wir durch H zu AQ die Senkrechte, die A_3F in T schneidet, und verlängern die Strecke HT um $TJ = HT$. Dann ist nämlich

$$HT = A_3H\cdot\frac{(G)(F)}{A_3(G)} = \frac{\mathfrak{v}_{31}^2}{A_3D}\cdot\frac{\mathfrak{v}_{32}}{\mathfrak{v}_{31}} = \frac{\mathfrak{v}_{31}\mathfrak{v}_{32}}{A_3D} = \frac{1}{2}\mathfrak{w}_c.$$

Durch J ziehen wir zu A_3D die Senkrechte, welche die durch L zu QA_3 gezogene Parallele in K schneidet. Dann ist $JK = \mathfrak{w}_{31t}$ und $KL = \mathfrak{w}_{32}$. Man kann noch verlangen, daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_Q$ und die Beschleunigung $\mathfrak{w}_Q$ eines Punktes des Körpers K_2, etwa des Punktes Q, ermittelt werden soll. Die um 90° gedrehte Geschwindigkeit $(\mathfrak{v}_Q) = QU$ erhalten wir, indem wir durch (G) zu A_3Q die Parallele ziehen, welche die Gerade DQ in U schneidet. Um die Beschleunigung $\mathfrak{w}_Q$ zu finden, beachten wir, daß bei einem sich um eine ruhende Achse drehenden Körper sowohl die Normal- wie auch die Tangentialbeschleunigung dem Abstande des be-

trachteten Punktes von der Drehachse proportional ist. Da wir aber die beiden Beschleunigungskomponenten $\mathfrak{w}_{21n}$ und $\mathfrak{w}_{21t}$ eines Punktes des Körpers K_2 kennen, und zwar desjenigen Punktes, der augenblicklich mit A_2 zusammenfällt, so erhalten wir hieraus die Normal- und die Tangentialbeschleunigung des Punktes Q in folgender Weise. Die Parallele zu A_2Q durch H schneidet die Gerade DK in W und es ist $QW = \mathfrak{w}_{Qn}$. Um die Tangentialbeschleunigung $\mathfrak{w}_{Qt}$ zu erhalten, trägt man auf A_2D die Strecke $A_2M = JK = \mathfrak{w}_{21t}$ auf, zieht durch M zu A_2Q die Parallele, die QD in R schneidet. Dann dreht man QR um 90° um den Punkt Q in die Lage QS, und zwar in dem Sinne, in dem man A_2M um A_2 drehen muß, damit es in die Richtung JK gelangt. Die Strecke QS stellt dann die Tangentialbeschleunigung $\mathfrak{w}_{Qt}$ dar. Setzt man $\mathfrak{w}_{Qn}$ und $\mathfrak{w}_{Qt}$ zusammen, so erhält man die Beschleunigung $\mathfrak{w}_Q$ des Punktes Q des Körpers K_2.

28. Die freie Bewegung starrer Körper. Wenn zwei Lagen K_1 und K_2 eines Körpers K vorgelegt sind, so kann man zeigen, daß der Körper K stets durch eine Schraubung von K_1 nach K_2 gelangen kann. Die Lagen des Körpers K seien durch die Lagen seines Grunddreieckes ABC (Abb. 69) be-

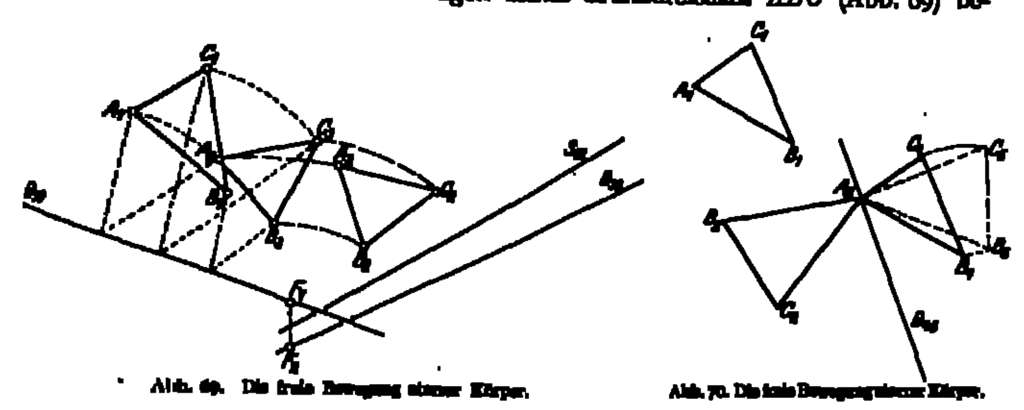


Abb. 69. Die freie Bewegung starrer Körper.

Abb. 70. Die freie Bewegung starrer Körper.

stimmt. Man dreht um die Schnittlinie D_{13} der Ebenen der beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ das Dreieck $A_1B_1C_1$ in die Lage $A_3B_3C_3$, die in der Ebene des Dreiecks $A_2B_2C_2$ liegt. Durch eine weitere Drehung um die Achse D_{32}, die auf der Ebene des Dreiecks $A_2B_2C_2$ senkrecht steht, läßt sich das Dreieck $A_3B_3C_3$ in die Lage $A_2B_2C_2$ bringen. Wir sehen also, daß der Körper K sich aus der Lage K_1 nach der Lage K_2 durch zwei Drehungen um die Achsen D_{13} und D_{32} bewegen läßt, die sich im allgemeinen kreuzen. Die Zusammensetzung dieser beiden Drehungen ergibt eine Schraubung, deren Achse S_{12} den kürzesten Abstand der beiden Drehachsen D_{13} und D_{32} senkrecht schneidet. Da dieses Ergebnis auch für unendlich benachbarte Lagen K_1 und K_2 gilt, so finden wir, daß im allgemeinen jede freie Elementarbewegung eines starren Körpers ein Elementarschraubung ist.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man auch, wenn man den Körper K_1 durch eine Schiebung so bewegt, daß das Grunddreieck aus der Lage $A_1B_1C_1$ in die Lage $A_4B_4C_4$ gelangt (Abb. 70), wobei die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_4B_4C_4$ einander parallel sind. Dann drehen wir um die Schnittlinie D_{45} der Ebenen dieser beiden Dreiecke das Dreieck $A_4B_4C_4$ in die Lage $A_5B_5C_5$, die in der Ebene des Dreieckes $A_2B_2C_2$ liegt und können schließlich durch eine Drehung um eine zur Ebene der Dreiecke $A_5B_5C_5$ und $A_2B_2C_2$ senkrechte Achse D_{52} das Dreieck $A_5B_5C_5$ in die Lage $A_2B_2C_2$ überführen. Die Zusammensetzung der Schraubung mit den beiden Drehungen ergibt im allgemeinen wieder eine Schraubung.

Bei der unendlich kleinen Bewegung eines Körpers, die im allgemeinen also eine Elementarschraubung ist, existiert stets eine eindeutig bestimmte **momentane Schraubenachse**, die man auch die **Momentanachse** nennt. Während der allgemeinen Elementarbewegung dreht sich der Körper um die Momentanachse, und zwar um einen unendlich kleinen Drehwinkel und verschiebt sich zugleich um eine unendlich kleine Strecke in Richtung der Momentanachse. Der Geschwindigkeitszustand der Elementarschraubung ist durch die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ und die Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in Richtung der Momentanachse gegeben. Die Größe $s = v/\omega$ nennt man den **Schraubenparameter**.

Wegen der späteren Anwendung in der Kinetik des starren Körpers mag hier noch kurz erwähnt werden, daß in der Sprache der Motorrechnung[1]) die Elementarschraubung sich durch einen Motor $\mathfrak{M}$ darstellen läßt. Unter einem Motor $\mathfrak{M}$ versteht man den Inbegriff zweier in eine bestimmte Reihenfolge gesetzter eigentlicher Geraden a und b, die sich nicht rechtwinklig schneiden oder kreuzen dürfen. Die gemeinsame Normale beider Geraden heißt die **Achse** des Motors $\mathfrak{M}$; der Abstand der Geraden heißt seine **Länge** und wird durch einen in der Achse liegenden, von der ersten Geraden a zur zweiten b hin gezogenen Vektor $\mathfrak{M}_s$ dargestellt; der Tangens des von den Geraden a, b eingeschlossenen Winkels $\varphi < 90°$ heißt die **Öffnung** des Motors und wird durch einen ebenfalls in der Motorachse liegenden Vektor $\mathfrak{W}$ vom Betrag $\operatorname{tg}\varphi$ dargestellt, wobei seine Richtung eine Rechtsschraube zusammen mit dem Drehsinne bilden soll, der die erste Gerade auf kürzestem Wege parallel zur zweiten b stellt. Die Zuordnung der Elementarschraubung mit der Verschiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_s$ und der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ zu einem Motor $\mathfrak{M}$ wird dann durch die Identitäten

$$\mathfrak{M}_s = \mathfrak{v}_s\,, \qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{w} \tag{1}$$

geleistet, und die Motorachse fällt mit der Schraubenachse (Momentanachse) zusammen.

Bezüglich der Rechengesetze für solche Motoren wird auf Kap. 6, Ziff. 13 verwiesen. Hier sei nur noch angemerkt, daß beispielsweise das Verfahren zur Zusammensetzung zweier Elementarschraubungen (Ziff. 23) sich in dem Additionsgesetz zweier Motoren spiegelt; ferner, daß der durch die Vektorformel

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_s + [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{W}] \tag{2}$$

definierte **Momentvektor** $\mathfrak{M}_0$ des Motors $\mathfrak{M}$ bezüglich eines Punktes O (wo $\mathfrak{r}_0$ der Fahrstrahl von O nach einem Punkte der Motorachse ist) im Falle des Schraubungsmotors $\mathfrak{M}$ den Vektor $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{u}_s + [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{w}]$ bedeutet; und dieser ist einfach die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, die der Punkt O infolge der Schraubung $\mathfrak{v}_s$, $\mathfrak{w}$ besitzt [vgl. Ziff. 26, Gleichung (1), worin jetzt $\mathfrak{r}_{21} = -\mathfrak{r}_0$ zu nehmen ist]: Die Geschwindigkeit irgendeines Punktes eines frei beweglichen starren Körpers ist gleich dem Momentvektor $\mathfrak{M}_0$ seines Schraubungsmotors $\mathfrak{M}$.

Man nennt die Vektoren $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{M}_0$, die übrigens den Motor $\mathfrak{M}$ vollständig bestimmen, auch wohl die **erste** und die **zweite Vektorkomponente** des Motors $\mathfrak{M}$ bezüglich O.

Jede allgemeine **endliche** Bewegung eines starren Körpers kann man als eine Aufeinanderfolge von Elementarschraubungen ansehen, deren Momentanachsen im bewegten wie auch in dem als ruhend angesehenen Bezugskörper je eine Regelfläche bilden. Den geometrischen Ort der Momentanachsen im bewegten Körper nennt man die **bewegte Achsenfläche** und denjenigen im Bezugskörper die **ruhende Achsenfläche**. Während der Bewegung berühren sich die beiden Achsenflächen in jedem Augenblick in der momentanen Schrauben-

[1]) R. v. MISES, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 4, S. 155 u. 193. 1924.

achse, um die sich der Körper momentan dreht und längs deren er sich verschiebt. Eine derartige Bewegung der beiden Achsenflächen nennt man eine **schrotende Bewegung** oder eine **Schrotung**. Wir finden also, daß man jede allgemeine endliche Bewegung eines starren Körpers durch die Schrotung einer mit dem bewegten Körper starr verbundenen Regelfläche auf einer im Bezugskörper ruhenden Regelfläche ersetzen kann.

Um zu ermitteln, welche Zahl von Größen erforderlich ist, um die allgemeine Elementarbewegung, d. h. die Elementarschraubung eines starren Körpers, zu bestimmen, wählen wir ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z (Abb. 71). Die Lage der momentanen Schraubenachse S ist, wie die Lage jeder beliebigen Geraden im Raume, durch **vier** Größen bestimmt, z. B. durch die Koordinaten der Spurpunkte A und B der Momentanachse in der x, y- und in der x, z-Ebene. Ferner müssen zur Bestimmung der Bewegung noch die Winkelgeschwindigkeit ω und die Größe v_s der Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_s$ gegeben sein. Wir finden also, daß wir zur Bestimmung der allgemeinen Elementarbewegung des frei beweglichen starren Körpers **sechs** Größen brauchen.

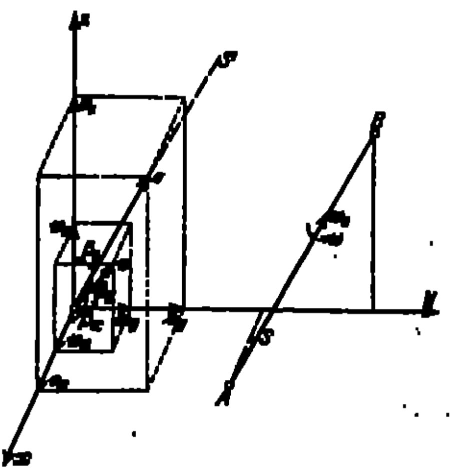


Abb. 71. Zerlegung der Elementarschraubung der freien Bewegung eines Körpers in drei Drehungen und drei Schiebungen.

Wir können die Elementarschraubung um die Momentanachse S zerlegen in eine Schraubung um die durch den Koordinatenanfang O gehende parallele Achse S' (Abb. 71), die mit den Koordinatenachsen die Winkel $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ bildet, und eine Schiebung senkrecht zur Ebene der beiden Achsen S und S'. Diese Schiebung setzen wir mit der Schiebung in Richtung der Momentanachse S' zusammen und finden damit, daß wir die vorgelegte Elementarschraubung in eine Drehung um eine durch den Koordinatenanfang O gehende Drehachse S' und in eine Schiebung zerlegen können, deren Richtung im allgemeinen natürlich nicht in die Richtung der Achse S' fällt. Wir zerlegen nun die Drehung um die Drehachse S', die mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ erfolgen möge, in die Komponenten $\mathfrak{o}_x, \mathfrak{o}_y, \mathfrak{o}_z$ in Richtung der Koordinatenachsen und erhalten entsprechend drei Drehungen um die Koordinatenachsen mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_x = \omega \cos\beta_x$, $\omega_y = \omega \cos\beta_y$, $\omega_z = \omega \cos\beta_z$. Ferner zerlegen wir die Schiebung in drei Schiebungen in Richtung der drei Koordinatenachsen mit den Schiebungsgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$. Hieraus folgt, daß wir, um die allgemeine Elementarbewegung eines starren Körpers zu bestimmen, die sechs Größen $\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_x, v_y, v_z$ beliebig, d. h. unabhängig voneinander, geben können. Auch hiernach ergibt sich, daß die allgemeine Elementarbewegung eines **frei beweglichen** starren Körpers durch **sechs** voneinander unabhängige Größen eindeutig bestimmt ist, die daher willkürlich gewählt werden können. Man führt hier den Begriff des **Freiheitsgrades** eines bewegten Körpers ein und sagt, der **frei bewegliche** starre Körper hat den Freiheitsgrad $f = 6$. Bei der nicht freien, d. h. der gebundenen Bewegung eines Körpers ist der Freiheitsgrad kleiner als sechs.

29. Die gebundene Bewegung starrer Körper. Die **gebundene** Bewegung eines starren Körpers ist eine solche, bei der der Körper sich nicht ganz beliebig, d. h. frei, bewegen kann, sondern in seiner Beweglichkeit beschränkt ist. Diese

Beschränkung kann hier, wo es sich nur um die Bewegungen als solche und nicht um ihre dynamischen Ursachen handelt, darauf zurückgeführt werden, daß der Körper bei seiner Bewegung gezwungen ist, andere Körper in bestimmter Weise zu berühren, oder daß bestimmte Punkte des Körpers überhaupt daran gehindert werden, sich zu bewegen.

Die Beschränkung der Bewegung hat zur Folge, daß zu ihrer Bestimmung nicht mehr sechs, sondern eine je nach der Art der Beschränkung geringere Anzahl von Größen erforderlich ist. Der Freiheitsgrad der gebundenen Bewegung ist daher $f = 6 - b$, wobei b eine durch die Art der Bewegungsbeschränkung bestimmte ganze Zahl ist, die zwischen 1 und 6 liegt. Im folgenden sollen einige der wichtigsten Bewegungsbeschränkungen betrachtet werden:

a) **Drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte werden festgehalten.** Da diese drei Punkte als Grunddreieck des Körpers angesehen werden können, so ist der Körper selbst dauernd in Ruhe. Er kann sich also überhaupt nicht bewegen, und sein Freiheitsgrad ist $f = 0$.

Abb. 72. Gebundene Bewegung: Zwei Punkte des Körpers werden festgehalten.

b) **Zwei Punkte P_1 und P_2 des Körpers werden festgehalten.** Hier kann der Körper nur eine Drehung um die Verbindungslinie der beiden festgehaltenen Punkte ausführen. Alle Punkte dieser Verbindungslinie (der Drehachse) bleiben in Ruhe. Bei dieser Bewegung, der Drehung um eine ruhende Achse, beschreiben alle Körperpunkte bestimmte Kreise, deren Ebenen zur Drehachse senkrecht stehen und deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen. Der Freiheitsgrad ist hier $f = 1$. Eine Bewegung, bei der $f = 1$ ist, bei der also alle Körperpunkte gezwungen sind, sich auf eindeutig bestimmten Bahnen zu bewegen, nennt man **zwangläufig**. Insbesondere müssen alle Glieder der Maschinengetriebe zwangläufig sein.

Auch hier kann man die Drehung um die als gegeben anzunehmende Achse D zerlegen in eine Drehung um die parallele Achse D', die durch den Ursprung O eines beliebig gewählten rechtwinkligen Koordinatensystems (Abb. 72) geht, und in eine zur Ebene beider Drehachsen senkrechte Schiebung, deren Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ die Größe $v = \omega e$ hat, wobei e den kürzesten Abstand der Drehachsen D und D' bedeutet. Dann kann man die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung um D' und ebenso die Schiebungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in Komponenten in Richtung der drei Koordinatenachsen zerlegen, so daß man wieder sechs Größen erhält, die jedoch sämtlich von der gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω der Drehung um die Achse D abhängen und durch sie eindeutig bestimmt sind. Wir erhalten also bei einem beliebig gewählten rechtwinkligen Koordinatensystem hier ebenfalls insgesamt sechs Bestimmungsgrößen wie bei der **freien** Bewegung, nur sind bei der **gebundenen** Bewegung diese sechs Größen nicht unabhängig voneinander. Insbesondere sind im Falle $f = 1$, d. h. bei der zwangläufigen Bewegung, durch eine einzige der sechs Größen alle anderen vollständig bestimmt.

c) **Ein Punkt P des Körpers wird festgehalten.** Hier ist jede Schiebung des Körpers ausgeschlossen, jedoch sind Drehungen um sämtliche Achsen, die durch den Punkt P gelegt werden können, möglich. Legt man durch P die

Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so kann man die Winkelgeschwindigkeiten ω_x, ω_y, ω_z der Drehungen um die Koordinatenachsen x, y, z willkürlich annehmen, da sie unabhängig voneinander gewählt werden können. Infolgedessen ist hier der Freiheitsgrad $f = 3$. Als Achsenflächen erhält man Kegelflächen, deren gemeinsame Spitze im ruhenden Punkte P liegt. Da ein Punkt der bewegten Achsenfläche in Ruhe ist, so geht das Schroten hier in ein Rollen der bewegten auf der ruhenden Achsenfläche über. Die Bewegung, bei der ein Punkt des Körpers in Ruhe bleibt, nennt man sphärische Bewegung, da bei ihr die Bahnen sämtlicher Körperpunkte auf konzentrischen Kugelflächen liegen.

d) Ein bestimmter Punkt A des Körpers wird auf einer gegebenen Kurve geführt, d. h. er wird gezwungen, sich auf dieser Kurve zu bewegen. Hier ist der Freiheitsgrad $f = 4$, denn der Körper kann eine Schiebung in Richtung der Kurventangente und Drehungen um sämtliche durch den geführten Punkt A gehende Achsen ausführen.

e) Ein bestimmter Punkt A des Körpers wird auf einer starren Fläche geführt. Der Freiheitsgrad ist $f = 5$, da hier Drehungen um alle Drehachsen durch A und ferner alle Schiebungen in Richtung der Tangentialebene der Fläche möglich sind. Nur Schiebungen in Richtung der Flächennormalen sind ausgeschlossen.

f) Der bewegte Körper berühre dauernd eine gegebene Fläche. Auch hier ist der Freiheitsgrad $f = 5$, da alle Bewegungen möglich sind mit der Ausnahme der Schiebung in Richtung der Flächennormalen. Der Berührungspunkt der Oberfläche des bewegten Körpers mit der gegebenen ruhenden Fläche wandert auf beiden Flächen und bildet dabei in jeder der beiden Flächen eine Kurve. Die beiden Kurven berühren sich im augenblicklichen Berührungspunkt der beiden Flächen. Im allgemeinen sind die entsprechenden Bogenlängen beider Kurven nicht einander gleich, so daß bei der Bewegung ein Gleiten auftritt. Das reine Gleiten liegt vor, wenn der Berührungspunkt seine Lage auf dem bewegten Körper nicht ändert. Wenn aber der Berührungspunkt auf beiden Flächen in Ruhe bleibt, dann ist nur eine Drehung um die gemeinschaftliche Berührungsfläche möglich. Eine solche Bewegung nennt man Bohren. Sind die entsprechenden Bogenlängen der beiden Kurven, auf welchen der Berührungspunkt wandert, in jedem Augenblick gleichlang, so nennt man die Bewegung ein Rollen oder Wälzen des Körpers auf der ruhenden Fläche. Als Beispiel kann man das Rollen einer Kugel auf einer Ebene anführen.

g) Der bewegte Körper berührt den ruhenden Bezugskörper in einer Fläche. Eine derartige Bewegung ist nur bei bestimmten Flächen möglich, den sog. selbsthüllenden Flächen, von denen hier die Ebene, die Rotationsflächen und die Schraubenflächen genannt seien. Bei der Berührung in Schraubenflächen und allgemeinen Rotationsflächen ist $f = 1$. Bei der speziellen Rotationsfläche des Kreiszylinders ist $f = 2$, denn hier sind Drehungen um die Zylinderachse und ferner Schiebungen in Richtung dieser Achse möglich, und diese beiden Bewegungen sind unabhängig voneinander, während bei der Berührung in Schraubenflächen die Axialverschiebung durch die Drehung um die Schraubenachse eindeutig bestimmt ist. Erfolgt die Berührung in Kugelflächen, so ist der Freiheitsgrad $f = 3$, da hier zwar keine Schiebungen, aber alle Drehungen um Achsen durch den Kugelmittelpunkt möglich sind. Die Bewegung, bei der der bewegte Körper den ruhenden immer in einer Ebene berührt, heißt die ebene Bewegung des Körpers. Sie ist in Ziff. 9 bis 13 behandelt worden. Bei ihr ist $f = 3$, da hier die beiden Schiebungen in Richtung der Ebene und die Drehu[illegible]
der Ebene möglich ist. Wird bei dieser ebenen Bewegung

Körpers K auf einer Kurve geführt (Abb. 73), so ist der Freiheitsgrad $f = 2$, da eine Schiebung in Richtung der Kurventangente und eine Drehung um die durch den Punkt A gehende und zur Berührungsebene der beiden Körper senkrechte Achse möglich ist. In dem Beispiel der Abb. 73 wird der Punkt A des Körpers K auf einem Kreise um den Punkt B geführt. Wenn bei der ebenen Bewegung zwei Punkte des bewegten Körpers K auf gegebenen Kurven geführt werden (Abb. 74), dann ist die Bewegung **zwangläufig** und der Freiheitsgrad ist $f = 1$. Dieser Fall tritt besonders häufig bei den ebenen Getrieben auf, die stets zwangläufig sein müssen.



Abb. 73. Gebundene Bewegung: Ein Punkt des Körpers wird auf einem Kreis geführt.

Abb. 74. Gebundene Bewegung: Zwei Punkte des Körpers werden auf gegebenen Kurven geführt.

Kapitel 6.

Geometrie der Kräfte und Massen.

Von

C. B. Biezeno, Delft.

Mit 48 Abbildungen.

I. Geometrie der Kräfte.

1. Kraft; Parallelogramm der Kräfte; Kräftepaar[1]). In Übereinstimmung mit dem in Kapitel 1, Ziff. 4, entwickelten statischen Kraftbegriff stellen wir fest, daß eine an einem starren Körper angreifende Kraft durch einen linienflüchtigen Vektor $\mathfrak{K}$ darstellbar ist, dessen Träger die Wirkungslinie der Kraft und dessen Größe, Richtung und Sinn die Kraft selbst vollständig bestimmen. Dieses geometrische Bild der Kraft wollen wir in gebräuchlicher Weise mit dem Namen Stab belegen.

Zwei in demselben Punkte angreifende Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ sind der Erfahrung nach gleichwertig mit einer durch denselben Punkt hindurchgehenden Einzelkraft, der sog. Resultierenden, deren Bild als Diagonale des aus $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zu konstruierenden Parallelogrammes erhalten wird.

Zwei in derselben Ebene wirkende Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ sind, dem Vorangehenden nach, stets durch eine Einzelkraft ersetzbar. Dies trifft auch dann noch zu, wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ einander parallel sind, obwohl man in diesem Falle die Resultierende nur in indirekter Weise konstruieren kann. Zu diesem Zwecke führt man (Abb. 1) zwei z. B. in die Gerade AB fallende, gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ ein, bestimmt die Resultierende sowohl von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ wie von $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{H}_2$ und setzt diese beiden Resultierenden in deren Schnittpunkt S zusammen. Wie leicht ersichtlich, ist die Größe der gesuchten Resultierenden gleich der algebraischen Summe von K_1 und K_2; ihre Wirkungslinie ist denjenigen von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ parallel und schneidet die Gerade AB in einem Punkt C, dessen Lage mit Hilfe des sog., auf Archimedes zurückzuführenden, Hebelgesetzes, nach welchem $K_1 \cdot AC = K_2 \cdot BC$, bestimmt werden kann. Nur wenn die Komponenten $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gleich groß und entgegen-

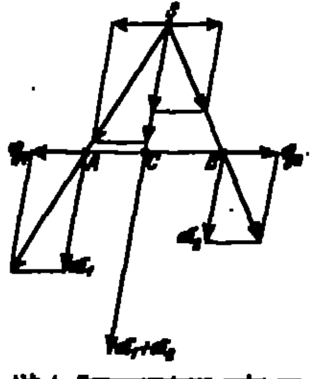


Abb. 1. Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte.

[1]) Deutsche Lehrbücher, welche den in Kapitel 6 dargestellten Stoff ausführlich behandeln, sind: E. Study, Geometrie der Dynamen. Leipzig 1903; H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte. Leipzig 1908; L. Henneberg, Die graphische Statik der starren Systeme. Leipzig 1911.

gesetzt gerichtet sind, tritt ein Ausnahmefall ein, es sei denn, daß man — was zu gewissen Zwecken, auf welche wir später noch zurückkommen, dienlich ist — eine im Unendlichen liegende Kraft der Größe Null als uneigentliches Element mit in den Kauf nimmt. Man sagt in diesem Falle: die beiden Kräfte bilden ein **Kräftepaar**.

Charakteristisch für ein solches Kräftepaar sind: 1. die Stellung der die Kräfte tragenden Ebene, 2. die Größe des von den beiden Kräften definierten Parallelogrammes, 3. der Umlaufsinn, welcher für den Umriß dieses Parallelogrammes durch die Kräfte festgelegt ist. Es zeigt sich nämlich, und zwar unter ausschließlicher Benutzung der bis jetzt gemachten Bemerkungen, daß zwei Kräftepaare mit parallelen Ebenen, gleichem Drehsinn und gleicher Parallelogrammfläche **statisch gleichwertig** sind, d. h. daß die Kräfte des einen Kräftepaares nach dem Parallelogrammgesetz zusammengestellt mit den umgekehrten Kräften des zweiten Paares eine im Endlichen liegende resultierende Kraft der Größe Null liefern.

Man ordnet also zweckmäßig einem Kräftepaar in der Weise einen Vektor zu, daß man, unter Zugrundelegung eines gewissen Maßstabes, senkrecht zur Ebene des Kräftepaares eine Strecke einführt, deren Länge gleich dem Inhalt des vom Kräftepaare bestimmten Parallelogrammes ist, und deren Richtung den von den Kräften bestimmten Umlaufsinn dieses Parallelogrammes festlegt (vgl. Ziff. 2). Wir nennen einen solchen Vektor einen **Momentvektor** und stellen fest, daß er im Sinne Grassmanns eine Plangröße repräsentiert, und zwar, weil die Lage der das Kräftepaar tragenden Ebene deren statische Bedeutung nicht beeinträchtigt, eine freie Plangröße.

Zwei verschiedene Kräftepaare sind unter Anwendung des Gesetzes vom Parallelogramm der Kräfte durch ein einziges Kräftepaar zu ersetzen, dessen Momentvektor sich ebenfalls nach dem Parallelogrammgesetze aus den Momentvektoren der beiden Kräftepaare herleiten läßt.

2. Das Moment einer Kraft in bezug auf einen Punkt und in bezug auf eine Gerade. Unter dem **Moment einer Kraft $\mathfrak{K}$ in bezug auf einen Punkt O** versteht man das Vektorprodukt $[\mathfrak{r}\mathfrak{K}]$ aus dem Kraftvektor $\mathfrak{K}$ und einem Radiusvektor $\mathfrak{r}$, welcher von O aus nach irgendeinem Punkte der Wirkungslinie von $\mathfrak{K}$, sagen wir nach dem Angriffspunkte von $\mathfrak{K}$, gezogen wird. Dieser Momentvektor repräsentiert also die Fläche des von den beiden Vektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{K}$ definierten Parallelogrammes; er steht auf der Parallelogrammebene in solchem Sinne senkrecht, daß er zusammen mit dem Drehsinn, der den Vektor $\mathfrak{r}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{K}$ auf kürzeste Weise überführt, eine Rechtsschraube bildet (Abb. 2).

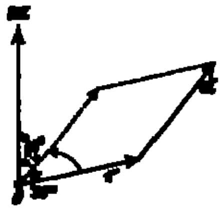


Abb. 2. Moment einer Kraft in bezug auf einen Punkt.

Projiziert man dieses Parallelogramm auf eine durch O hindurchgehende Ebene, welche wir die xy-Ebene nennen wollen, so daß $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}'$ projiziert wird, und ebenso den Momentvektor auf die zur xy-Ebene in O senkrecht stehende z-Achse, so sieht man ohne weiteres, daß die in diese Achse fallende Projektion der Momentvektor von $\mathfrak{K}'$ in bezug auf O ist. Man sagt, sie stellt das **Moment der Kraft $\mathfrak{K}$ in bezug auf die z-Achse** dar. Diese Aussage hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn das Moment von $\mathfrak{K}$ in bezug auf die z-Achse unabhängig von dem auf dieser Geraden liegenden Bezugspunkt O ist. Dies ist aber offensichtlich der Fall, denn das Moment von $\mathfrak{K}'$ in bezug auf O ist aufzufassen als das Produkt aus der Projektion von $\mathfrak{K}$ auf eine zur z-Achse senkrecht stehende Ebene und dem kürzesten Abstand der Wirkungslinie von $\mathfrak{K}$ und der z-Achse. In einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem $Oxyz$, in welchem

die Kraft $\mathfrak{K}$ die Komponenten X, Y, Z und der Angriffspunkt $\mathfrak{r}$ die Koordinaten x, y, z besitzt, hat der Momentvektor $\mathfrak{M}$, wie aus der Koordinatendarstellung des Vektorprodukts $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}]$ bekannt ist, die Komponenten

$$M_x = yZ - zY, \qquad M_y = zX - xZ, \qquad M_z = xY - yX.$$

Der unter Ziff. 1 definierte Momentvektor eines Kräftepaares ist dem Voranstehenden nach nichts anderes als die Summe der Momentvektoren der beiden, das Kräftepaar bildenden Kräfte in bezug auf einen willkürlichen Punkt ihrer Ebene. Man nennt diese Momentsumme kurz das **Moment des Kräftepaares** und kann leicht zeigen, daß das **Moment eines Kräftepaares vom Bezugspunkt unabhängig** ist. Wird ein Kräftepaar durch eine im Unendlichen liegende Kraft der Größe Null repräsentiert, so hat man dieser Kraft in bezug auf einen im Endlichen liegenden Punkt ein Moment beizulegen, welches dem Moment des Kräftepaares gleich ist.

Aus den gegebenen Definitionen geht hervor, daß das Moment einer Kraft in bezug auf einen Punkt oder eine Gerade ungeändert bleibt, wenn man die Kraft in ihrer Wirkungslinie verschiebt. Dasselbe trifft nach dem für die Vektormultiplikation geltenden distributiven Gesetze zu, wenn man die Kraft in zwei Komponenten zerlegt.

3. Die Arbeit einer Kraft. Unter der Arbeit, welche eine Kraft $\mathfrak{K}$ bei einer unendlich kleinen Verschiebung $d\mathfrak{r}$ ihres Angriffspunktes leistet, versteht man das skalare Produkt $\mathfrak{K}\,d\mathfrak{r}$ aus dem Kraftvektor $\mathfrak{K}$ und dem Vektor $d\mathfrak{r}$. Aus dieser Definition geht hervor, daß die von einer Kraft geleistete Arbeit gleich derjenigen Arbeit ist, welche von ihren Komponenten bei derselben Verschiebung ihres gemeinsamen Angriffspunktes geleistet wird.

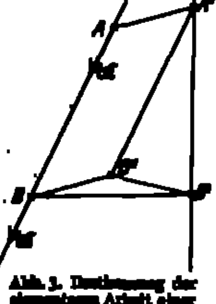


Abb. 3. Bestimmung der elementaren Arbeit einer Kraft.

Bewegt der Angriffspunkt der Kraft sich über eine endliche Strecke, sagen wir von A nach B, so hat man unter der von $\mathfrak{K}$ geleisteten Arbeit den Ausdruck $\int_A^B \mathfrak{K}\,d\mathfrak{r}$ zu verstehen. Greift die Kraft $\mathfrak{K}$ an einem starren Körper an, der eine willkürliche, unendlich kleine Bewegung erfährt, so ist ihre Arbeitsleistung unabhängig davon, welcher Punkt ihrer Wirkungslinie als Angriffspunkt angesehen wird.

Denkt man sich nämlich in zwei verschiedenen Punkten A und B dieser Wirkungslinie eine Kraft $\mathfrak{K}$ angebracht, so ist die Differenz dA der Arbeitsleistungen dieser beiden Kräfte, wenn A nach A', B nach B' kommt ($AB = A'B'$), das skalare Produkt

$$dA = \mathfrak{K}\left(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AA'}\right).$$

Nun ist (vgl. Abb. 3, wo $\overrightarrow{A'B''} = \overrightarrow{AB}$)

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB''} + \overrightarrow{B''B'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B''B'},$$

so daß

$$dA = \mathfrak{K}\,\overrightarrow{B''B'} = 0$$

wird, da ja bei unendlich kleinem Winkel $B'A'B''$ der Vektor $\overrightarrow{B''B'}$ auf AB senkrecht steht.

4. Reduktion des allgemeinen Kraftsystems; die Zentralachse. Zwei Kraftsysteme, welche man unter alleiniger Verwendung des Gesetzes vom Parallelogramm der Kräfte auseinander herleiten kann, und welche also in bezug auf jeden Punkt und jede Gerade dasselbe Moment aufweisen, nennen wir **statisch**

gleichwertig oder äquivalent. Wir gehen jetzt dazu über, zu zeigen, in welcher Weise ein allgemeines Kraftsystem auf ein anderes, damit gleichwertiges, „reduziert" werden kann. Als „Reduktionspunkt" führen wir den Punkt O ein und ordnen jeder Kraft $\mathfrak{K}_i$ des Systems zwei in diesem Punkte angreifende, gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte zu, welche dieselbe Richtung und dieselbe Stärke wie $\mathfrak{K}_i$ haben. Es entsteht so „die nach O verschobene" Kraft $\mathfrak{K}_i$ und ein Kräftepaar, das von der zweiten in O angebrachten und der ursprünglich gegebenen Kraft $\mathfrak{K}_i$ gebildet wird. Alle in O angreifenden Kräfte können zu einer einzigen, ebenfalls in O angreifenden Kraft $\mathfrak{R} = \sum \mathfrak{K}_i$ zusammengesetzt werden, alle übrigbleibenden Kräftepaare, mit Hilfe ihrer Momentvektoren $\mathfrak{M}_i$, zu einem einzigen Kräftepaar $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{M}_i$.

Im allgemeinen werden die die Einzelkraft und das resultierende Kräftepaar darstellenden Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ nicht gleichgerichtet sein. Es ist aber möglich, den Reduktionspunkt so zu wählen, daß dies zutrifft. Zerlegt man nämlich im Punkte O den Momentvektor $\mathfrak{M}$ in zwei zueinander senkrechte Komponenten $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, deren eine $\mathfrak{M}_1$ in die Richtung von $\mathfrak{R}$ fällt, so kann das Kräftepaar $\mathfrak{M}_2$ in einer durch $\mathfrak{R}$ hindurchgehenden Ebene derart durch zwei Kräfte von der Größe R repräsentiert werden, daß eine von diesen Kräften mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt und entgegengesetzten Sinn hat. Die übrigbleibende, mit $\mathfrak{R}$ gleichgerichtete Kraft liefert zusammen mit dem Kräftepaar $\mathfrak{M}_1$ die gewünschte Reduktion. Jeder Punkt der Wirkungslinie a dieser Kraft gibt, als Reduktionspunkt gewählt, natürlich dasselbe Resultat. Außerhalb der Geraden a, welche die **Zentralachse** des Kraftsystems genannt wird, gibt es keinen anderen Punkt, der zu einer Reduktion der verlangten Art führt.

Aus dem soeben Gesagten geht nämlich hervor, daß, wie der Reduktionspunkt auch gewählt werden möge, die resultierende Kraft in Richtung, Größe und Sinn stets mit $\mathfrak{R}$ übereinstimmt. Sollte also eine zweite Reduktion der betrachteten Art mit einem nicht auf a liegenden Reduktionspunkt möglich sein, so würden die in a fallenden Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ äquivalent sein mit zwei anderen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}'$, deren gemeinsamer Träger b parallel mit a sein würde. Es leuchtet unmittelbar ein, daß die Reduktion des in b fallenden Systems in bezug auf einen Punkt von a unmöglich die in a fallenden Vektoren $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$ liefern kann.

Nennt man a' die unendlich ferne Gerade der zu a senkrecht stehenden Ebenen, so ist also in eindeutiger Weise eine Reduktion des Kraftsystems auf zwei sich senkrecht kreuzende Kräfte möglich, von denen die eine ins Unendliche fällt und die Größe Null hat (vgl. eine in Ziff. 1 gemachte Bemerkung).

Man kann die Zentralachse eines Kraftsystems auch folgendermaßen finden. In bezug auf einen beliebigen Punkt O besitzen die Kräfte $\mathfrak{K}_i$ mit den Angriffspunkten $\mathfrak{r}_i$ die Momente $\mathfrak{M}_i = [\mathfrak{r}_i \mathfrak{K}_i]$; in bezug auf einen anderen Punkt A, dessen Fahrstrahl von O aus $\mathfrak{a}$ heißen soll, haben die Kräfte $\mathfrak{K}_i$ die Momente $\mathfrak{M}_i' = [(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{a})\mathfrak{K}_i] = \mathfrak{M}_i - [\mathfrak{a}\mathfrak{K}_i]$, und somit gilt für das resultierende Moment

$$\mathfrak{M}' = \sum \mathfrak{M}_i' = \mathfrak{M} - \sum [\mathfrak{a}\mathfrak{K}_i] = \mathfrak{M} - [\mathfrak{a}\sum \mathfrak{K}_i] = \mathfrak{M} - [\mathfrak{a}\mathfrak{R}]. \tag{1}$$

Hieraus folgt durch skalare Multiplikation mit der Resultante $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{M}'\mathfrak{R} = \mathfrak{M}\mathfrak{R}.$$

Es hat also der Ausdruck $\mathfrak{M}'\mathfrak{R}$ einen vom Bezugspunkt unabhängigen Wert; d. h. die Projektion M_a des resultierenden Momentvektors $\mathfrak{M}$ auf die Richtung des resultierenden Kraftvektors, nämlich

$$M_a = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{R}}{R},$$

ist eine für das Kräftesystem charakteristische Konstante. Hierbei ist der

Fall $\mathfrak{R} = 0$, in welchem das Kraftsystem einem einzigen Kräftepaar gleichwertig ist, natürlich ausgeschlossen.

Übrigens folgt aus dem oben Gesagten zugleich, daß ein Kraftsystem nur dann mit einer Einzelkraft gleichwertig sein kann, wenn $\mathfrak{M}\mathfrak{R} = 0$ ist. Umgekehrt braucht, wenn $\mathfrak{M}\mathfrak{R} = 0$ ist, das Kraftsystem nicht mit einer Einzelkraft äquivalent zu sein, weil diese Bedingung auch mit $\mathfrak{R} = 0$ erfüllt ist, in welchem Falle das Kraftsystem mit einem Kräftepaar gleichwertig ist.

Sehen wir weiterhin vom Falle $\mathfrak{R} = 0$ ab und fragen wir schließlich nach dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}'$ eines Bezugspunktes A auf der Zentralachse, für welchen also die Vektoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}'$ dieselbe Richtung haben, so muß — eben wegen der Richtungsgleichheit von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}'$ — das vektorielle Produkt $[\mathfrak{R}\mathfrak{M}'] = 0$ sein. Setzt man hier den Wert von $\mathfrak{M}'$ aus (1) ein, so kommt

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{M}] - [\mathfrak{R}[\mathfrak{r}'\mathfrak{R}]] = 0,$$

oder durch Anwendung einer bekannten Vektorregel

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{M}] - \mathfrak{r}'\cdot R^2 + \mathfrak{R}\cdot\mathfrak{r}'\mathfrak{R} = 0,$$

oder auch

$$\mathfrak{r}' - \frac{[\mathfrak{R}\mathfrak{M}]}{R^2} = \frac{\mathfrak{r}'\mathfrak{R}}{R^2}\cdot\mathfrak{R}. \tag{2}$$

Diese Gleichung besagt, daß für die Zentralachse der Vektor $\mathfrak{r}' - [\mathfrak{R}\mathfrak{M}]/R^2$ mit dem Vektor $\mathfrak{R}$ richtungsgleich ist.

In einem rechtshändigen kartesischen Koordinatensystem, in welchem $\mathfrak{r}'$ die Komponenten x', y', z', ferner $\mathfrak{R}$ die Komponenten R_x, R_y, R_z und $\mathfrak{M}$ die Komponenten M_x, M_y, M_z besitzt, lauten demnach die Gleichungen der Zentralachse

$$\frac{x' - \begin{vmatrix} R_y & R_z \\ M_y & M_z \end{vmatrix} : R^2}{R_x} = \frac{y' - \begin{vmatrix} R_z & R_x \\ M_z & M_x \end{vmatrix} : R^2}{R_y} = \frac{z' - \begin{vmatrix} R_x & R_y \\ M_x & M_y \end{vmatrix} : R^2}{R_z}. \tag{3}$$

6. Fortsetzung. Sind ein Punkt A und eine nicht durch ihn hindurchgehende Ebene α gegeben (vgl. Abb. 4), so kann jede Kraft $\mathfrak{K}$ eines Kraftsystems in ihrem Schnittpunkt S mit α in zwei Komponenten zerlegt werden, deren eine durch den Punkt A geht und deren andere in α liegt. Alle durch A hindurchgehenden Kräfte sowie alle in α liegenden Kräfte können je zu einer Einzelkraft zusammengesetzt werden. Das allgemeine Kraftsystem läßt sich also reduzieren auf zwei sich kreuzende Kräfte, wovon die eine durch einen vorgeschriebenen Punkt A hindurchgeht und die andere in einer vorgeschriebenen, nicht durch A hindurchgehenden Ebene α liegt. Wie man leicht einsieht, ist die Reduktion eindeutig. Liegt A in α, so ist die Reduktion im allgemeinen nicht möglich (vgl. übrigens Ziff. 6).

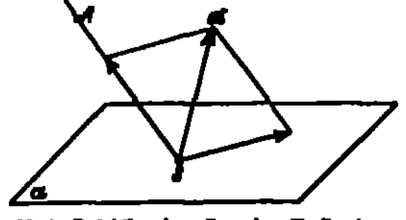


Abb. 4. Reduktion eines allgemeinen Kraftsystems.

Die von MONGE herrührende Reduktion auf zwei zueinander normale Kräfte ist als ein Sonderfall der eben betrachteten anzusehen; man braucht den Punkt A nur in der Richtung normal zu der Ebene α ins Unendliche rücken zu lassen.

Dagegen ist von der vorigen Reduktion verschieden diejenige auf zwei sich kreuzende Kräfte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, deren eine eine vorgeschriebene Wirkungslinie l

hat (vgl. Abb. 5). Sie kann in der Weise vorgenommen werden, daß erst eine Reduktion auf zwei Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_1'$ stattfindet, wobei $\mathfrak{K}_1$ durch einen Punkt A von l hindurchgeht und $\mathfrak{K}_1'$ in irgendeiner nicht durch A gehenden Ebene α liegt. Betrachtet man dann die durch l und $\mathfrak{K}_1$ gehende Ebene ε, so kann in dieser Ebene $\mathfrak{K}_1$ in zwei Komponenten zerlegt werden, wovon die eine $\mathfrak{K}$ die Gerade l zur Wirkungslinie hat und die andere $\mathfrak{K}_2$ die Gerade AE, welche den Punkt A mit dem Schnittpunkt E von $\mathfrak{K}_1'$ und ε verbindet. In E können endlich die Kräfte $\mathfrak{K}_1'$ und $\mathfrak{K}_2$ zu einer Resultierenden, $\mathfrak{K}'$, zusammengesetzt werden.

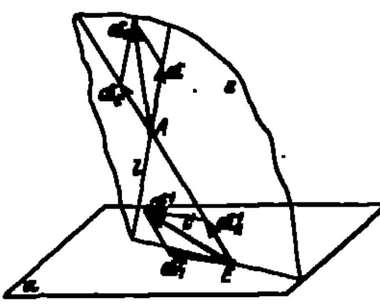


Abb. 5. Reduktion eines allgemeinen Kraftsystems.

Die Konstruktion versagt, wenn l und $\mathfrak{K}_1'$ einander treffen und also der Punkt E mit dem Schnittpunkt von l und α zusammenfällt. In dem Falle müßte nämlich $\mathfrak{K}_1$ in zwei in l fallende Komponenten zerlegt werden, was offensichtlich unmöglich ist. Man sieht aber leicht, daß dieses Versagen nur ausnahmsweise vorkommen kann, weil die Gerade l in einem solchen Fall die beiden, das Kraftsystem ersetzenden Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_1'$ schneidet und also eine Gerade ist, in bezug auf welche das Kraftsystem ein statisches Moment Null aufweist. Auf diese Weise gelangt man zu der Aufgabe, zu untersuchen, wie alle diese Ausnahmegeraden, welche als **Nullinien** oder **Nullstrahlen** bezeichnet werden, im Raume verteilt sind.

6. Das mit dem Kraftsystem verbundene Nullsystem. Greifen wir auf die unter Ziff. 5 behandelte Reduktion zurück, nach welcher das Kraftsystem reduziert wurde auf eine durch einen Punkt A hindurchgehende Kraft $\mathfrak{K}$ und eine zweite Kraft $\mathfrak{K}'$, welche in einer vorgeschriebenen, nicht durch A hindurchgehenden Ebene lag, so ist es ohne weiteres klar, daß durch jeden Punkt A Nullstrahlen hindurchgehen. Als solche erkennt man nämlich alle durch A hindurchgehenden und die Wirkungslinie von $\mathfrak{K}'$ schneidenden Geraden. Andererseits stellt man fest, daß keine anderen durch A hindurchgehenden Nullstrahlen existieren; denn in bezug auf eine solche Gerade würde $\mathfrak{K}$ nicht, dagegen $\mathfrak{K}'$ wohl ein Moment aufweisen: auch das gegebene Kraftsystem hätte also in bezug auf eine solche Gerade ein Moment, was zum Widerspruch führt. Es gilt also der Satz:

Jeder Punkt A ist Träger unendlich vieler Nullstrahlen, welche einen Strahlenbüschel bilden.

Die durch diesen Strahlenbüschel definierte Ebene α wird die **Nullebene** des betreffenden Punktes genannt.

In analoger Weise stellt man fest, daß in jeder Ebene α Nullinien enthalten sind. Reduziert man nämlich das Kraftsystem auf eine in α liegende Kraft $\mathfrak{K}'$ und eine zweite Kraft $\mathfrak{K}$, welche durch einen willkürlichen, aber nicht in α liegenden Punkt hindurchgeht, so sind alle in α enthaltenen, durch den Schnittpunkt von $\mathfrak{K}$ und α hindurchgehenden Geraden Nullstrahlen. Andere Nullstrahlen sind in α nicht enthalten. In bezug auf jede andere in α enthaltene Gerade nämlich hat $\mathfrak{K}'$ nicht, $\mathfrak{K}$ dagegen wohl ein Moment, so daß auch das von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ repräsentierte Kraftsystem in bezug auf eine solche Gerade ein Moment aufweist. Es gilt also der zu dem vorigen duale Satz:

In jeder Ebene α des Raumes liegen unendlich viele Nullstrahlen, welche einen Strahlenbüschel bilden.

Der durch diesen Büschel definierte Punkt A wird der **Nullpunkt** der betreffenden Ebene genannt.

Wir fassen die gefundenen Resultate folgendermaßen zusammen: Die Nullgeraden eines allgemeinen Kraftsystems bilden einen linearen Komplex; durch diesen Komplex wird jedem Punkt des Raumes eine durch ihn hindurchgehende Ebene, jeder Ebene ein in derselben liegender Punkt zugeordnet; die Zuordnung ist involutorisch. Einer willkürlichen Geraden l (welche also kein Nullstrahl ist) wird durch das allgemeine Kraftsystem (vgl. die zuletzt unter Ziff. 5 behandelte Reduktion) ein zu ihr duales Element, also eine Gerade l', involutorisch zugeordnet. Weil zwei zueinander „konjugierte" Geraden l und l' stets als Wirkungslinien zweier das Kraftsystem ersetzender Kräfte aufzufassen sind, gilt in Verbindung mit dem schon Gesagten der folgende Satz:

Die Nullebenen der Punkte einer Geraden l bilden einen Ebenenbüschel, dessen Achse die zu l konjugierte Gerade l' ist; und umgekehrt: die Nullpunkte der einen Ebenenbüschel bildenden Ebenen erfüllen eine Gerade, welche zur Achse des Ebenenbüschels konjugiert ist.

Die Nullebenen der Punkte einer Nullgeraden n dagegen bilden, weil sie natürlich alle n selbst enthalten, einen Ebenenbüschel, der n zur Achse hat. Die duale Zuordnung der Raumgeraden behält also allgemeine Gültigkeit, wenn jede Nullgerade sich selbst zugeordnet wird.

7. Fortsetzung. Um tieferen Einblick in die Struktur des unter Ziff. 6 besprochenen linearen Komplexes zu erhalten, greifen wir zurück auf Ziff. 4, wo festgestellt wurde, daß es eine und nur eine Gerade s gibt, deren Konjugierte s' die unendlich ferne Gerade der zu s senkrecht stehenden Ebenen ist. Weil die zu diesen Geraden s und s' gehörigen, das allgemeine Kraftsystem ersetzenden Kräfte sowohl eine Schiebung in der Richtung von s wie eine Drehung um s, also eine willkürliche **Schraubung** um s zulassen, so muß auch der mit dem Kraftsystem verbundene Komplex durch eine willkürliche Schraubung um s in sich selbst übergeführt werden. Zur bildlichen Darstellung des Komplexes genügt es also, sich die Nullstrahlen aller Punkte einer z. B. zu s senkrecht stehenden, sie schneidenden (Null-) Geraden n vor Augen zu führen. Die Lage der Nullebene und der Nullgeraden eines willkürlichen Punktes B vergegenwärtigt man sich dann durch Aufsuchung jenes Punktes A von n, der durch geeignete Schraubung von n um s mit B zur Deckung gebracht werden kann. Die Nullebene von A und deren Nullgeraden läßt man diese Schraubung mitmachen. Führen wir zur Bestimmung der Nullebene eines willkürlichen Punktes A von n ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen x-Achse mit n und dessen z-Achse mit s zusammenfällt (s. Abb. 6), so brauchen wir nur den Winkel φ anzugeben, welchen der in A senkrecht zu n stehende Nullstrahl n_1 mit der xy-Ebene, genauer gesagt mit der negativen y-Achse, einschließt. Dieser Winkel φ aber ist bestimmt durch die Bedingung, daß das statische Moment der in s fallenden Kraft $\mathfrak{R}$ zusammen mit dem Moment $\mathfrak{M}$ des in der xy-Ebene wirkenden Kräftepaares in bezug auf n_1 den Wert Null liefern muß. Man erhält die Gleichung

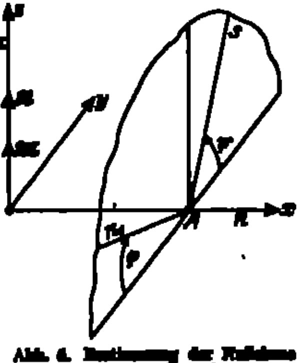


Abb. 6. Bestimmung der Nullebene eines Punktes A.

$$Rx\cos\varphi = M\sin\varphi$$

oder

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{M}x.$$

Führt man den Winkel ψ ein, welchen die in A zur z-Achse und zu n_1 senkrecht stehende Gerade s mit der xy-Ebene einschließt, so findet man für ψ

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{M}{R}\,\frac{1}{n}.$$

Die verschiedenen zu den Punkten A der Geraden n gehörigen Geraden s tangieren also die durch diese Punkte hindurchgehenden Schraubenlinien, welche s zur Achse und $2\pi \cdot M/R$ als Steigung haben. Unterwirft man den ganzen Raum einer Schraubung um s, deren Steigung diesen Wert $2\pi \cdot M/R$ hat, so sind in jedem Punkte die Nullstrahlen des Kraftsystems identisch mit den Normalen der durch den Punkt hindurchgehenden Bahnkurve.

Sind von dem mit dem Kraftsystem verbundenen Komplex zwei konjugierte Geraden l und l' und ein Nullstrahl n bekannt, so erhält man die zu einem Punkte A gehörende Nullebene α, indem man zwei durch A gehende Nullstrahlen n_1 und n_2 bestimmt. Den ersten erhält man als die durch A gehende Schnittgerade von l und l'. Den zweiten findet man in der durch A und n gelegten Ebene π. Schneidet man nämlich diese Ebene mit l und l', so erhält man in der Verbindungsgeraden n' dieser Schnittpunkte einen Nullstrahl, welcher zusammen mit n den Nullpunkt P der Ebene π bestimmt. Die Gerade PA ist dann der gesuchte Nullstrahl n_2.

In analoger Weise konstruiert man zu einer Ebene α den Nullpunkt A. Das Nullsystem ist also durch zwei konjugierte Geraden und einen Nullstrahl vollständig bestimmt.

Dasselbe gilt, wenn zwei Paare konjugierter Geraden $l\,l'$, $m\,m'$ gegeben sind. In diesem Fall wird die Nullebene α eines Punktes A von den beiden durch A gehenden Transversalen der Geradenpaare $l\,l'$ und $m\,m'$ bestimmt. In gleich einfacher Weise findet man zu einer Ebene α den Nullpunkt A. Endlich bestimmen auch fünf Nullstrahlen, wovon nicht vier zu derselben quadratischen Regelschar oder drei zu derselben Ebene gehören, das Nullsystem vollständig, weil vier solche Geraden in ihren beiden Transversalen ein Paar von konjugierten Geraden l und l' liefern.

8. Die Lage eines Kraftkreuzes in Beziehung zur Zentralachse des Kraftsystems. Die Lage eines das Kraftsystem ersetzenden Paares von Kräften $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ oder, wie wir kurz sagen wollen, eines Kraftkreuzes $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}')$, ist in einfache Beziehung zum Hauptkraftkreuz $(\mathfrak{R}, \mathfrak{M})$ mit den Wirkungslinien (s, s') zu bringen. Erstens stellt man fest, daß die Wirkungslinien l und l' von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ mit s und s' zu derselben Geradenschar eines hyperbolischen Paraboloids gehören. Weil nämlich $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ gleichwertig sind, muß das Gesamtmoment der vier Kräfte $-\mathfrak{K}$, $-\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ als uneigentliche in s' fallende Kraft aufgefaßt) in bezug auf jede Gerade Null sein; im besonderen aber in bezug auf jede Gerade n, welche l, l' und s schneidet. Dieses ist nur möglich, wenn jede solche Gerade n auch s' schneidet, mit anderen Worten wenn l, l', s und s' demselben hyperbolischen Paraboloid angehören. Weil demzufolge l und l' einer durch s hindurchgehenden Ebene parallel sein müssen, gilt der folgende Satz:

Zwei konjugierte Geraden l und l' projizieren sich auf eine zur Zentralachse senkrecht stehende Ebene als zwei parallele Geraden. Außerdem wird die Zentralachse von derjenigen Geraden, welche l und l' senkrecht schneidet, auch selbst senkrecht geschnitten. Betrachtet man nämlich die Gerade n, welche l und s senkrecht schneidet, so trifft sie, weil sie einer zu s senkrecht stehenden Ebene parallel ist, auch die zu s Konjugierte s'. Die Gerade n ist also eine Nulllinie und muß, weil sie l schneidet, deshalb auch l' schneiden. Weil aber l, l'

und a derselben Ebene parallel sind und n senkrecht auf l und a steht, so muß sie auch l' senkrecht treffen.

Führen wir nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen z-Achse mit a und dessen x-Achse mit der eben erwähnten Geraden n zusammenfällt (Abb. 7), so erhalten wir aus der Äquivalenz von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$ die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
K\cos\varphi + K'\cos\varphi' &= 0,\\
K\sin\varphi + K'\sin\varphi' &= R,\\
zK\cos\varphi + z'K'\cos\varphi' &= -M,\\
zK\sin\varphi + z'K'\sin\varphi' &= 0,
\end{aligned}
$$

aus denen man ohne Mühe ableitet

$$
z\,\mathrm{tg}\,\varphi = z'\,\mathrm{tg}\,\varphi', \qquad \frac{M}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi = z', \qquad \frac{M}{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi' = z.
$$

Diese Beziehungen gestatten in einfachster Weise, aus den Bestimmungsgrößen z und φ von l diejenigen z', φ' von l' zu ermitteln, und umgekehrt.

Abb. 7. Beziehung zwischen einem willkürlichen und dem Hauptkraftkreuz.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Wirkungslinien l, l', m, m' zweier gleichwertiger Kraftkreuze die Zentralachse des Kraftsystems vollständig bestimmen, weil diese diejenigen Geraden n senkrecht schneiden muß, welche selbst die Geraden l, l' bzw. m, m' senkrecht treffen.

9. Zerlegung einer Einzelkraft. Während in den vorangehenden Ziffern die Zusammensetzung einer Anzahl räumlich verteilter Kräfte zu einem einfachen, sie repräsentierenden Gebilde erledigt wurde, sei jetzt die Aufgabe behandelt, eine Kraft $\mathfrak{K}$ (Wirkungslinie l) in eine Anzahl von Komponenten $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, ... $\mathfrak{K}_n$ mit vorgeschriebenen Wirkungslinien $l_1, l_2, \dots l_n$ zu zerlegen, oder was auf dasselbe hinauskommt: eine Anzahl Kräfte $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots \mathfrak{K}_n$ mit vorgeschriebenen Wirkungslinien $l_1, l_2, \dots l_n$ derart zu bestimmen, daß sie zusammen mit der Kraft $-\mathfrak{K}$ in bezug auf jede Raumgerade ein statisches Moment Null aufweisen[1]).

a) **Zerlegung in zwei Komponenten.** Die Zerlegung einer Kraft $\mathfrak{K}$ in zwei Komponenten von vorgeschriebener Wirkungslinie ist im allgemeinen nicht möglich. In bezug auf jede Gerade nämlich, welche l und l_1 schneidet, l_2 aber nicht schneidet, hat ein Kraftsystem $-\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ ein nicht verschwindendes Moment, was der gestellten Aufgabe widerspricht. Damit die Aufgabe lösbar ist, muß also jede l und l_1 schneidende Gerade auch l_2 schneiden. Dies trifft nur zu, wenn l, l_1 und l_2 in derselben Ebene liegen und außerdem einen gemeinsamen Punkt haben. In dem Falle ist die Aufgabe bekanntlich eindeutig lösbar.

b) **Zerlegung in drei Komponenten.** Auch diese Zerlegung ist nur möglich, wenn die Geraden l_1, l_2, l_3 und l eine besondere Lage zueinander haben. Es darf nämlich keine Geraden geben, welche l, l_1 und l_2 wohl, l_3 aber nicht schneiden, weil in bezug auf eine solche Gerade das Moment von $-\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_3$ nicht Null wäre. Die Geraden l, l_1, l_2 und l_3 müssen also entweder derselben Schar von Geraden eines Hyperboloids oder eines hyperbolischen Paraboloids angehören. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist aber auch die Zerlegung in eindeutiger Weise möglich.

[1]) Wir beschränken uns dabei auf die Mitteilung der wichtigsten Tatsachen. Für ausführlichere Darlegungen sei auf das bereits in Ziff. 1 zitierte Lehrbuch von L. Henneberg, Die graphische Statik der starren Systeme, Leipzig 1911, verwiesen.

Im besonderen Falle, wo l, l_1, l_2 und l_3 in derselben Ebene liegen, bestimmt man die Komponenten am besten nach der Ritterschen Methode, indem man, z. B. zur Auffindung von $\mathfrak{K}_1$, die statischen Momente von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ in bezug auf den Schnittpunkt von l_2 und l_3 einander gleichsetzt. Ein Ausnahmefall tritt nur ein, wenn die Geraden l_1, l_2, l_3 einander in einem und demselben Punkt schneiden. Liegt dieser Punkt auf l, so ist die Zerlegung unendlich vieldeutig, liegt er nicht auf l, so ist sie unmöglich.

c) Zerlegung in vier Komponenten. Diese Zerlegung ist nur dann möglich, wenn die Geraden l, l_1, l_2, l_3, l_4 zwei gemeinsame Schnittgeraden haben. Weil nämlich $-\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ die beiden Transversalen von l, l_1, l_2, l_3 schneiden und folglich in bezug auf diese Geraden ein statisches Moment Null aufweisen, muß auch $\mathfrak{K}_4$ dieselben schneiden. Ist diese notwendige Bedingung erfüllt, so ist die Zerlegung auch möglich und auf eine zweimalige Zerlegung einer Kraft in drei Komponenten zurückzuführen. Im allgemeinen ist sie auch eindeutig; denn gäbe es zwei verschiedene Lösungen, so müßten auch die Differenzen der in l_1, l_2, l_3 und l_4 wirkenden Kräfte in bezug auf jede Gerade ein Moment Null haben, was nach dem früher Gesagten nur möglich wäre, wenn die Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 entweder hyperboloidische oder paraboloidische Lage hätten. Liegen l, l_1, l_2, l_3, l_4 in einer Ebene, so wird die Zerlegung unendlich vieldeutig (wie überhaupt in jedem Falle, wo eine Kraft in mehr als drei mit ihr in dieselbe Ebene fallenden Komponenten zerlegt werden soll). Man kann nämlich die in l_4 fallende Komponente $\mathfrak{K}_4$ willkürlich annehmen und die Resultierende von $\mathfrak{K}_4$ und $-\mathfrak{K}$ nach der unter b) genannten Methode in drei (in l_1, l_2 und l_3 fallende) Komponenten zerlegen.

d) Zerlegung in fünf Komponenten. Bei dieser Zerlegung können die Wirkungslinien $l_1, \ldots l_4$ von vier Komponenten willkürlich angenommen werden. Die Lage l_5 der fünften Komponente ist dann aber nicht mehr völlig frei. Nimmt man einen ihrer Punkte P an, so kann ihre Wirkungslinie nur noch, wie wir beweisen wollen, in einer bestimmten Ebene liegen. Zuerst zeigen wir, daß es wirklich einen Büschel von durch P hindurchgehenden Geraden l_5 gibt, und dann, daß es keine anderen durch P gehenden Geraden l_5 geben kann.

Eine erste, leicht zu konstruierende Gerade l_5' ist diejenige, welche die gemeinsamen Schnittgeraden von l, l_1, l_2, l_3 trifft. Nach dem unter c) Gesagten ist nämlich eine Zerlegung von $\mathfrak{K}$ in vier Komponenten $\mathfrak{K}_1', \mathfrak{K}_2', \mathfrak{K}_3', \mathfrak{K}_5'$ möglich, weil die Geraden l, l_1, l_2, l_3, l_5' in der Tat zwei gemeinsame Schnittgeraden aufweisen. Bei dieser Zerlegung von $\mathfrak{K}$ in fünf Komponenten $\mathfrak{K}_1', \mathfrak{K}_2', \mathfrak{K}_3', \mathfrak{K}_4', \mathfrak{K}_5'$ tritt also nur die Zufälligkeit ein, daß die Komponente $\mathfrak{K}_4'$ Null ist.

Zieht man durch P die die beiden Transversalen von l_1, l_2, l_3, l_4 schneidende Gerade l_5'', so kann man nach c) unter Annahme einer willkürlichen Kraft $\mathfrak{K}_5''$ in l_5'' vier in l_1, l_2, l_3, l_4 wirkende Kräfte $\mathfrak{K}_1'', \mathfrak{K}_2'', \mathfrak{K}_3'', \mathfrak{K}_4''$ konstruieren, welche mit $-\mathfrak{K}_5''$ äquivalent sind und also zusammen mit $\mathfrak{K}_5''$ in bezug auf jede Gerade ein statisches Moment Null aufweisen.

Die Summe der beiden Kraftsysteme $\mathfrak{K}_1', \mathfrak{K}_2', \mathfrak{K}_3', \mathfrak{K}_4' (=0), \mathfrak{K}_5'$ und $\alpha\, (\mathfrak{K}_1'', \mathfrak{K}_2'', \mathfrak{K}_3'', \mathfrak{K}_4'', \mathfrak{K}_5'')$ — wo α eine willkürliche Konstante bedeutet — liefert stets eine mögliche Zerlegung von $\mathfrak{K}$ in Komponenten der Größe $\mathfrak{K}_1' + \alpha\mathfrak{K}_1''$, $\mathfrak{K}_2' + \alpha\mathfrak{K}_2''$, $\mathfrak{K}_3' + \alpha\mathfrak{K}_3''$, $\mathfrak{K}_4' + \alpha\mathfrak{K}_4''$, $\mathfrak{K}_5' + \alpha\mathfrak{K}_5''$. Die Wirkungslinien der ersten vier Komponenten sind die Geraden l_1, l_2, l_3, l_4. Die Wirkungslinie der fünften Komponente ist eine durch P gehende Gerade, welche in der von l_5' und l_5'' bestimmten Ebene π liegt. Jede Gerade des von P in dieser Ebene bestimmten Büschels kann als Wirkungslinie l_5 dienen, weil der Kraft $\mathfrak{K}_5' + \alpha\mathfrak{K}_5''$ durch geeignete Wahl des Beiwertes α jede Richtung in der Ebene π erteilt werden kann. Andererseits kann eine, durch P gehende, nicht in π fallende Gerade $\bar{l}_5$ die Rolle von l_5 nicht übernehmen. Denn

wäre eine Zerlegung von $\mathfrak{K}$ in Komponenten $\bar{\mathfrak{K}}_1, \bar{\mathfrak{K}}_2, \bar{\mathfrak{K}}_3, \bar{\mathfrak{K}}_4, \bar{\mathfrak{K}}_5$ mit den Wirkungslinien l_1, l_2, l_3, l_4 und $\bar{l}_5$ möglich, so würde das Kraftsystem $(\mathfrak{K}_1' + \alpha\mathfrak{K}_1'' - \bar{\mathfrak{K}}_1)$, $(\mathfrak{K}_2' + \alpha\mathfrak{K}_2'' - \bar{\mathfrak{K}}_2)$, $(\mathfrak{K}_3' + \alpha\mathfrak{K}_3'' - \bar{\mathfrak{K}}_3)$, $(\mathfrak{K}_4' + \alpha\mathfrak{K}_4'' - \bar{\mathfrak{K}}_4)$, $(\mathfrak{K}_5' + \alpha\mathfrak{K}_5'' - \bar{\mathfrak{K}}_5)$, welches l_1, l_2, l_3, l_4 und eine nicht in π liegende Gerade $\bar{l}_5$ als Wirkungslinien hat, in bezug auf jede Gerade ein Moment Null haben müssen; d. h. $\bar{l}_5$ müßte die beiden gemeinsamen Schnittgeraden von l_1, l_2, l_3, l_4 schneiden. Dies ist aber unmöglich, weil $\bar{l}_5$ der gemachten Voraussetzung wegen nicht mit der einzig möglichen durch P gehenden (und in π liegenden) Geraden $\bar{l}$ dieser Beschaffenheit zusammenfallen kann.

Die Ebene π ist die Nullebene des Punktes P in bezug auf den von den Geraden l, l_1, l_2, l_3, l_4 als Nullstrahlen bestimmten linearen Komplex. In diesem Komplex sind nämlich sowohl die gemeinsamen Schnittgeraden von l, l_1, l_2, l_3 als diejenigen von l_1, l_2, l_3, l_4 konjugierte Geraden und die aus P zu diesen Geradenpaaren gezogenen Transversalen Nullgeraden (vgl. Ziff. 7). Es gilt also der Satz:

Die Wirkungslinien von sechs Kräften, welche bei der unter Ziff. 4 gegebenen Reduktion weder eine resultierende Kraft noch ein resultierendes Kräftepaar aufweisen, gehören einem linearen Komplex an.

c) **Zerlegung in sechs Komponenten.** Bei dieser Zerlegung machen wir abermals Gebrauch von der Tatsache, daß fünf Geraden einen linearen Komplex bestimmen, dem sie angehören und konstruieren die Schnittgerade s der beiden Nullebenen π_1 und π_2, welche einem willkürlich angenommenen Punkte P in den beiden von l, l_1, l_2, l_3, l_4 und l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 bestimmten linearen Komplexen zugeordnet sind. Dann ist nach dem unter d) Festgestellten eine Zerlegung von $\mathfrak{K}$ in Komponenten $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2', \mathfrak{K}_3', \mathfrak{K}_4', \mathfrak{K}_5$ mit den Wirkungslinien l_1, l_2, l_3, l_4, s in eindeutiger Weise möglich. Andererseits kann $\mathfrak{K}_5$ in eindeutiger Weise in fünf Komponenten $\mathfrak{K}_2'', \mathfrak{K}_3'', \mathfrak{K}_4'', \mathfrak{K}_5'', \mathfrak{K}_6$ zerlegt werden, welche l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 als Wirkungslinien haben. Es sind also die Kräfte $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_2' + \mathfrak{K}_2''$, $\mathfrak{K}_3 = \mathfrak{K}_3' + \mathfrak{K}_3''$, $\mathfrak{K}_4 = \mathfrak{K}_4' + \mathfrak{K}_4''$, $\mathfrak{K}_5''$ und $\mathfrak{K}_6$ der Kraft $\mathfrak{K}$ gleichwertig.

Die ausgeführte Zerlegung ist eindeutig; denn wäre sie in zwei verschiedenen Weisen möglich, so würden die Differenzen der in $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ fallenden Komponenten weder eine resultierende Kraft noch ein resultierendes Kräftepaar aufweisen dürfen. Es wäre also nötig, daß $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ Strahlen eines linearen Komplexes wären, was im allgemeinen nicht der Fall ist.

Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so finden wir: Soll eine Kraft in n $(2 < n < 6)$ Komponenten zerlegt werden, so können die Wirkungslinien von $(n-1)$ Komponenten willkürlich gewählt werden. Die Lage der letzten Komponente dagegen ist von derjenigen der übrigen Komponenten abhängig, und zwar gehört ihre Wirkungslinie in den Fällen $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ einer bestimmten quadratischen Regelschar bzw. einer linearen Kongruenz bzw. einem linearen Komplex an. Im Falle $n = 6$ können die Wirkungslinien der Komponenten willkürlich gewählt werden. In den Fällen $n > 6$ ist die Zerlegung unendlich vieldeutig.

10. **Zerlegung eines allgemeinen Kraftsystems.** Die Zerlegung eines allgemeinen Kraftsystems ist natürlich immer auf diejenige eines Kraftkreuzes zurückzuführen. Wir beschränken uns also auf diesen Fall und stellen ohne weiteren Beweis die folgenden Tatsachen fest[1]).

a) **Die Zerlegung eines Kraftkreuzes** $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}', l, l')$ **in zwei Komponenten** mit vorgeschriebenen Wirkungslinien l_1 und l_2 ist eindeutig möglich, wenn l_1 und l_2 konjugierte Geraden sind in dem von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ bestimmten Null-

[1]) Für ausführliche Behandlung sei auch hier auf das schon zitierte Buch von Hamel und die darin genannten Originalabhandlungen verwiesen.

system. Die Gerade l_1 kann also willkürlich angenommen werden, l_2 ist damit eindeutig bestimmt.

b) Die Zerlegung in drei Komponenten mit Wirkungslinien l_1, l_2, l_3 ist bei angenommenen l_1 und l_2 nur möglich, wenn l_3 Erzeugende eines bestimmten Hyperboloids ist.

c) Bei der Zerlegung in vier Komponenten mit Wirkungslinien l_1, l_2, l_3, l_4 können l_1, l_2, l_3 und ein Punkt von l_4 willkürlich angenommen werden. Die Gerade l_4 sowie die Größen der Komponenten sind dann eindeutig bestimmt.

d) Die Zerlegung in fünf Komponenten läßt sowohl die Wahl der Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 wie diejenige eines Punktes P von l_5 vollständig frei. Dieser Punkt P bestimmt dann eine Ebene, deren jede durch P gehende Gerade als Wirkungslinie der fünften Komponente gewählt werden kann.

e) Bei der Zerlegung in sechs Komponenten sind selbstverständlich die sie tragenden Wirkungslinien frei wählbar. Jede der beiden Kräfte des Kraftkreuzes wird für sich in der früher besprochenen Weise in sechs Komponenten zerlegt.

11. Schraubentheorie; die Arbeit einer Kraftschraube. Wie bereits unter Ziff. 7 erwähnt wurde, macht man sich von dem mit einem Kraftsystem verbundenen Nullstrahlenkomplex in einfachster Weise ein Bild mit Hilfe der dort genannten Schraube. Durch diese Schraube definierte BALL[1]) nun auch das Kraftsystem selbst, indem er ihr noch eine Zahl R beilegte, welche die Größe der in die Schraubenachse fallenden Kraft $\mathfrak{R}$ angeben sollte.

In der Tat sind durch die Lage der Schraubenachse (zu deren Angabe vier Bestimmungsgrößen erforderlich sind) die Wirkungslinien des das Kraftsystem ersetzenden Hauptkraftkreuzes festgelegt, während die Größe des Momentes $\mathfrak{M}$ aus R erhalten wird durch Multiplikation mit der zum Drehungswinkel Eins gehörenden Steigung s der Schraube.

Die Festlegung der Schraube erfordert also fünf, diejenige des Kraftsystems sechs Bestimmungsgrößen.

Ebenso wie ein allgemeines Kraftsystem durch eine Kraftschraube charakterisiert ist, ist die instantane Bewegung eines festen Körpers durch eine sog. Bewegungsschraube[2]) gekennzeichnet. Zur Festlegung einer solchen Schraube braucht man wieder fünf, zur Festlegung der Bewegung selbst sechs Bestimmungsgrößen. Die letzte Größe ω definiert die um die Schraubenachse stattfindende Drehung. Den Betrag der in der Achsenrichtung erfolgenden Verschiebung erhält man durch Multiplikation von ω mit der zur Einheitsdrehung gehörenden Schraubensteigung s.

Die unter Ziff. 5 gegebene Definition der Arbeit einer Kraft gestattet es, in einfacher Weise die Arbeit zu berechnen, welche von einer an einem starren Körper angreifenden Kraftschraube (R, s_1) bei einer instantanen Bewegung des Körpers, definiert durch die Bewegungsschraube (ω, s_2), geleistet wird.

Ist d der Abstand der beiden Schraubenachsen und φ der von ihnen eingeschlossene Winkel, so erhält man für diese Arbeit den Ausdruck

$$R\omega\{(s_1 + s_2)\cos\varphi - d\sin\varphi\}, \tag{1}$$

wie man leicht erkennt, wenn man sowohl für die Kraft $\mathfrak{R}$ als für das Kräftepaar $\mathfrak{M} = Rs_1$ die Arbeit gesondert bestimmt, welche sowohl bei der von der Bewegungsschraube bedingten Drehung ω wie bei der damit verbundenen Schiebung ωs_2 geleistet wird und die betreffenden Arbeitsbeträge addiert.

---

[1]) Vgl. R. BALL, Theory of screws, Cambridge 1900.
[2]) Vgl. Kap. 5, Ziff. 28 ds. Bd. des Handb.

Der in diesem Ausdruck auftretende Winkel φ wird von seinem Supplement dadurch unterschieden, daß man in die gemeinsame Normale der beiden Schrauben 1 und 2 eine Rechtsschraube legt, 1 an diese Schraube bindet und den Winkel φ mißt, welchen 1 durchläuft, bis seine Achse derjenigen von 2 parallel ist, unter der Bedingung, daß bei der Bewegung der Hilfsschraube der Abstand d sich verkürzt.

Der Ausdruck

$$s_{1,2} = (s_1 + s_2)\cos\varphi - d\sin\varphi,$$

welcher von BALL der **virtuelle Koeffizient** beider Schrauben genannt wird, ist in den Schraubengrößen symmetrisch. Die oben definierte Arbeitsleistung bleibt also ungeändert, wenn die beiden Schrauben ihre Rolle vertauschen.

Ist im besonderen der virtuelle Koeffizient Null, so daß die Kraftschraube 1 keine Arbeit leistet, wenn sie einer durch die Schraube 2 dargestellten Bewegung unterworfen wird, so heißen die beiden Schrauben 1 und 2 **reziprok**.

12. Die Resultierende zweier Kraftschrauben; das Zylindroid. Wenn man zwei Kraftschrauben 1 und 2, deren Achsen wiederum einen Abstand d haben und einen Winkel φ einschließen, und deren weitere Bestimmungsgrößen durch $(R_1, M_1 = R_1 s_1)$ und $(R_2, M_2 = R_2 s_2)$ gegeben sein mögen, in bezug auf irgendeinen Punkt S der die beiden Achsen senkrecht schneidenden Geraden reduziert, so erhält man eine resultierende Kraft $\mathfrak{R}$, welche sich aus den Kräften $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ nach dem Parallelogrammgesetz bestimmen läßt und diese Gerade ebenfalls senkrecht schneidet. Außerdem tritt ein resultierendes Kräftepaar $\mathfrak{M}$ auf. Es fragt sich nun, ob der Bezugspunkt S derart gewählt werden kann, daß die Achse des Kräftepaares mit der Wirkungslinie von $\mathfrak{R}$ zusammenfällt, so daß diese letzte Gerade als Träger der zu 1 und 2 gehörenden resultierenden Kraftschraube angesehen werden kann. Dazu ist nötig, daß das Moment $\mathfrak{M}$ in einer zu $\mathfrak{R}$ senkrechten Richtung keine Komponente hat. Führt man zur Aufstellung der betreffenden Bedingung ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen z-Achse die beiden Schraubenachsen senkrecht schneidet und dessen x-Achse mit der ersten Schraubenachse zusammenfällt (vgl. Abb. 8a), so sieht man in der Tat sofort, daß die Momentvektoren der Kräftepaare, welche bei der Reduktion der beiden Kraftschrauben in bezug auf den Punkt $(0, 0, d_1)$ auftreten, parallel zur xy-Ebene liegen. Die obengenannte Bedingung reduziert sich also (vgl. Abb. 8b) zu

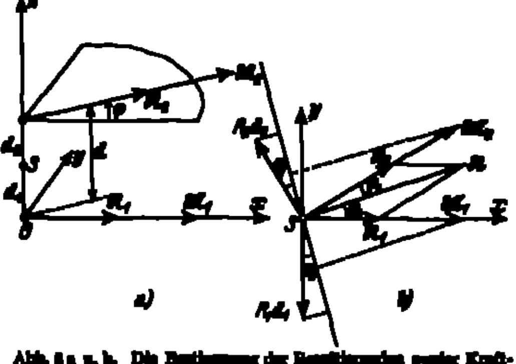


Abb. 8a u. b. Die Bestimmung der Resultierenden zweier Kraftschrauben.

$$M_1 \sin\varphi_2 + R_1 d_1 \cos\varphi_2 = M_2 \sin\varphi_1 + R_2 d_2 \cos\varphi_1 .$$

Macht man Gebrauch von den Beziehungen

$$M_1 = R_1 s_1, \qquad M_2 = R_2 s_2, \qquad \sin\varphi_1 = \frac{R_2}{R}\sin\varphi, \qquad \sin\varphi_2 = \frac{R_1}{R}\sin\varphi,$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{R_2\cos\varphi + R_1}{R}, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{R_1\cos\varphi + R_2}{R},$$

so erhält man

$$\frac{R_1 R_2}{R^2}(s_1 - s_2)\sin\varphi + \frac{R_1 R_2}{R^2}(d_1 - d_2)\cos\varphi + \frac{R_1^2 d_1 - R_2^2 d_2}{R^2} = 0 .$$

Durch Substitution entweder von $d_2 = d - d_1$ oder $d_1 = d - d_2$ findet man

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \frac{R_1^2}{R^2} d + \frac{R_1 R_2}{R^2}\{d\cos\varphi - (s_1 - s_2)\sin\varphi\}, \\ d_2 &= \frac{R_2^2}{R^2} d + \frac{R_1 R_2}{R^2}\{d\cos\varphi + (s_1 - s_2)\sin\varphi\}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Zur weiteren Charakterisierung der resultierenden Schraube sind noch die beiden Größen R und s erforderlich. Wie bereits erwähnt, ist R bestimmt durch

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos\varphi. \tag{2}$$

Die Größe s erhält man aus

$$s = \frac{M}{R} = \frac{M_1\cos\varphi_2 - R_1 d_1 \sin\varphi_2 + M_2\cos\varphi_1 - R_2 d_2 \sin\varphi_1}{R},$$

was sich mit Hilfe der obenerwähnten Beziehungen auf die Form

$$s = \frac{R_1^2 s_1 + R_2^2 s_2 + R_1 R_2\{(s_1 + s_2)\cos\varphi - d\sin\varphi\}}{R^2} \tag{3}$$

bringen läßt.

Hiermit ist die von Ball gegebene Verallgemeinerung des Parallelogrammgesetzes für die Zusammensetzung von zwei Kraftschrauben beschrieben.

Verändert man die Intensitäten R_1 und R_2 der zusammenzusetzenden Schrauben, so verändert sich nach den obenstehenden Formeln (1) die Lage der resultierenden Schraube nur dann, wenn das Verhältnis R_1/R_2 sich verändert. Es liegt nun auf der Hand, die Lage der resultierenden Schraubenachse als Funktion von R_1/R_2 näher zu untersuchen und die von dieser Achse erzeugte Fläche zu bestimmen.

Dazu betrachtet man zuerst den besonderen Fall, daß die beiden Schrauben 1 und 2 einander rechtwinklig schneiden, so daß in obenstehenden Formeln $d = 0$ und $\varphi = \pi/2$ gesetzt werden muß. Man erhält dann

$$\left.\begin{aligned} d_1 = -d_2 &= -\frac{R_1 R_2}{R^2}(s_1 - s_2) = -\frac{R_1 R_2}{R_1^2 + R_2^2}(s_1 - s_2), \\ s &= \frac{R_1^2 s_1 + R_2^2 s_2}{R^2} = \frac{R_1^2 s_1 + R_2^2 s_2}{R_1^2 + R_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Nun sind die Gleichungen der gesuchten Schraubenachse

$$y = \frac{R_2}{R_1} x, \qquad z = d_1 = -\frac{R_1 R_2}{R^2}(s_1 - s_2).$$

Die Fläche, welche von dieser Achse bei veränderlichem R_1/R_2 beschrieben wird, erhält man also durch Elimination der Größen R_1/R, R_2/R aus diesen Gleichungen und der Beziehung

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2.$$

Man findet

$$z = -(s_1 - s_2)\frac{xy}{x^2 + y^2}. \tag{5}$$

Die Gleichung stellt eine Regelfläche dritten Grades dar, welche nach Cayley als Zylindroid bezeichnet wird.

Es kann gezeigt werden, daß auch für den allgemeinen Fall zweier unter einem Winkel φ sich kreuzenden Kraftschrauben mit den spezifischen Steigungen s_1 und s_2 der geometrische Ort der bei veränderlichem R_1/R_2 auftretenden resul-

tierenden Schraubenachse, bei geeigneter Wahl der Koordinatenachsen, durch eine Gleichung derselben Form dargestellt werden kann. Man wählt dazu die Gerade, welche die beiden gegebenen Schraubenachsen senkrecht schneidet, zur z-Achse (vgl. Abb. 9), erteilt diesen Achsen die z-Koordinaten z_1 und $z_2 = z_1 + d$ und legt ihre Richtungen in bezug auf die x-Achse durch die Winkel ψ_1 und $\psi_2 = \psi_1 - \varphi$ fest.

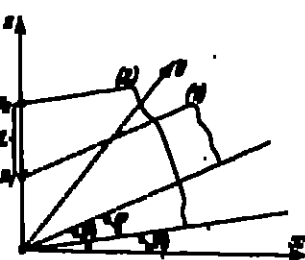


Abb. 9. Die Bestimmung der Resultierenden zweier Kraftschrauben.

Schließlich legt man in die x- und y-Achsen zwei sich schneidende Schrauben mit noch unbekannten spezifischen Steigungen s_1' und s_2' und stellt die Bedingungen auf, daß für zwei noch näher zu bestimmende Werte ϱ_1 und ϱ_2 der Verhältniszahl R_1'/R_2' ihrer Intensitäten als resultierende Kraftschraube eine der beiden gegebenen Schrauben auftritt.

Man erhält so die Bedingungsgleichungen

$$z_1 = -\frac{\varrho_1}{\varrho_1^2+1}(s_1'-s_2'), \qquad z_2 = z_1 + d = -\frac{\varrho_2}{\varrho_2^2+1}(s_1'-s_2'),$$

$$s_1 = \frac{\varrho_1^2 s_1' + s_2'}{\varrho_1^2+1}, \qquad s_2 = \frac{\varrho_2^2 s_1' + s_2'}{\varrho_2^2+1},$$

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{1}{\varrho_1}, \qquad \operatorname{tg}\psi_2 = \operatorname{tg}(\psi_1 - \varphi) = \frac{1}{\varrho_2},$$

welche gerade ausreichen, um die Unbekannten $z_1, \psi_1, s_1', s_2', \varrho_1$ und ϱ_2 in eindeutiger Weise zu bestimmen. Sie ergeben

$$s_1' - s_2' = \frac{\sqrt{d^2 + (s_1 - s_2)^2}}{\sin\varphi},$$

$$s_1' + s_2' = s_1 + s_2 - d\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\left(\varphi + \operatorname{arctg}\frac{s_1 - s_2}{d}\right), \qquad \psi_2 = \psi_1 - \varphi,$$

$$z_1 = \frac{1}{2}(s_1' - s_2')\operatorname{ctg}\varphi - \frac{d}{2}, \qquad z_2 = z_1 + d.$$

Die Gleichung des von den beiden Schrauben bestimmten Zylindroids in bezug auf das passend gewählte Achsenkreuz ist

$$z = -(s_1' - s_2')\frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Die Gestalt des Zylindroids hängt also außer von d und φ nur von der Differenz der beiden spezifischen Steigungen s_1 und s_2 ab.

13. Die Motorrechnung. In seinem Buche „Geometrie der Dynamen" behandelt auch STUDY unter Einführung einer Reihe neuer Begriffe die direkte Zusammensetzung von Kraftkreuzen oder Dynamen. Eine auch nur annäherungsweise Andeutung des von diesem Verfasser behandelten Stoffes müssen wir uns leider schon wegen der Abgrenzung der in diesem Werke zu behandelnden Gegenstände versagen. Doch sei eine an dieses Buch anschließende Arbeit von v. MISES[1] erwähnt, in welcher der von STUDY eingeführte Motorbegriff zur Aufstellung einer direkten Rechnungsweise, der sog. Motorrechnung, Verwendung findet. Unter einem Motor $\mathfrak{M}$ wird dabei die Figur zweier in eine bestimmte Reihenfolge gesetzter eigentlicher Geraden a und b verstanden, die der einzigen Bedingung unterworfen sind, sich nicht rechtwinklig

[1] R. v. MISES, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 4, S. 155 u. 193. 1924.

zu schneiden oder zu kreuzen. Die gemeinsame Normale beider Geraden heißt die **Achse** des **Motors**; der Abstand der Geraden heißt seine **Länge** und wird durch einen in der Achse liegenden, von der ersten Geraden a zur zweiten b hin gezogenen Vektor $\mathfrak{M}_a$ dargestellt; der Tangens des von den Geraden a, b eingeschlossenen Winkels $\varphi < 90°$ heißt die **Öffnung** des Motors und wird durch einen ebenfalls in der Motorachse liegenden Vektor $\mathfrak{R}$ vom Betrag $\operatorname{tg}\varphi$ dargestellt, wobei seine Richtung eine Rechtsschraube zusammen mit dem Drehsinn bilden soll, der die erste Gerade a auf kürzestem Wege parallel zur zweiten b stellt. Öffnung und Länge des Motors sind in dieser Weise nur bis auf das Vorzeichen bestimmt. Mit der Entscheidung über das Vorzeichen einer dieser Größen ist aber zugleich auch das Zeichen der anderen bestimmt, weil die positive Richtung einer Geraden auch den positiven Drehsinn um diese Gerade angibt.

Der in dieser Weise eingeführte Motorbegriff kann sowohl einer instantanen Bewegung wie einem Kraftsystem zugeordnet werden. Im ersten Falle fällt die Achse des Motors mit der Achse der die instantane Bewegung definierenden Schraube (vgl. Kap. 5, Ziff. 28) zusammen; seine Länge und Öffnung sind ein Maß für die Schiebungs- und Drehgeschwindigkeit der Bewegungsschraube.

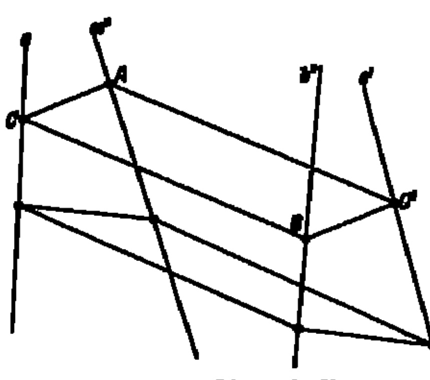


Abb. 10. Die Addition zweier Motoren.

Im letzten Fall deckt sich die Motorachse mit der Zentralachse des Kraftsystems, und die beiden resultierenden Größen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ dieses Kraftsystems werden durch die Öffnung $\mathfrak{R}$ und die Länge $\mathfrak{M}_a$ des Motors dargestellt.

Nach der Definition des Motors verändert sich seine Bedeutung nicht, wenn man die beiden ihn darstellenden Geraden a und b einer willkürlichen Schraubung um die Motorachse unterwirft. Dies steht im Einklang mit der für das Kraftsystem früher erläuterten Tatsache, daß eine Schraubung um die Zentralachse die statische Bedeutung des Kraftsystems nicht beeinflußt.

Es zeigt sich nun, daß die geometrische Zusammensetzung zweier Motoren, welche durch die geordneten Geradenpaare a, a' und b, b' gegeben sein mögen, folgendermaßen stattfinden muß, um in Übereinstimmung mit der Zusammensetzung der zwei von den Motoren dargestellten Kraftsysteme zu sein: Durch geeignete Schraubung um ihre Achsen werden zuerst die beiden Motoren in zwei andere $(e\,a'')$ und $(e\,b'')$ mit gemeinsamer Anfangsgeraden e übergeführt (vgl. Abb. 10). Sodann sucht man in einer beliebigen zu e senkrechten Ebene zu den drei Durchstoßpunkten C, A und B von e, a'' und b'' den vierten, C gegenüberliegenden, Parallelogramm-Eckpunkt C'; dann ist der Ort der Punkte C' eine Gerade e', und der durch $(e\,e')$ dargestellte Motor die **Summe** der gegebenen Motoren.

Dem Motor $(a\,a')$ wird in folgender Weise ein Moment in bezug auf einen Punkt O zugeschrieben: Aus dem Punkte O fällt man auf a und a' die beiden Lotebenen α und α' und schneidet diese mit a' und a in den Punkten A' und A. Der die Schnittpunkte A und A' verbindende Vektor $\overrightarrow{AA'}$ ist, wie verhältnismäßig einfach zu beweisen ist, außer von der Lage von O, nur von dem Motor $(a\,a')$ abhängig und wird als das **Moment** $\mathfrak{M}_0$ des **Motors für den Punkt** O bezeichnet. Es zeigt sich außerdem, daß

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_a + [\mathfrak{r}\mathfrak{R}]$$

ist, wo $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}$ die vorhin definierten Vektoren und $\mathfrak{r}$ einen von O nach einem Punkte der Motorachse gehenden Fahrstrahl darstellt.

$\mathfrak{M}$ heißt der **Resultantvektor** oder die **erste Vektorkomponente**, $\mathfrak{M}_0$ der **Momentvektor** oder die **zweite Vektorkomponente** des Motors $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$. Derselbe ist durch seinen Resultantvektor und seinen Momentvektor in bezug auf irgendeinen Punkt O vollständig bestimmt; natürlich ebenso durch die zweimal drei skalaren Komponenten $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$, welche diese beiden Vektoren in bezug auf drei durch O gehende senkrechte Koordinatachsen aufweisen.

Stellt der Motor ein Kraftsystem $(\mathfrak{R}, \mathfrak{M})$ dar, so ist der oben definierte Momentvektor $\mathfrak{M}_0$ identisch mit dem unter Ziff. 1 und 2 definierten statischen Momente $\mathfrak{M}_0$ des Kraftsystems in bezug auf O; denn dieses ist ja $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} + [\mathfrak{r}\mathfrak{R}]$.

Das Rechnen mit Motoren wird nun dadurch ermöglicht, daß sowohl ein **skalares Produkt** $\boldsymbol{\mathfrak{A}}\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ wie ein **motorisches Produkt** $\boldsymbol{\mathfrak{P}} = [\boldsymbol{\mathfrak{A}}\boldsymbol{\mathfrak{B}}]$ zweier Motoren $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ und $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ eingeführt wird, und zwar mittels der Definitionen

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}}\boldsymbol{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{A}_0\mathfrak{B} = A_1B_4 + A_2B_5 + A_3B_6 + A_4B_1 + A_5B_2 + A_6B_3$$

und

$$\boldsymbol{\mathfrak{P}} = [\boldsymbol{\mathfrak{A}}\boldsymbol{\mathfrak{B}}], \qquad \mathfrak{P} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}], \qquad \mathfrak{P}_0 = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0] + [\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}].$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{P}$ die Resultant- und $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{P}_0$ die Momentvektoren von $\boldsymbol{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{\mathfrak{B}}$ und $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$ in bezug auf den Punkt O. Obwohl beide Produkte scheinbar von dem Bezugspunkte abhängen, sind sie in Wirklichkeit davon unabhängig. Ist $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ ein Kraftmotor, welcher das Kraftsystem $(R, M = s_1R)$ darstellt, und stellt $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ eine Bewegungsschraube (mit der Drehgeschwindigkeit ω und der Verschiebungsgeschwindigkeit $v = s_2\omega$) dar, so ist das skalare Produkt $\boldsymbol{\mathfrak{A}}\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ gleich der in der Zeiteinheit geleisteten Arbeit der Kraftschraube $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, wenn sie der Bewegungsschraube $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ unterworfen wird. Berechnet man in der oben definierten Weise $\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$, so wird man auf den Ausdruck (4) von Ziff. 11 zurückgeführt. Dagegen liefert formelles Ausschreiben von $\boldsymbol{\mathfrak{A}}\boldsymbol{\mathfrak{B}} = A_1B_4 + A_2B_5 + A_3B_6 + A_4B_1 + A_5B_2 + A_6B_3$ einen Ausdruck, welcher in etwas anderer Form noch in Ziff. 14 auftreten wird.

Schließlich wird noch der sog. **Motoraffinor** $\boldsymbol{M}$ eingeführt, welcher es ermöglicht, einen Motor $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ durch eine lineare Transformation in einen Motor $\boldsymbol{\mathfrak{A}}'$ überzuführen. Dazu betrachtet man die 36-gliedrige quadratische Matrix

$$\begin{Vmatrix} M_{11} M_{12} \ldots M_{16} \\ M_{21} M_{22} \ldots M_{26} \\ \vdots \\ M_{61} M_{62} \ldots M_{66} \end{Vmatrix}$$

und definiert als Produkt $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ des Affinors $\boldsymbol{M}$ in den Motor $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ denjenigen Motor $\boldsymbol{\mathfrak{A}}'$, dessen skalare Komponenten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} A_1' &= M_{11}A_4 + M_{12}A_5 + M_{13}A_6 + M_{14}A_1 + M_{15}A_2 + M_{16}A_3 \\ A_2' &= M_{21}A_4 + M_{22}A_5 + M_{23}A_6 + M_{24}A_1 + M_{25}A_2 + M_{26}A_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_6' &= M_{61}A_4 + M_{62}A_5 + M_{63}A_6 + M_{64}A_1 + M_{65}A_2 + M_{66}A_3. \end{aligned}$$

Es ist hier nicht der Ort, auf die den neuen Kalkül beherrschenden Rechnungsregeln weiter einzugehen. Es durfte aber die Gelegenheit nicht verfehlt

werden, auf ein Hilfsmittel hinzuweisen, welches es gestattet, die Hauptsätze der Kinetik in einer äußerst prägnanten Form zur Darstellung zu bringen[1]).

14. Das Gleichgewicht eines Kraftsystems. Man sagt, ein Kraftsystem sei im Gleichgewicht, wenn es bei der unter Ziff. 4 behandelten Reduktion weder auf eine resultierende Kraft $\mathfrak{R}$ noch auf ein resultierendes Kräftepaar $\mathfrak{M}$ führt:

$$\mathfrak{R} = 0, \qquad \mathfrak{M} = 0. \tag{1}$$

Ist diese Bedingung für einen Punkt erfüllt, so ist sie es auch, wie unmittelbar einleuchtet, für jeden anderen Bezugspunkt.

Benutzen wir auch hier das früher eingeführte rechtwinklige Koordinatensystem $Oxyz$, so lauten bei der Reduktion des Kraftsystems in bezug auf den Punkt O die Gleichgewichtsbedingungen (1)

$$\left.\begin{array}{lll} \sum X_i = 0, & \sum Y_i = 0, & \sum Z_i = 0, \\ \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, & \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, & \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Sie sind, wie man leicht einsieht, notwendig und hinreichend.

Unter Ziff. 7 wurde festgestellt, daß mit jedem Kraftsystem ein linearer Komplex von Geraden verbunden ist, in bezug auf welchen das statische Moment sämtlicher Kräfte Null ist. Weil ein linearer Komplex durch fünf seiner Strahlen bestimmt ist, so ist ein Kraftsystem dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn es sechs nicht zu demselben linearen Komplex gehörende Geraden gibt, in bezug auf welche sein statisches Moment Null ist. Selbstverständlich ist dann auch das Moment in bezug auf jede andere Gerade gleich Null.

Für ein ebenes Kraftsystem vereinfacht sich dieser Satz auf folgenden: Damit ein ebenes Kraftsystem im Gleichgewicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß das statische Moment in bezug auf drei nicht kollineare Punkte seiner Ebene Null ist.

Schließlich möge noch auf eine dritte Fassung der Gleichgewichtsbedingungen, in Verbindung mit dem unter Ziff. 3 entwickelten Arbeitsbegriff, hingewiesen werden. Denkt man sich die Kräfte je in einem Punkte ihrer Wirkungslinien an einem starren Körper angreifend, so kann man sich die Aufgabe stellen, die Arbeit zu bestimmen, welche bei einer unendlich kleinen Bewegung des Körpers von dem Kraftsystem geleistet wird. Eine solche Bewegung des Körpers kann immer durch einen Verschiebungsvektor $\delta\mathfrak{e}$ und durch einen Drehvektor $\delta\mathfrak{b}$ dargestellt werden. Der von O nach dem Angriffspunkt einer willkürlichen Kraft $\mathfrak{K}_i$ gezogene Fahrstrahl $\mathfrak{r}_i$ erleidet dabei die Veränderung

$$\delta\mathfrak{r}_i = \delta\mathfrak{e} + [\delta\mathfrak{b}, \mathfrak{r}_i],$$

so daß die vom Kraftsystem geleistete Arbeit bei der betrachteten unendlich kleinen Bewegung des Körpers gleich

$$\delta A = \sum \mathfrak{K}_i \delta\mathfrak{r}_i = \sum \mathfrak{K}_i \delta\mathfrak{e} + \sum \mathfrak{K}_i [\delta\mathfrak{b}, \mathfrak{r}_i]$$

oder nach einer bekannten Rechenregel

$$\delta A = \delta\mathfrak{e} \sum \mathfrak{K}_i + \delta\mathfrak{b} \sum [\mathfrak{r}_i \mathfrak{K}_i] = \mathfrak{R}\,\delta\mathfrak{e} + \mathfrak{M}\,\delta\mathfrak{b}$$

ist.

Hieraus folgt, daß, wenn das Kraftsystem im Gleichgewicht war, die von ihm bei einer sog. virtuellen Bewegung $\delta\mathfrak{e}$, $\delta\mathfrak{b}$ des Körpers geleistete Arbeit Null ist.

Umgekehrt aber gilt auch der Satz, daß das Kraftsystem sich im Gleichgewicht befindet, wenn die von ihm geleistete Arbeit bei jeder virtuellen Be-

[1]) Vgl. Kap. 8 ds. Bd. des Handb.

wegung des Körpers Null ist. Dieser Satz wird von einigen Autoren als Definition des Gleichgewichtes an die Spitze der Statik gestellt (vgl. die entsprechenden Ausführungen in Kap. 2).

15. Die Stabilität des Gleichgewichts. Bis jetzt hatten wir es nur zu tun mit Kräften, welche einen unveränderlichen Angriffspunkt hatten. Betrachtet man aber ein bewegliches Punktsystem, bei dem die angreifenden Kräfte von der Lage des Systems abhängig sind, so wird, wenn das Kraftsystem anfänglich im Gleichgewicht ist, dieses im allgemeinen zerstört, wenn die Lage des Punktsystems sich ändert. Von den hierbei auftretenden Fragen ist diejenige nach der Stabilität des Gleichgewichts wohl die wichtigste. Sie gehört aber ihrem Wesen nach nicht der Statik, sondern der Kinetik an. Wir streifen sie denn auch an dieser Stelle nur flüchtig und verweisen auf die späterhin folgende ausführliche Behandlung bei der Kinetik der Punkte, Körper und Körpersysteme (vgl. Kap. 7 u. 8). Es werde aber wenigstens angegeben, in welcher Weise die Stabilität des Gleichgewichts eines Körpers definiert wird.

Sind $q_1, q_2, \ldots q_n$ die die Lage des Körpers definierenden Lagrangeschen Parameter, welche in der betrachteten Gleichgewichtslage den Wert Null haben mögen, und gibt man diesen Parametern sehr kleine Anfangswerte, dabei den Punkten des Körpers zugleich sehr kleine Geschwindigkeiten erteilend, so wird die Gleichgewichtslage $q_1 = q_2 = \cdots q_n = 0$ dann eine stabile genannt, wenn es stets möglich ist, zu einem im voraus vorgeschriebenen willkürlich kleinen positiven Wert ε eine Zahl η derart zu bestimmen, daß während der ganzen Dauer der Bewegung die Parameter q den Wert ε nicht überschreiten, sobald ihre Anfangswerte sowie diejenigen der Anfangsgeschwindigkeiten unter η gewählt worden sind.

Schreibt man die Koordinaten eines Punktes des bewegten Körpers als Funktionen der Parameter q wie folgt:

$$x = \varphi(q_1, q_2, \ldots q_n), \qquad y = \psi(q_1, q_2, \ldots q_n), \qquad z = \chi(q_1, q_2, \ldots q_n),$$

so folgen aus diesen Gleichungen für die virtuellen Verschiebungen eines Punktes bei einer Veränderung der Parameter $q_1, q_2, \ldots q_n$ um $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$, die Werte

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots \frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\delta q_n, \\ \delta y &= \frac{\partial\psi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots \frac{\partial\psi}{\partial q_n}\delta q_n, \\ \delta z &= \frac{\partial\chi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\chi}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots \frac{\partial\chi}{\partial q_n}\delta q_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Befindet der Körper sich in einer Gleichgewichtslage, so muß nach dem in Ziff. 14 erwähnten Satz

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

sein. Dieser Ausdruck nimmt unter Einführung der aus (1) folgenden Werte für $\delta x, \delta y, \delta z$ folgende Form an

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_n\delta q_n = 0,$$

wobei

$$Q_i = \sum\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} + Y\frac{\partial\psi}{\partial q_i} + Z\frac{\partial\chi}{\partial q_i}\right). \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Weil diese Gleichung für alle Werte $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_n$ erfüllt sein muß, gelten in einer Gleichgewichtslage die Beziehungen

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0, \ldots Q_n = 0.$$

Da die Größen X, Y, Z Funktionen der Parameter q sind, gilt dasselbe von den Größen Q. Die obenstehenden Gleichungen liefern also diejenigen Parameterwerte q, bei denen eine Gleichgewichtslage möglich ist.

Für den Fall, daß der Ausdruck $Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots Q_n \delta q_n$ das totale Differential einer Funktion U ist, und also

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \dots Q_n = \frac{\partial U}{\partial q_n}$$

gesetzt werden darf, stimmen die Bedingungen für das Gleichgewicht überein mit den Gleichungen, welche diejenigen Parametersätze q liefern, für welche die Funktion U eventuell ein Maximum oder ein Minimum aufweist.

Es gilt nun der bereits von LAGRANGE angegebene, nachher von DIRICHLET bewiesene Satz, daß, wenn die Funktion U ein Maximum hat, der Körper sich in einer stabilen Gleichgewichtslage befindet. Von SIACCI ist später noch bewiesen worden, daß, wenn alle $\partial U/\partial q$ Null sind, ohne daß U ein Maximum aufweist, das Gleichgewicht auch stets instabil ist.

16. Das aus parallelen Kräften bestehende Kraftsystem; astatisches Gleichgewicht. Reduziert man ein System paralleler Kräfte $\mathfrak{K}_i$ von den Beträgen K_i auf einen Punkt O, und ist $\mathfrak{e}$ ein Einheitsvektor von O aus, der die gemeinsame Kraftrichtung angibt, so erhält man für die resultierende Kraft

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{e} \sum K_i \tag{1}$$

und für das Moment $\mathfrak{M}$ des resultierenden Kräftepaares

$$\mathfrak{M} = \sum [\mathfrak{r}_i, K_i \mathfrak{e}] = [(\sum K_i \mathfrak{r}_i) \mathfrak{e}], \tag{2}$$

wenn wiederum $\mathfrak{r}_i$ den Fahrstrahl von O nach dem Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{K}_i$ bedeutet.

Es gilt also nach bekannten Vektorrechengesetzen

$$\mathfrak{e} \mathfrak{M} = 0, \tag{3}$$

so daß, wie auch die Kräfte, unter Beibehaltung ihrer Angriffspunkte und ihres Parallelismus, gedreht werden mögen, die Richtung $\mathfrak{e}$ der Kräfte und die Achse $\mathfrak{M}$ des resultierenden Kräftepaares stets senkrecht zueinander gerichtet bleiben. Hierbei ist der Fall

$$\sum K_i \mathfrak{r}_i = 0,$$

bei welchem $\mathfrak{M} = 0$ ist, natürlich ausgeschlossen.

Wählt man einen anderen Punkt mit dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}'$ als Reduktionspunkt, so findet man

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}' &= \mathfrak{e} \sum K_i = \mathfrak{R}, \\ \mathfrak{M}' &= \sum [(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}'), K_i \mathfrak{e}] = \mathfrak{M} - [\mathfrak{r}' \mathfrak{e}] \sum K_i. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Setzt man zunächst voraus, daß die Resultante $\mathfrak{R}$ nicht verschwindet, daß also $\sum K_i \neq 0$ sei, so gilt nach Ziff. 4, Gleichung (2) für einen Punkt $\mathfrak{r}'$ der Zentralachse, wegen $R = \sum K_i$ und gemäß (1) und (2),

$$\mathfrak{r}' - \frac{1}{R} [\mathfrak{e} [(\sum K_i \mathfrak{r}_i) \mathfrak{e}]] = \varrho \cdot \mathfrak{e} \mathfrak{r}'$$

oder mit Anwendung einer bekannten Rechenregel

$$\mathfrak{r}' = \frac{1}{R} \sum K_i \mathfrak{r}_i + \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e} \left\{ \mathfrak{r}' - \frac{1}{R} \sum K_i \mathfrak{r}_i \right\}. \tag{5}$$

Setzt man diesen Wert von $\mathfrak{r}'$ in (4) ein, so kommt $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - [(\sum K_i \mathfrak{r}_i)\mathfrak{e}]$ oder gemäß (2) $\mathfrak{M}' = 0$, wonach also das System in bezug auf die Punkte der Zentralachse kein Moment besitzt, in Übereinstimmung mit dem früher (Ziff. 4) erhaltenen allgemeinen Satze, daß für alle Punkte des Raumes die Projektion des resultierenden Momentvektors auf den resultierenden Kraftvektor einen konstanten Wert, in unserem Fall also gemäß (5) den Wert Null hat. Ein System von parallelen Kräften ist also einer Einzelkraft gleichwertig.

Die Gleichung (5) der Zentralachse zeigt weiter, daß die Wirkungslinie dieser Einzelkraft **durch einen festen Punkt** geht, wie auch die Richtung des Kraftsystems gewählt werden möge, nämlich durch den Punkt mit dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}^* = \sum K_i \mathfrak{r}_i / R$; denn dieser Vektor, für $\mathfrak{r}'$ in (5) eingesetzt, befriedigt die Gleichung identisch. Dieser Punkt wird der **Mittelpunkt des Kraftsystems** genannt.

Betrachtet man diesen Mittelpunkt des Kraftsystems als den Angriffspunkt seiner Resultierenden, und nennt man das Produkt aus der Größe einer Kraft und dem Abstand ihres Angriffspunktes von einer Ebene das **Moment dieser Kraft in bezug auf die Ebene**, so gilt der Satz:

Die Summe der Momente einer Anzahl paralleler Kräfte in bezug auf eine Ebene ist gleich dem Momente der resultierenden Kraft in bezug auf diese Ebene.

Ist dagegen nunmehr $\sum K_i = 0$, so findet man gemäß (4) für jeden beliebigen Reduktionspunkt $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$, also ein Kräftepaar von konstanter Größe M, die sich aus (2) nach einer bekannten Rechenregel ergibt:

$$M^2 = \mathfrak{M}^2 = (\sum K_i \mathfrak{r}_i)^2 - (\mathfrak{e} \sum K_i \mathfrak{r}_i)^2 .$$

Der Betrag M erhält seinen größten Wert, wenn $\mathfrak{e} \sum K_i \mathfrak{r}_i = 0$ ist; dazu muß die Richtung $\mathfrak{e}$ des Kraftsystems senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{a} = \sum K_i \mathfrak{r}_i$ stehen.

Gibt man hingegen dem Kraftsystem die Richtung $\mathfrak{e} \| \mathfrak{a}$, so wird gemäß (2) das resultierende Moment gleich Null. Das System ist **bei dieser Richtung** also im Gleichgewicht.

Ist außer $\sum K_i$ noch $\sum K_i \mathfrak{r}_i$ gleich Null, so ist gemäß (4) und (2) für jeden Reduktionspunkt das resultierende Kräftepaar gleich Null, und zwar unabhängig von der gemeinsamen Richtung, welche den Kräften (immer unter Beibehaltung ihrer Angriffspunkte) erteilt wird. Man sagt in diesem Falle: Die Kräfte bilden ein **astatisches** Gleichgewichtssystem.

17. Das astatische Gleichgewicht eines allgemeinen Kraftsystems. Auch bei einem allgemeinen, sich im Gleichgewicht befindenden System von gebundenen Kräften kann die Frage gestellt werden, ob das Gleichgewicht bei jeder gemeinsamen Drehung der Kräfte um ihre Angriffspunkte erhalten bleiben kann. Zur Beantwortung dieser Frage verbindet man die Angriffspunkte x_i, y_i, z_i der Kräfte mit einem Koordinatensystem $Ox'y'z'$, das ursprünglich mit dem System $Oxyz$ zusammenfällt, sodann aber unter Festhaltung des Punktes O in eine willkürliche Lage gebracht wird, welche durch die Richtungskosinusse $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$, $\cos\alpha_3$, $\cos\beta_3$, $\cos\gamma_3$ der Achsen definiert ist. In den so erhaltenen neuen Punkten läßt man die nach Richtung und Größe unveränderten Kräfte angreifen, stellt in bezug auf die x-, y- und z-Achse abermals die Gleichgewichtsbedingungen auf und fordert, daß sie unabhängig von den Größen α, β, γ befriedigt werden.

Wie man sich leicht überzeugt, müssen dann die Ausdrücke

$$\begin{array}{llll}
R_x = \sum X_i, & R_{xx} = \sum X_i x_i, & R_{xy} = \sum X_i y_i, & R_{xz} = \sum X_i z_i, \\
R_y = \sum Y_i, & R_{yx} = \sum Y_i x_i, & R_{yy} = \sum Y_i y_i, & R_{yz} = \sum Y_i z_i, \\
R_z = \sum Z_i, & R_{zx} = \sum Z_i x_i, & R_{zy} = \sum Z_i y_i, & R_{zz} = \sum Z_i z_i
\end{array}$$

verschwinden. Diese notwendigen Bedingungen sind zugleich hinreichend.

Weil die Beziehungen:

$$\sum X_i = 0, \qquad \sum X_i x_i = 0, \qquad \sum X_i y_i = 0, \qquad \sum X_i z_i = 0$$

zum Ausdruck bringen, daß das von den x-Komponenten gebildete System von Parallelkräften im astatischen Gleichgewicht ist, so erkennt man, daß astatisches Gleichgewicht eines allgemeinen Kraftsystems gesichert ist, wenn die Kraftkomponenten in drei senkrechten, sonst beliebigen Richtungen ein astatisches Gleichgewichtssystem bilden.

Für weitergehende Ausführungen sei auf die Untersuchungen von Darboux[1]) verwiesen.

II. Geometrie der Massen.

18. Lineare Momente. In der Geometrie der Massen werden die Punkte P_i des Raumes mit einer positiven oder negativen Zahl μ_i behaftet, welche man mit dem Namen „Masse" belegt. Der Begriff, den dieser Name deckt, wechselt mit der Natur der physikalischen Probleme, welche mit der Geometrie der Massen in Verbindung gesetzt werden. Das Gemeinsame an allen diesen Problemen ist aber, daß die bei ihnen auftretenden Massensysteme — gleichgültig, ob unter „Masse" die träge Masse oder das Gewicht oder elektrische oder magnetische Menge usw. verstanden wird — dargestellt werden können durch gebundene Vektoren von gemeinsamer, sonst aber beliebiger Richtung, welche von den einzelnen Massenpunkten ausgehen und deren Länge mit den Größen der betreffenden Massen proportional ist. Kommt den gebundenen Vektoren die Bedeutung von Kräften zu, so werden wir auf Untersuchungen geführt, welche bereits unter Ziff. 16 erwähnt worden sind. Es ist bequem, die einzelnen Massenpunkte P_i durch ihre von einem gemeinsamen Ursprung O aus nach P_i gezogenen Fahrstrahlen $\mathfrak{r}_i$ zu kennzeichnen.

Unter dem polaren Moment eines Massensystems in bezug auf einen Punkt P mit dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ versteht man den Vektor

$$\mathfrak{p} = \sum \mu_i (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}),$$

wobei also $(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r})$ der von P nach P_i gezogene Fahrstrahl ist. Richtung und Größe des Vektors $\mathfrak{p}$ sind, wie ersichtlich, unabhängig von der Wahl des zugrunde gelegten Ursprungs O. Beschränkt man sich auf den Fall, daß $\mu = \sum \mu_i \neq 0$ ist, so gibt es einen Punkt, für welchen das polare Moment des Massensystems Null ist. Der Fahrstrahl $\mathfrak{r}_s$ dieses sog. Schwerpunktes oder Massenmittelpunktes ist

$$\mathfrak{r}_s = \frac{\sum \mu_i \mathfrak{r}_i}{\mu}. \tag{1}$$

In rechtwinkligen kartesischen Koordinaten lautet dies:

$$x_s = \frac{\sum \mu_i x_i}{\mu}, \qquad y_s = \frac{\sum \mu_i y_i}{\mu}, \qquad z_s = \frac{\sum \mu_i z_i}{\mu}. \tag{2}$$

Mit Hilfe dieses Schwerpunktvektors $\mathfrak{r}_s$ kann das auf den Punkt P bezogene polare Moment auch wie folgt geschrieben werden

$$\mathfrak{p} = \mu\, \mathfrak{r}_s - \sum \mu_i \mathfrak{r} = \mu (\mathfrak{r}_s - \mathfrak{r}),$$

wo jetzt $(\mathfrak{r}_s - \mathfrak{r})$ der von P nach S gezogene Fahrstrahl ist. Hieraus folgt der Satz: Das polare Moment eines Massensystems in bezug auf einen Punkt ist gleich dem Moment der im Schwerpunkte konzentrierten Gesamtmasse.

[1]) G. Darboux, Mémoire sur l'équilibre astatique, Bordeaux, Mém. (2) Bd. 2. 1877; vgl. auch E. J. Routh, A treatise on analytical statics, Bd. 2, Cambridge 1892.

Multipliziert man für jeden Massenpunkt P_i die Masse μ_i mit seinem Abstand von einer festen Ebene ε (welcher positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem P_i auf der als positiv festgesetzten Seite der Ebene liegt oder nicht), so erhält man in der Summe dieser Produkte das sog. **planare lineare Moment** m oder, wie man auch sagt, das **statische Moment** m des Massensystems in bezug auf die Ebene ε. Ist $\mathfrak{a}$ der Vektor des vom Ursprung O auf diese Ebene gefällten Lotes von der Länge a, so ist der Ausdruck $\mathfrak{a}\mathfrak{r}_i/a$ die Projektion des Fahrstrahls $\mathfrak{r}_i$ auf den Vektor $\mathfrak{a}$ und demgemäß

$$a - \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{r}_i}{a}$$

der Abstand des Punktes P_i von der Ebene ε. Daher wird

$$m = \sum \mu_i\left(a - \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{r}_i}{a}\right) = \mu\left(a - \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{r}_s}{a}\right) = \mu a_s,$$

wo a_s den Abstand des Schwerpunkts S von der Ebene ε bedeutet.

Das statische Moment des Massensystems in bezug auf eine Ebene ist also ebenfalls gleich dem statischen Moment der im Schwerpunkte konzentrierten Gesamtmasse. Insbesondere weisen alle durch den Schwerpunkt gehenden Ebenen (sog. **Schwerebenen**) ein statisches Moment Null auf.

Aus der Definition des Schwerpunktes und den daraus abgeleiteten Folgerungen schließt man leicht auf folgende Sätze: Wird unter der Projektion eines Massenpunktes auf eine Ebene ε ein Massenpunkt mit gleicher Masse verstanden, dessen Lage durch die orthogonale Projektion des Punktes auf ε angegeben wird, so liefert die Projektion des Schwerpunktes eines Massensystems auf eine Ebene den Schwerpunkt des projizierten Massensystems.

Das polare Moment eines durch Projektion entstandenen ebenen Massensystems in bezug auf einen Punkt der Projektionsebene wird erhalten als Projektion des in bezug auf denselben Punkt bestimmten Momentvektors des räumlichen Massensystems auf dieselbe Ebene.

Aus der Gleichung (1) folgt schließlich noch ein Satz, welcher bei der praktischen Bestimmung des Schwerpunktes eines Massensystems von großer Bedeutung ist. Zerlegt man nämlich das vorgegebene Massensystem in eine Anzahl Teilsysteme, so kann man die Summen $\sum \bar{\mu}_i \bar{\mathfrak{r}}_i$ der von einem solchen Teilsystem herrührenden Glieder zu $\bar{\mu}\bar{\mathfrak{r}}_s$ zusammenfassen, wo unter $\bar{\mu}$ die Gesamtmasse des betrachteten Teilsystems und unter $\bar{\mathfrak{r}}_s$ der Schwerpunktsfahrstrahl dieses Systems verstanden sind. Denkt man sich also die Massen der verschiedenen Teilsysteme in deren Schwerpunkten konzentriert, so ist der Schwerpunkt des so erhaltenen Massensystems identisch mit dem Schwerpunkt des ursprünglichen Systems.

19. Magnetisches Massensystem; indifferentes Massensystem. Unter Ziff. 18 ist nur der allgemeine Fall $\mu = \sum \mu_i \neq 0$ betrachtet worden. Es gibt aber noch zwei andere Fälle, welche bei $\mu = 0$ auftreten, und welche sich dadurch voneinander unterscheiden, daß im einen Fall die polaren Momente $\mathfrak{p}$ für alle Punkte des Raumes einen gemeinsamen, von Null verschiedenen Wert, im zweiten Fall dagegen den gemeinsamen Wert Null haben. Ein System der ersten Beschaffenheit nennt man ein **magnetisches System** (weil ein System von magnetischen Massen die ins Auge gefaßte Eigenschaft besitzt); ein System der zweiten Art wird ein **indifferentes System** genannt.

Daß jedenfalls bei $\mu = 0$ beide Systeme für alle Punkte ein konstantes polares Moment haben, sieht man, wenn man in bezug auf zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ die Differenz der zugehörigen polaren Momente bildet. Man findet

$$\mathfrak{p} - \mathfrak{p}' = \sum \mu_i(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}) - \sum \mu_i(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}') = \sum \mu_i(\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}) = \mu(\mathfrak{r}' - \mathfrak{r}) = 0.$$

Ist der Momentvektor $\mathfrak{p}$ von Null verschieden, so kann man sagen, daß der Schwerpunkt in dessen Richtung, welche man als **Achsenrichtung** des Systems bezeichnet, ins Unendliche gerückt ist. Ist dagegen der Momentvektor Null, so kann jeder Punkt als Schwerpunkt des Massensystems aufgefaßt werden.

Im ersten Falle sind die Ebenen, in bezug auf welche das statische Moment Null ist, alle mit der Achsenrichtung parallel. Für eine willkürliche Ebene wird die Größe des statischen Momentes durch Projektion des polaren Momentvektors auf diese Ebene erhalten. Die Ebenen, welche senkrecht zur Achsenrichtung stehen, weisen mithin das größte Moment auf. Für ein indifferentes Massensystem verschwindet selbstverständlich das statische Moment für jede Ebene.

Wenn die Massenpunkte ein Kontinuum bilden, so hat man in den vorhergehenden Betrachtungen die dabei vorkommenden Summationen durch Integrationen zu ersetzen. Die entwickelten Sätze bleiben aber alle ungeändert.

20. Quadratische Momente. Unter dem **polaren Trägheitsmoment** eines **Massensystems in bezug auf einen Punkt** versteht man den skalaren Ausdruck $\sum \mu_i a_i^2$, in welchem mit a_i der Abstand des i-ten Massenpunktes vom Bezugpunkt gemeint ist. Wird mit a_i der Abstand eines Massenpunktes von einer Ebene bzw. von einer Geraden angegeben, so definiert der Ausdruck $\sum \mu_i a_i^2$ das auf die Ebene bezogene **planare Trägheitsmoment** bzw. das auf die Gerade bezogene **axiale Trägheitsmoment**. Unter dem **Trägheitsradius** oder **Trägheitsarm** eines Massensystems in bezug auf einen Punkt, bzw. eine Ebene, bzw. eine Gerade versteht man eine Strecke, deren Quadrat gleich dem durch die Gesamtmasse dividierten polaren, bzw. planaren, bzw. axialen Trägheitsmomente ist. Sind zwei Ebenen gegeben, so definiert man durch die Summe $\sum \mu_i a_i b_i$, in welcher a_i und b_i die Abstände des i-ten Massenpunktes von den beiden Ebenen bedeuten, das sog. **Zentrifugal- oder Deviationsmoment in bezug auf diese Ebenen**. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, soll im nachfolgenden stets von Zentrifugalmomenten in bezug auf zwei zueinander **senkrechte** Ebenen die Rede sein. In der Kinetik spielt gelegentlich der Ausdruck $\sum \mu_i a_i \mathfrak{b}_i$ eine Rolle, wo $\mathfrak{b}_i$ der Lotvektor vom i-ten Massenpunkt auf eine Gerade g und a_i der Abstand des Fußpunkts von einem festen Punkt O der Geraden g bedeutet. Man nennt diesen Ausdruck wohl auch das **Deviationsmoment bezüglich der Geraden g und ihres Punktes O**; er ist ein Vektor senkrecht zur Geraden g.

21. Polare Trägheitsmomente. Das polare Trägheitsmoment J^P in bezug auf einen willkürlichen Punkt P mit dem Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ steht in einfacher Beziehung zu demjenigen J^P_S in bezug auf den Schwerpunkt S des Massensystems. Es gilt nämlich für $\mu \neq 0$ mit Rücksicht auf Ziff. 18, Gleichung (1)

$$
\begin{aligned}
J^P &= \sum \mu_i (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r})^2 = \sum \mu_i \{(\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_s) + (\mathfrak{r}_s - \mathfrak{r})\}^2 \\
&= \sum \mu_i (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_s)^2 + 2(\mathfrak{r}_s - \mathfrak{r})\left(\sum \mu_i \mathfrak{r}_i - \mu \mathfrak{r}_s\right) + \mu (\mathfrak{r}_s - \mathfrak{r})^2 \\
&= J^P_S + \mu \cdot \overline{PS}^2.
\end{aligned}
$$

Das polare Trägheitsmoment hat also in bezug auf den Schwerpunkt des Massensystems einen kleinsten, in bezug auf alle Punkte, welche gleichen Abstand vom Schwerpunkt haben, einen konstanten Wert.

Im Falle eines magnetischen Massensystems, für welches also $\sum \mu_i = 0$, jedoch das etwa in bezug auf den Ursprung O genommene statische polare Moment $\mathfrak{p}_0 = \sum \mu_i \mathfrak{r}_i \neq 0$ ist, gilt

$$
J^P = \sum \mu_i (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r})^2 = \sum \mu_i \mathfrak{r}_i^2 - 2\mathfrak{p}_0 \mathfrak{r} = J^P_0 - 2\mathfrak{p}_0 \mathfrak{r}, \qquad (1)
$$

wenn J_0^p das polare Trägheitsmoment in bezug auf den Punkt O bedeutet. Punkte, deren Fahrstrahlen $\mathfrak{r}$ der Bedingung $\mathfrak{p}_0 \mathfrak{r} - \frac{1}{2} J_0^p = 0$ gehorchen, liegen in einer Ebene, welche senkrecht zur Achse $\mathfrak{p}_0$ des magnetischen Systems steht und den Abstand $J_0^p / 2 p_0$ vom Ursprung O besitzt; denn das skalare Produkt $\mathfrak{p}_0 \mathfrak{r}$ bedeutet ja die mit dem Betrag p_0 von $\mathfrak{p}_0$ multiplizierte Projektion des Fahrstrahles $\mathfrak{r}$ auf die Achse $\mathfrak{p}_0$. Für alle diese Punkte hat das polare Trägheitsmoment gemäß (1) den Wert Null; für Punkte, welche in einer dazu parallelen Ebene liegen, hat es einen konstanten Wert. Nennt man den Abstand beider Ebenen $\pm l$, so hat für einen Punkt der letzten Ebene das polare Trägheitsmoment den Wert $\pm 2 l p_0$, wie man unmittelbar einsieht, wenn man die Formel (1) in der Gestalt

$$J^p = 2 p_0 \left(\frac{J_0^p}{2 p_0} - \frac{\mathfrak{p}_0 \mathfrak{r}}{p_0} \right)$$

schreibt. Denn das erste Glied im Klammerausdruck bedeutet den Abstand der ersten, das zweite Glied den der zweiten Ebene vom Ursprung, der Klammerausdruck selbst also einfach den Abstand $\pm l$.

Für ein indifferentes Massensystem, bei welchem außer μ auch $\mathfrak{p}_0 = 0$ ist, hat J^p für alle Punkte des Raumes denselben Wert J_0^p.

22. Axiale und planare Trägheitsmomente. Das axiale Trägheitsmoment J^a eines Massensystems in bezug auf eine willkürliche Gerade g steht in einfachem Zusammenhang mit demjenigen in bezug auf eine Gerade g', welche durch den Schwerpunkt des Massensystems geht und mit der ersten parallel läuft. Ist nämlich a_i der Abstand des Massenpunktes μ_i von der Geraden g, ferner a_i' sein Abstand von g' und endlich l der gegenseitige Abstand der beiden Geraden g und g', so wird

$$J_g^a = \sum \mu_i a_i^2 = \sum \mu_i a_i'^2 + l^2 \sum \mu_i - 2l \sum \mu_i a_i' \cos(l, a_i') \tag{1}$$

oder

$$J_g^a = J_{g'}^a + \mu l^2, \tag{2}$$

da das letzte Glied gemäß Ziff. 18, Gleichung (1) bis auf einen konstanten Faktor gleich der Projektion des (verschwindenden) Abstandes des Schwerpunktes von der Geraden g' auf die Richtung l ist. Man braucht also nur die axialen Trägheitsmomente in bezug auf die durch den Schwerpunkt des Systems gehenden Geraden zu kennen, um in einfachster Weise die axialen Trägheitsmomente für alle anderen Raumgeraden bestimmen zu können.

In gleicher Weise leitet man den Zusammenhang ab, welcher zwischen dem planaren Trägheitsmoment J^p eines Massensystems in bezug auf eine willkürliche Ebene e und demjenigen in bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende, dazu parallele Ebene e' besteht. Nennt man l den Abstand zwischen e und e', so erhält man

$$J_e^p = J_{e'}^p + \mu l^2. \tag{3}$$

Diese Formel ist als ein Sonderfall einer allgemeineren zu betrachten, welche sich auf Zentrifugalmomente bezieht. Bringt man nämlich das Zentrifugalmoment $J_{e_1 e_2}$ eines Massensystems in bezug auf zwei Ebenen e_1 und e_2 in Verbindung mit demjenigen $J_{e_1' e_2'}$ in bezug auf die beiden durch den Schwerpunkt gehenden bzw. dazu parallelen Ebenen e_1' und e_2', welche von den erstgenannten den Abstand l_1 und l_2 haben mögen, so findet man

$$J_{e_1 e_2} = J_{e_1' e_2'} \pm \mu l_1 l_2. \tag{4}$$

Der Doppelsinn im Zeichen verschwindet, wenn festgestellt wird, wann der Abstand eines Punktes von der Ebene e_1 (bzw. e_2) positiv gerechnet wird,

und angegeben wird, auf welcher Seite von e_1 (bzw. e_2) die Ebene e_1' (bzw. e_2') liegt.

Für die Berechnung von axialen und planaren Trägheitsmomenten eines allgemeinen Massensystems kann man sich also auf Momente beschränken, welche auf die Schwerpunktsgeraden bzw. auf die Schwerpunktsebenen bezogen sind.

Auch für die magnetischen und indifferenten Massensysteme genügt es, die Trägheitsmomente für Geraden und Ebenen durch einen bestimmten Punkt zu kennen, um dieselben Größen auch in bezug auf andere Raumelemente (Punkte, Geraden, Ebenen) in einfacher Weise bestimmen zu können.

Vergleicht man nämlich die axialen Momente in bezug auf zwei parallele Achsen g und g', wovon g' durch den Ursprung O geht, miteinander, so findet man zunächst wieder die Gleichung (1); hierin ist jetzt $\sum \mu_i = 0$ zu setzen, und $\sum \mu_i e_i' \cos(l, e_i')$ bedeutet die mit ihrem Vorzeichen versehene Projektion p des Vektors $\mathfrak{p}_0$ des von O unabhängigen statischen polaren Momentes auf eine Gerade, welche g und g' senkrecht schneidet, wobei angenommen ist, daß die von g' nach g gehende Richtung als positive Richtung für diese Gerade gilt. Deshalb ist:

$$J_g^2 = J_{g'}^2 - 2lp. \tag{5}$$

Für ein indifferentes Massensystem, bei welchem das statische polare Moment gleich Null ist, gilt

$$J_g^2 = J_{g'}^2. \tag{6}$$

Beim Vergleich der planaren Trägheitsmomente eines magnetischen Massensystems in bezug auf zwei Ebenen e und e', deren Abstand l ist, erhält man ganz ebenso

$$J_e^2 = J_{e'}^2 + 2lp, \tag{7}$$

wenn jetzt mit p die mit ihrem Vorzeichen versehene Projektion des Vektors $\mathfrak{p}_0$ auf die gemeinsame Normalenrichtung der Ebenen e und e' bezeichnet wird. Die von e' nach e gehende Normalenrichtung gilt als positiv.

Bei dem indifferenten Massensystem gilt wieder

$$J_e^2 = J_{e'}^2. \tag{8}$$

Schließlich gilt für das Zentrifugalmoment des magnetischen Massensystems die Beziehung

$$J_{e_1 e_2} = J_{e_1' e_2'} + l_1 p_1 + l_2 p_2,$$

wenn unter p_1 und p_2 die mit ihrem Vorzeichen versehenen Projektionen des statischen polaren Momentvektors des Massensystems in die normalen Richtungen der Ebenen e_1 und e_2 und unter l_1 und l_2 bzw. die Abstände der Ebenen e_1, e_1' und e_2, e_2' verstanden werden.

Beim indifferenten Massensystem ist

$$J_{e_1 e_2} = J_{e_1' e_2'}.$$

22. Beziehungen zwischen den quadratischen Momenten in bezug auf den Anfang, die Achsen und die Ebenen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Wird das quadratische polare Moment in bezug auf den Koordinatenanfang mit J_0 bezeichnet, die quadratischen axialen Momente in bezug auf die x-, y- und z-Achse eines rechtwinkligen kartesischen Achsenkreuzes mit J_x, J_y, J_z und die quadratischen planaren Momente in bezug auf die yz-, zx- und xy-Ebene mit

J'_x, J'_y, J'_z, so bestehen zwischen diesen Größen, wie man ihren Definitionsgleichungen unmittelbar entnimmt, folgende Beziehungen:

$$J_x = J'_y + J'_z;\qquad J_y = J'_z + J'_x,\qquad J_z = J'_x + J'_y \tag{1}$$

$$J'_x = \tfrac{1}{2}(J_y + J_z - J_x),\quad J'_y = \tfrac{1}{2}(J_z + J_x - J_y),\quad J'_z = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y - J_z) \tag{1'}$$

$$J_0 = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) = J'_x + J'_y + J'_z \tag{2}$$

$$J_0 = J_x + J'_x = J_y + J'_y = J_z + J'_z \tag{3}$$

$$J'_x = J_0 - J_x,\qquad J'_y = J_0 - J_y,\qquad J'_z = J_0 - J_z. \tag{3'}$$

Da bei wirklichen Massensystemen die planaren Trägheitsmomente stets positiv sind, so schließt man aus (1') auf die Ungleichungen

$$J_y + J_z > J_x,\qquad J_z + J_x > J_y,\qquad J_x + J_y > J_z. \tag{4}$$

Diese Beziehungen, welche aussagen, daß man aus den als Strecken aufgefaßten Zahlen J_x, J_y, J_z bei wirklichen Massensystemen stets ein reelles Dreieck bilden kann, sind in der Kinetik von großer Bedeutung.

24. Die Trägheitsfläche eines Punktes. Wenn für drei aufeinander senkrechte Ebenen, welche als Koordinatenebenen gewählt werden mögen, die axialen Trägheitsmomente J_x, J_y, J_z in bezug auf ihre Schnittgeraden sowie die drei Deviationsmomente D_x, D_y und D_z in bezug auf die von diesen Achsen bestimmten Ebenenpaare bekannt sind, so kann das Trägheitsmoment J_g in bezug auf eine willkürliche, durch den Koordinatenanfang gehende Gerade $g(\alpha, \beta, \gamma)$ wie folgt ausgedrückt werden (vgl. Abb. 11, wo $P_iQ_i \perp g$)

Abb. 11. Bestimmung des Trägheitsmomentes J_g, wenn die Trägheitsgrößen in bezug auf die Koordinatenebenen und Koordinatenachsen gegeben sind.

$$\begin{aligned}
J_g &= \sum \mu_i(\overline{OP_i^2} - \overline{OQ_i^2})\\
&= \sum \mu_i\{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma)^2\}\\
&= (\cos^2\beta + \cos^2\gamma)\sum \mu_i x_i^2 + (\cos^2\gamma + \cos^2\alpha)\sum \mu_i y_i^2 + (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)\sum \mu_i z_i^2\\
&\quad - 2\cos\beta\cos\gamma\sum \mu_i y_i z_i - 2\cos\gamma\cos\alpha\sum \mu_i z_i x_i - 2\cos\alpha\cos\beta\sum \mu_i x_i y_i\\
&= \cos^2\alpha\sum \mu_i(y_i^2 + z_i^2) + \cos^2\beta\sum \mu_i(z_i^2 + x_i^2) + \cos^2\gamma\sum \mu_i(x_i^2 + y_i^2)\\
&\quad - 2\cos\beta\cos\gamma\sum \mu_i y_i z_i - 2\cos\gamma\cos\alpha\sum \mu_i z_i x_i - 2\cos\alpha\cos\beta\sum \mu_i x_i y_i,
\end{aligned}$$

also

$$J_g = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2D_x\cos\beta\cos\gamma - 2D_y\cos\gamma\cos\alpha - 2D_z\cos\alpha\cos\beta.$$

Dividiert man diese Gleichung durch J_g und setzt man

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\frac{J_g}{\mu}}} = x,\qquad \frac{\cos\beta}{\sqrt{\frac{J_g}{\mu}}} = y,\qquad \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\frac{J_g}{\mu}}} = z,$$

so erhält man

$$\frac{J_x}{\mu}x^2 + \frac{J_y}{\mu}y^2 + \frac{J_z}{\mu}z^2 - 2\frac{D_x}{\mu}yz - 2\frac{D_y}{\mu}zx - 2\frac{D_z}{\mu}xy = 1. \tag{1}$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Fläche, welche — nach den Definitionsgleichungen für x, y, z — in jedem ihrer Halbmesser das Reziproke des auf seinen

Träger bezogenen axialen Trägheitsradius liefert, ist für ein wirkliches Massensystem, oder wie wir kurz sagen wollen, für ein Schwersystem, ein (reelles) Ellipsoid.

Dieses Ellipsoid, welches nach POINSOT benannt worden ist, hat, auf seine eigenen Hauptachsen bezogen, die Gleichung:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1, \tag{2}$$

wenn a, b und c die zu den Hauptachsen des Ellipsoids gehörigen Trägheitsradien bedeuten. Die Abwesenheit der Glieder mit yz, zx und xy in Gleichung (2) zeigt, daß die Deviationsmomente für die Symmetrieebenen des Ellipsoids den Wert Null haben. In jedem Punkte des Raumes gibt es also wenigstens ein Tripel von zueinander senkrechten Ebenen, in bezug auf welche die Deviationsmomente verschwinden. Diese Ebenen werden die **Hauptebenen**, ihre Schnittgeraden die **Hauptachsen**, a, b, c die **Hauptträgheitsradien**, $A = \mu a^2$, $B = \mu b^2$, $C = \mu c^2$ die **Hauptträgheitsmomente** des betreffenden Punktes genannt.

Für den Schwerpunkt des Systems wird das durch Gleichung (2) dargestellte Ellipsoid das **zentrale Trägheitsellipsoid** genannt.

Bestimmt man, von den Hauptebenen des Schwerpunktes ausgehend, das planare Moment J' in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende willkürliche Ebene, deren Normale die Winkel α, β, γ mit den zentralen Hauptachsen einschließt, so erhält man, wenn mit A', B', C' die planaren Trägheitsmomente in bezug auf die Hauptebenen yz, zx, xy bezeichnet werden,

$$J' = \sum (x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma)^2 = A' \cos^2\alpha + B' \cos^2\beta + C' \cos^2\gamma. \tag{3}$$

Führt man eine zu der Ebene $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$ parallele Ebene ein, von welcher der Koordinatenanfang einen Abstand l gleich dem aus J' abgeleiteten Trägheitsradius hat, so findet man für die Gleichung dieser Ebene

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \sqrt{\frac{A'\cos^2\alpha + B'\cos^2\beta + C'\cos^2\gamma}{\mu}} = 0.$$

Die Ebenenkoordinaten u, v, w dieser Ebene sind

$$u = \frac{\sqrt{\mu}\cdot\cos\alpha}{\sqrt{A'\cos^2\alpha + B'\cos^2\beta + C'\cos^2\gamma}}, \qquad v = \frac{\sqrt{\mu}\cdot\cos\beta}{\sqrt{A'\cos^2\alpha + B'\cos^2\beta + C'\cos^2\gamma}},$$

$$w = \frac{\sqrt{\mu}\cdot\cos\gamma}{\sqrt{A'\cos^2\alpha + B'\cos^2\beta + C'\cos^2\gamma}}.$$

Sie genügen offenbar der Gleichung

$$A' u^2 + B' v^2 + C' w^2 = \mu.$$

Die von der Ebene (u, v, w) umhüllte Fläche; ist im Falle eines Schwersystems ein Ellipsoid, dessen Gleichung in Punktkoordinaten lautet:

$$\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = \frac{1}{\mu} \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Dieses Ellipsoid wird das **Culmannsche Zentralellipsoid** genannt.

In bezug auf ein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem mit gleichem Koordinatenanfang hätte die Gleichung dieses Ellipsoids in Ebenenkoordinaten, wie man sich unter Benutzung der Definitionsgleichung (3) für J' leicht überzeugt, die Form

$$J'_x u^2 + J'_y v^2 + J'_z w^2 + 2D_x vw + 2D_y wu + 2D_z uv = \mu$$

angenommen.

Zur vollständigen Bestimmung aller quadratischen Momente genügt, wie man aus den Gleichungen der Poinsotschen und Culmannschen Flächen ableitet, die Kenntnis der sechs Größen $J'_x, J'_y, J'_z, D_x, D_y, D_z$ oder was auf dasselbe hinauskommt, diejenige der Größen $J_x, J_y, J_z, D_x, D_y, D_z$.

Wie aus den Ableitungen hervorgeht, gehört zu jedem Raumpunkt eine Poinsotsche und eine Culmannsche Trägheitsfläche.

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß außer den Poinsotschen und Culmannschen Flächen in der Literatur auch die beiden zu ihnen reziproken Flächen vielfach Verwendung finden, welche nach Mc Cullagh und Binet benannt werden. Ihre Gleichungen lauten

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{bzw.} \qquad a'^2x^2+b'^2y^2+c'^2z^2=1\,.$$

25. Bedingung, daß eine Gerade für einen auf ihr liegenden Punkt O Hauptachse ist. Nimmt man den Punkt O zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems $Oxyz$, dessen z-Achse mit der Geraden g zusammenfällt, so kann, wenn g für den Punkt O Hauptachse sein soll, die Gleichung der Poinsotschen Trägheitsfläche für diesen Punkt keine Glieder mit yz und zx enthalten. Denn bei geeigneter Drehung des Achsenkreuzes um die z-Achse muß diese Gleichung in die Form

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$$

übergeführt werden können.

Es müssen also $\sum\mu_i x_i z_i$ und $\sum\mu_i y_i z_i$ Null sein. Diese notwendigen Bedingungen sind, wie man sich leicht überzeugt, auch als genügend anzusehen.

Sind sie erfüllt, so können sie im allgemeinen nicht für einen zweiten Punkt (o, o, h) der Geraden g befriedigt werden. Dazu müßte nämlich

$$\sum\mu_i x_i(z_i-h)=0 \qquad \text{und} \qquad \sum\mu_i y_i(z_i-h)=0$$

sein, oder in Verbindung mit $\sum\mu_i x_i z_i=0$, $\sum\mu_i y_i z_i=0$:

$$h\sum\mu_i x_i=0\,, \qquad h\sum\mu_i y_i=0\,,$$

d. h. die Gerade g müßte eine Schwerlinie sein.

Zugleich aber folgt hieraus, daß die Hauptachsen des Schwerpunktes für jeden ihrer Punkte Hauptachsen sind.

Die Bedingung dafür, daß die Gerade g für einen willkürlichen ihrer Punkte Hauptachse ist, sowie die Lage dieses Punktes erhält man unter Zugrundelegung eines willkürlichen, rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen z-Achse mit g zusammenfällt, aus den Gleichungen:

$$\sum\mu_i x_i(z_i-h)=0\,, \qquad \sum\mu_i y_i(z_i-h)=0\,,$$

$$h=\frac{\sum\mu_i x_i z_i}{\sum\mu_i x_i}=\frac{\sum\mu_i y_i z_i}{\sum\mu_i y_i}\,.$$

26. Der Reyesche Achsenkomplex. Während, wie schon gezeigt wurde, durch einen willkürlichen Punkt O drei zueinander senkrechte Geraden Ox, Oy, Oz gehen, welche für diesen Punkt selbst Hauptachsen sind, gibt es noch unendlich viele andere durch ihn hindurchgehende Geraden, welche Hauptachsen für einen von O verschiedenen Punkt sind. Alle diese Geraden erfüllen einen Kegel, welcher der zu dem Punkt gehörende Komplexkegel des von allen Hauptachsen bestimmten quadratischen, sog. Reyeschen Komplexes ist. Die Gleichung dieses Kegels in bezug auf das Haupttripel $Oxyz$ wird mit Hilfe der unter Ziff. 25 gefundenen Bedingung wie folgt aufgestellt.

Es wird bei einer durch O gehenden Geraden g ein rechtwinkliges Achsenkreuz $Ox'y'z'$ angenommen, dessen z'-Achse mit g zusammenfällt. In bezug auf dieses Achsenkreuz lautet die Bedingung dafür, daß g eine Hauptachse ist

$$\sum \mu_i y'_i \sum \mu_i z'_i x'_i = \sum \mu_i x'_i \sum \mu_i y'_i z'_i .$$

Sind $\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1, \cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2, \cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3$ die Richtungskosinusse der Achsen $x'y'z'$ in bezug auf $Oxyz$, so geht diese Beziehung mit Hilfe der Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ z' &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3 \end{aligned}$$

über in

$$\begin{aligned} &(\cos\alpha_2 \textstyle\sum \mu_i x_i + \cos\beta_2 \sum \mu_i y_i + \cos\gamma_2 \sum \mu_i z_i) \\ &\qquad \cdot (\cos\alpha_1\cos\alpha_3 \textstyle\sum \mu_i x_i^2 + \cos\beta_1\cos\beta_3 \sum \mu_i y_i^2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3 \sum \mu_i z_i^2) \\ &= (\cos\alpha_1 \textstyle\sum \mu_i x_i + \cos\beta_1 \sum \mu_i y_i + \cos\gamma_1 \sum \mu_i z_i) \\ &\qquad \cdot (\cos\alpha_2\cos\alpha_3 \textstyle\sum \mu_i x_i^2 + \cos\beta_2\cos\beta_3 \sum \mu_i y_i^2 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 \sum \mu_i z_i^2) . \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Beziehungen

$$\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1 = \cos\gamma_3 ,$$

so erhält man mit Einführung der Schwerpunktskoordinaten x_s, y_s, z_s [vgl. Ziff. 18, Gleichung (2)]

$$x_s(B-C)\cos\beta_3\cos\gamma_3 + y_s(C-A)\cos\gamma_3\cos\alpha_3 + z_s(A-B)\cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0 ,$$

so daß die Gleichung des Komplexkegels in bezug auf das zu O gehörende Haupttripel gegeben wird durch

$$x_s(B-C)yz + y_s(C-A)zx + z_s(A-B)xy = 0 .$$

Man entnimmt dieser Gleichung nicht nur, daß der Hauptachsenkomplex quadratisch ist, sondern auch, daß seine Komplexkegel alle gleichseitig sind, d. h. unendlich viele Tripel von zueinander senkrechten Erzeugenden enthalten.

Außerdem ersieht man, daß jeder Komplexkegel eine seiner Erzeugenden durch den Koordinatenanfang sendet, so daß umgekehrt alle durch den Schwerpunkt des Massensystems gehenden Strahlen Hauptachsen sind.

Die hier gegebene Ableitung der Gleichung des zu einem willkürlichen Punkte gehörenden Komplexkegels ermöglicht in einfachster Weise die Identifikation des Hauptachsenkomplexes mit einem anderen, von O. Staude behandelten Komplexe, welcher in der Theorie der Kreiselbewegung eine Rolle spielt[1]).

In geometrischer Hinsicht aber ist die Identifikation des Hauptachsenkomplexes mit einem anderen, von Th. Reye ausführlich behandelten, von viel größerer Bedeutung.

Führt man nach Culmann den Begriff des **Zentrums zweiten Grades** in der Weise ein, daß man bei der Bestimmung des quadratischen Momentes in bezug auf eine Ebene ε jedem Massenpunkt (μ_i, x_i, y_i, z_i) statt seiner Masse μ_i die Masse $\mu_i a_i$ (wo a_i seinen Abstand von ε bedeutet) zuschreibt und der Ebene ε den Schwerpunkt S_ε dieses neuen Massensystems als Zentrum zweiten Grades zuordnet, so zeigt sich, daß die Ebene ε und der Punkt S_ε in einer einfachen, und zwar antipolaren Beziehung zu der Culmannschen Zentralfläche stehen.

[1]) Siehe Kap. 8, Ziff. 31 ds. Bd. des Handb.

Bezieht man nämlich das Massensystem auf die Schwerpunktshauptachsen und gibt man mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinusse der Normalen von der Ebene e ($x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - l = 0$) an, so sind die Koordinaten x, y, z des Punktes S_e bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x\sum\mu_i(x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma - l) &= \sum\mu_i(x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma - l)x_i,\\ y\sum\mu_i(x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma - l) &= \sum\mu_i(x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma - l)y_i,\\ z\sum\mu_i(x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma - l) &= \sum\mu_i(x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta + z_i\cos\gamma - l)z_i, \end{aligned}$$

so daß

$$x = -\frac{A'\cos\alpha}{\mu l} = -\frac{a'^2\cos\alpha}{l}, \qquad y = -\frac{b'^2\cos\beta}{l}, \qquad z = -\frac{c'^2\cos\gamma}{l}$$

wird. Bestimmt man zu diesem Punkte die Polebene in bezug auf die Culmannsche Fläche, so erhält man die Gleichung

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\beta + l = 0.$$

Die Polebene des Punktes S_e liegt also mit der Ebene e in bezug auf den Koordinatenanfang symmetrisch, mit anderen Worten das Zentrum zweiten Grades einer Ebene e ist der Antipol dieser Ebene in bezug auf die Culmannsche Fläche.

In bezug auf die der Culmannschen Fläche konjugierte Fläche

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = -1$$

sind Ebene und Zentrum zweiten Grades polar verwandt. Die Beziehungen zwischen diesen beiden Elementen lassen sich also mit Hilfe dieser konjugierten Fläche in noch etwas direkterer Weise veranschaulichen.

Betrachtet man eine Gerade g (Richtungskosinusse: $\cos\alpha_3$, $\cos\beta_3$, $\cos\gamma_3$) als Schnittgerade zweier zueinander senkrechten Ebenen

$$e_1 \equiv x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - l_1 = 0, \qquad e_2 \equiv x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - l_2 = 0,$$

so ist, wie bereits unter Ziff. 25 erwähnt wurde, die Bedingung dafür, daß g eine Hauptachse ist,

$$\sum\mu_i y_i' \sum\mu_i x_i' z_i' = \sum\mu_i x_i' \sum\mu_i y_i' z_i',$$

wenn mit x_i', y_i', z_i' die Koordinaten eines Massenpunktes in bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz, dessen $x'z'$- und $z'y'$-Ebenen mit den beiden genannten Ebenen zusammenfallen, bezeichnet werden.

Diese Bedingung lautet in den Koordinaten x_i, y_i, z_i

$$\begin{aligned} &\sum\mu_i(x_i\cos\alpha_1 + y_i\cos\beta_1 + z_i\cos\gamma_1 - l_1)\\ &\qquad\cdot\sum\mu_i(x_i\cos\alpha_2 + y_i\cos\beta_2 + z_i\cos\gamma_2 - l_2)(x_i\cos\alpha_3 + y_i\cos\beta_3 + z_i\cos\gamma_3 - l_3)\\ &= \sum\mu_i(x_i\cos\alpha_2 + y_i\cos\beta_2 + z_i\cos\gamma_2 - l_2)\\ &\qquad\cdot\sum\mu_i(x_i\cos\alpha_1 + y_i\cos\beta_1 + z_i\cos\gamma_1 - l_1)(x_i\cos\alpha_3 + y_i\cos\beta_3 + z_i\cos\gamma_3 - l_3) \end{aligned}$$

oder nach Vereinfachung, unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1 = \cos\gamma_3:$$

$$\frac{a'^2\cos\alpha_1\cos\alpha_3 + b'^2\cos\beta_1\cos\beta_3 + c'^2\cos\gamma_1\cos\gamma_3}{l_1} = \frac{a'^2\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + b'^2\cos\beta_2\cos\beta_3 + c'^2\cos\gamma_2\cos\gamma_3}{l_2}.$$

Stellt man andererseits die Gleichungen der Verbindungsgeraden von den Antipolen der beiden Ebenen in bezug auf die Culmannfläche oder, was auf dasselbe hinauskommt, diejenigen der Verbindungsgeraden von deren Polen in bezug auf die zur Culmannfläche konjugierte Fläche auf, so erhält man

$$\frac{l_1 x - a'^2\cos\alpha_1}{a'^2(l_2\cos\alpha_1 - l_1\cos\alpha_2)} = \frac{l_1 y - b'^2\cos\beta_1}{b'^2(l_2\cos\beta_1 - l_1\cos\beta_2)} = \frac{l_1 z - c'^2\cos\gamma_1}{c'^2(l_2\cos\gamma_1 - l_1\cos\gamma_2)},$$

Die Bedingung dafür, daß diese Gerade die Schnittgerade g der Ebenen ε_1 und ε_2 senkrecht kreuzt, kann, unter Benutzung der Beziehungen

$$\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1=\cos\alpha_3$$

in die Form

$$\frac{a^2\cos\alpha_1\cos\alpha_3+b^2\cos\beta_1\cos\beta_3+c^2\cos\gamma_1\cos\gamma_3}{h_1}=\frac{a^2\cos\alpha_2\cos\alpha_3+b^2\cos\beta_2\cos\beta_3+c^2\cos\gamma_2\cos\gamma_3}{h_2}$$

gebracht werden.

Es ist also die Bedingung dafür, daß eine Gerade Hauptachse des Massensystems sei, identisch mit der anderen, daß sie ihre Antipolare in bezug auf die Culmannfläche oder ihre Polare in bezug auf die zur Culmannfläche konjugierte Fläche senkrecht kreuze. Hiermit ist für die Hauptachsen des Massensystems eine Definition erhalten, welche übereinstimmt mit derjenigen, welche Reye für den nach ihm benannten Achsenkomplex gab, so daß die Eigenschaften des Hauptachsenkomplexes der Geometrie dieses Reyeschen Komplexes entnommen werden können[1]).

27. Quadratische Momente kontinuierlicher Systeme; der Kern. Für einen kontinuierlichen Körper werden in ähnlicher Weise wie für eine endliche Anzahl von Massenpunkten quadratische Momente definiert. Nur hat man in den für diese Systeme unter Ziff. 20 aufgestellten Summengrößen jeweils μ_i durch die Masse $d\tau$ des Körperelementes und das Summationszeichen durch eine Integration über das Körpervolumen zu ersetzen. Die für das Massensystem diskreter Punkte abgeleiteten allgemeinen Sätze bleiben für den Körper unverändert gelten, so daß es nicht nötig ist, auf sie zurückzukommen.

Dagegen möge an dieser Stelle der Begriff des **Kerns** erwähnt werden. Unter der **Kernfläche** eines Körpers versteht man den geometrischen Ort derjenigen Punkte, deren Antipolarebenen in bezug auf das zu dem Körper gehörende Culmannsche zentrale Trägheitsellipsoid den Körper berühren, ohne ihn irgendwo sonst zu durchsetzen. Der von der Kernfläche eingeschlossene Raumteil heißt der **Kern** des Körpers. In analoger Weise wird der Kern einer ebenen Figur definiert. Unter Ziff. 52 wird auf seine Bedeutung für die Spannungsbestimmung im Querschnitt eines gebogenen Balkens näher eingegangen werden.

28. Quadratisch gleichwertige Massensysteme. Manches Problem der rationellen Mechanik kann dadurch vereinfacht werden, daß das bei ihm betrachtete Massensystem durch ein ihm gleichwertiges einfacheres ersetzt wird. Gleichwertig nennt man dabei Massensysteme, welche in bezug auf jedes Raumelement (jeden Punkt, jede Gerade, jede Ebene) gleiche quadratische Momente aufweisen. Dazu genügt, daß die Trägheitsmomente in bezug auf jede Ebene gleich sind, weil die polaren und axialen Trägheitsmomente in der unter Ziff. 23 angegebenen Weise von den planaren Momenten abhängen. Zugleich mit der Gleichwertigkeit zweier allgemeinen Massensysteme in bezug auf die quadratischen Momente tritt Gleichwertigkeit in bezug auf die Momente ersten Grades ein, wie man sich durch Gleichsetzung der planaren Trägheitsmomente in bezug auf die Schwerpunktsebenen eines der beiden Systeme leicht überzeugt.

Die Ersetzung eines allgemeinen Massensystems durch ein gleichwertiges System von vier Massenpunkten ist in sechsfach unendlicher Weise möglich, wie man bei Abzählung der die Gleichwertigkeit ausdrückenden Bedingungen und Vergleich der gefundenen Anzahl mit derjenigen der zur Verfügung stehenden Größen (12 Koordinaten und 4 Massen) leicht erblickt. Die Bedingung der Gleichwertigkeit der linearen Momente liefert zwischen diesen letzten Größen

[1]) Siehe für ausführliche Behandlung dieses Komplexes Th. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., Bd. II, S. 130—177. Leipzig 1910.

vier Beziehungen (drei wegen des Zusammenfallens der beiden Schwerpunkte und eine wegen der Gleichheit der Gesamtmassen beider Systeme). Die Gleichwertigkeit der quadratischen Momente fordert dann weiter noch die Identität der beiden Zentralträgheitsflächen, was mit sechs Bedingungen übereinstimmt.

Von REYE[1]) ist gezeigt worden, daß die Punkte eines gleichwertigen Quadrupels von Massenpunkten die Eckpunkte eines Antipolartetraeders des mit dem ursprünglichen System verbundenen Antipolarsystems bilden. Nach Wahl der Eckpunkte eines solchen Tetraeders sind die Massen natürlich am leichtesten mittels der Bedingung zu bestimmen, daß das ursprüngliche und das Ersatzsystem gleiche statische Momente in bezug auf die Seitenflächen des Tetraeders aufzuweisen haben.

Auch bei einem magnetischen Massensystem ist die Reduktion auf ein gleichwertiges System mit nur vier Massen in sechsfach unendlicher Weise möglich.

Bei einem Schwersystem ist eine Reduktion auf ein Quadrupel von Massenpunkten mit gleicher Masse noch auf einfach unendlich viele Weisen möglich. Von praktischer Bedeutung ist die Reduktion eines solchen Systems auf sechs Massenpunkte mit gleichen Massen. Sechs derartige Punkte bilden stets die Endpunkte eines Tripels von konjugierten Durchmessern eines bestimmten Ellipsoids. Auf die Beweise dieser allgemeinen Sätze möge hier verzichtet werden, weil in jedem praktisch vorkommenden Fall die Art der Reduktion sich durchweg aus der Natur des physikalischen oder mechanischen Problems ergibt und die Reduktion dann nach den gegebenen allgemeinen Leitsätzen leicht durchführbar ist.

29. Auswertung linearer und quadratischer Momente. Wie bereits erwähnt (vgl. Ziff. 21 u. 22), sind alle linearen und quadratischen Momente in einfachster Weise zu bestimmen, wenn Lage und Gestalt des zentralen Culmannschen Trägheitsellipsoids bekannt sind. Dazu braucht man nur die Lage des Schwerpunktes sowie die Trägheits- und Deviationsmomente in bezug auf drei zueinander senkrechte, den Schwerpunkt enthaltende Ebenen zu kennen. Durch die letzten sechs Größen wird nämlich die Gleichung der Culmannschen Fläche in bezug auf diese drei Ebenen festgelegt, womit es eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Flächen wird, Lage und Größe der Hauptachsen zu bestimmen. Aus der Culmannschen Fläche wird dann nachträglich in einfachster Weise die Poinsotsche Fläche abgeleitet.

In manchen Fällen ist es angebracht, durch eine geeignete Transformation das vorgegebene Massensystem in ein anderes einfacheres zu verwandeln. Als Transformation, welche diesen Zweck erfüllt, muß vor allem die Affinitätstransformation genannt werden, durch welche auch die Gleichwertigkeit zweier Systeme nicht gestört wird. Auch die Transformation durch reziproke Radien[2]) leistet in einigen Fällen gute Dienste.

Bei ebenen Systemen ist für fast alle praktischen Zwecke die graphische Methode, auf welche später zurückgekommen wird (Ziff. 51), empfehlenswert. Auch auf empirischem Wege, nämlich mit Hilfe von Pendelversuchen, kann durch Beobachtung der Schwingungsdauer das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine Gerade bestimmt werden.

Schließlich sind mancherlei Apparate zur Bestimmung von Momenten verschiedener Ordnung für ebene Figuren konstruiert worden. Für die Konstruktion dieser Apparate sei der Leser verwiesen auf ein von HORSBURGH[3]) herausgegebenes Buch.

---

[1]) TH. REYE, Journ. f. Math. Bd. 72, S. 293. 1870.

[2]) Vgl. E. J. ROUTH, Elementary rigid dynamics. London 1882. Deutsch von A. SCHEPP. Leipzig 1898.

[3]) E. M. HORSBURGH, Modern Instruments and Methods of Calculation. London 1914; s. auch N. JOUKOWSKI, Bulletin de la Soc. des Naturalistes de Moscou. 1891, S. 415.

III. Graphostatik.

30. Ebenes Kraftsystem: zwei Kräfte. Zum Aufzeichnen der Resultierenden $\mathfrak{R}$ zweier durch einen Punkt O gehenden Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ dient das unter Ziff. 1 erwähnte Parallelogramm der Kräfte. Es ist aber nicht nötig, das Parallelogramm vollständig zu zeichnen; vielmehr genügt entweder der Linienzug 012 oder 01'2 (vgl. Abb. 12). Die Verbindungsgerade 02, welche von dem Anfangspunkt nach dem Endpunkt eines derartigen Linienzuges gezogen wird, stellt nach Lage, Größe und Sinn die gesuchte Resultierende dar. Es folgt hieraus, daß die Resultierende mehrerer in derselben Ebene liegenden und durch denselben Punkt

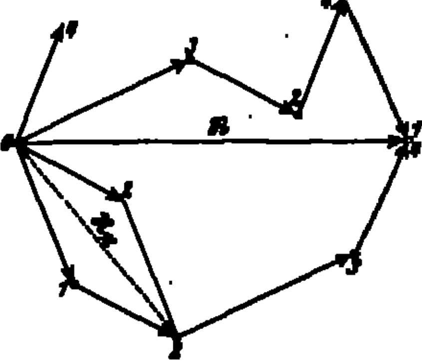


Abb. 12. Zusammensetzung zweier Kräfte.

Abb. 13. Zusammensetzung mehrerer in einem Punkt angreifender Kräfte.

hindurchgehenden Kräfte konstruiert werden kann als Schlußlinie eines von diesem Punkt ausgehenden Kräftepolygons, dessen Seiten die verschiedenen Kräfte nach Richtung, Größe und Sinn darstellen (vgl. Abb. 13). Die Folge, in welcher die Kräfte hintereinander gereiht werden, ist gleichgültig, wie man für zwei verschiedene Polygone leicht nachweist unter wiederholter Benutzung des Satzes, daß zwei aufeinanderfolgende Seiten verwechselt werden dürfen.

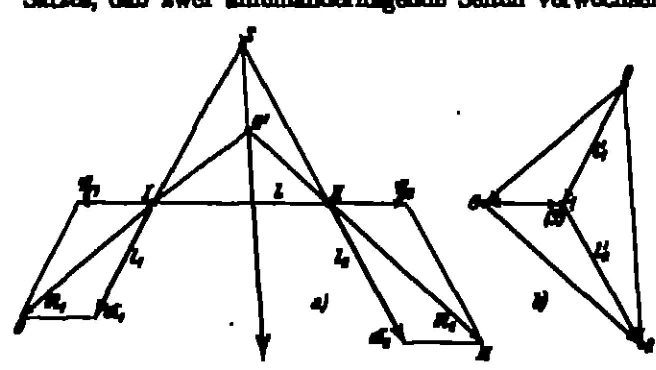


Abb. 14 a u. b. Zusammensetzung zweier Kräfte mittels Polygon und Seilpolygon.

Schon im einfachsten Falle zweier Kräfte aber bietet die vorgeführte Konstruktion eine Schwierigkeit, wenn der Schnittpunkt S der Kräfte nicht auf dem Zeichenblatt liegt. Zwar kann mit Hilfe eines gesondert gezeichneten Polygons 012 (vgl. Abb. 14b) Richtung, Größe und Sinn der Resultierenden bestimmt werden, doch bleibt die Lage derselben noch unbestimmt. Man hilft sich nun dadurch, daß man längs einer willkürlichen Geraden l (vgl. Abb. 14a) zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Hilfskräfte $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ einführt, deren eine man in dem Punkt I mit $\mathfrak{K}_1$, deren andere man in II mit $\mathfrak{K}_2$ zusammensetzt. Die Richtung $0I$ der zuerst genannten, durch I hindurchgehenden Resultierenden $\mathfrak{R}_1$ erhält man aus Abb. 14b, wenn man die Kraft 01 mit der Kraft $1O$, welche in Richtung, Sinn und Größe mit $\mathfrak{H}_1$ übereinstimmt, zu $0O$ zusammensetzt. Dieselbe Abbildung liefert in $O2$ Richtung, Größe und Sinn der im Punkte II angreifenden Resultierenden $\mathfrak{R}_2$. Die Wirkungslinie $II\ III$ dieser Kraft muß

also der Geraden $O2$ parallel gezogen werden. Weil die in die Geraden $0I$ und $II\ III$ fallenden Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gleichwertig sind, liefert der Schnittpunkt O' dieser beiden Geraden einen Punkt der gesuchten Resultierenden, deren Größe, Richtung und Sinn bereits in Abb. 14b bestimmt war.

Die beiden Abb. 14a und 14b stehen in einem besonderen sog. reziproken Zusammenhang, welcher mechanisch dadurch gekennzeichnet ist, daß sie ihre Rollen vertauschen würden, wenn in der soeben beschriebenen Weise zwei in l_1 und l_2 fallende Kräfte (s. Abb. 14b) der Größen IS und SII (s. Abb. 14a) zusammengesetzt werden sollten. Geometrisch ist dieser Zusammenhang dadurch charakterisiert, daß von den beiden vollständigen Vierseiten $SI\,O'II$ und $S'0O2$ je zwei Seiten und ebenso je zwei Diagonalen parallel sind, und daß mit drei durch einen Punkt hindurchgehenden Geraden der einen Abbildung ein ein Dreieck bildendes Tripel von Geraden in der anderen Abbildung übereinstimmt.

31. Ebenes Kraftsystem: allgemeiner Fall; Gleichgewichtsbedingungen. Wir wollen die unter Ziff. 30 gegebene Konstruktion auf den allgemeinen Fall

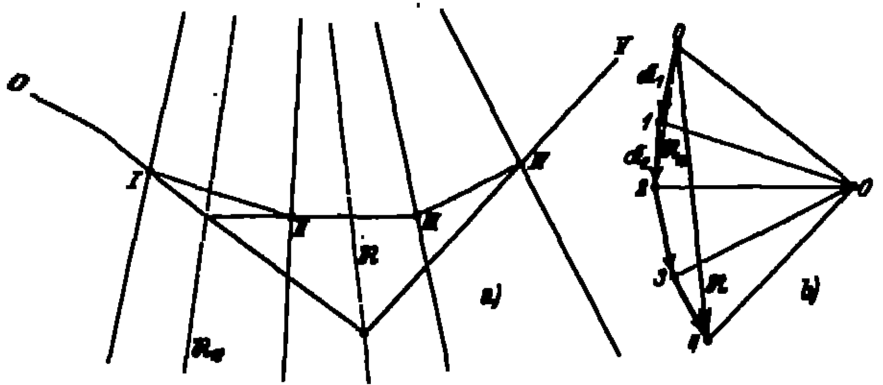


Abb. 15a u. b. Zusammensetzung eines allgemeinen ebenen Kraftsystems mittels Polfigur und Seilpolygon.

des ebenen Kraftsystems ausdehnen und umschreiben sie zu dem Zwecke folgendermaßen: Zur Bestimmung der Resultierenden zweier Kräfte zeichnet man in einer besonderen Figur, welche man die Polfigur zu nennen pflegt, das Kräftepolygon 0 1 2, nimmt einen willkürlichen Punkt O als Pol an, zeichnet die Polstrahlen $O0$, $O1$, $O2$, und konstruiert zu den beiden Wirkungslinien der Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ein sog. Seilpolygon oder Seileck derart, daß je zwei aufeinanderfolgende, sich in einer Wirkungslinie schneidende Seiten dieses Polygons denjenigen Polstrahlen parallel laufen, welche mit der zu der betreffenden Wirkungslinie gehörigen Kraft in der Polfigur ein geschlossenes Dreieck bilden. Die erste und letzte Seite dieses Polygons bestimmen einen Punkt der Resultierenden; das Kräftepolygon liefert Richtung, Größe und Sinn derselben.

Wie unmittelbar einleuchtet, ist die auf diese Weise formulierte Konstruktion ohne weiteres auf ein allgemeines ebenes Kraftsystem übertragbar (vgl. für die Ausführung Abb. 15). Die gegebenen Kräfte werden durch eine doppelte Anzahl in die Seiten des Seilpolygons fallende andere Kräfte ersetzt, welche ihrerseits wiederum mit den beiden in die äußersten Seiten des Seilpolygons fallenden Kräften gleichwertig sind. Für den Fall, daß alle Kräfte des Systems durch einen und denselben Punkt hindurchgehen, sind die beiden so entstehenden Figuren abermals reziprok.

Damit ein ebenes Kraftsystem im Gleichgewicht sei, müssen die beiden Kräfte, welche mit Hilfe einer Polfigur und des zugehörigen Seilpolygons bestimmt

werden, dieselbe Wirkungslinie und bis auf das Zeichen den gleichen Wert haben. Es ist also notwendig, daß sowohl das Seilpolygon wie das Kräftepolygon geschlossen ist. Diese notwendige Bedingung ist auch hinreichend.

Haben die Kräfte des Systems einen gemeinsamen Angriffspunkt, so genügt die Bedingung, daß das Kräftepolygon geschlossen ist.

32. Ebenes Kraftsystem: allgemeiner Fall; Fortsetzung. Ein zu einem Kraftsystem gehöriges Seilpolygon und die damit verbundene Polfigur liefern nicht nur die Resultierende des ganzen Systems, sondern auch diejenige einer willkürlichen Gruppe von aufeinanderfolgenden Kräften. So liest man z. B. an Abb. 15b in der Strecke 02 Richtung, Sinn und Größe der Resultierenden $\mathfrak{R}_{12}$ der Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ab, während der Schnittpunkt der Geraden $0I$ und $II\,III$ in Abb. 15a einen Punkt ihrer Wirkungslinie liefert.

Wir machen von dieser Eigenschaft bei dem in Abb. 16 abgebildeten Kraftsystem Gebrauch und bestimmen in der angegebenen Weise die Resultierenden

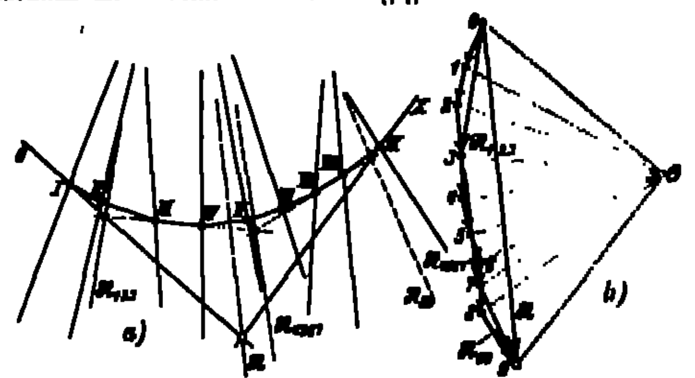


Abb. 16a u. b. Bestimmung der Resultierenden von Untergruppen von Kräften.

$\mathfrak{R}_{123}$, $\mathfrak{R}_{4567}$, $\mathfrak{R}_{89}$ der drei Gruppen von Kräften 123, 4567, 89, in welche wir das ganze System aufgelöst denken. Größe, Richtung und Sinn dieser Resultierenden sind in der Polfigur durch die Strecken 03, 37, 79 gegeben; das Kräftepolygon 0379 ist also als das zu den Kräften $\mathfrak{R}$ gehörige Kräftepolygon aufzufassen. In Abb. 16a bilden die Geraden $0I$, $III\,IV$, $VII\,VIII$, $IX\,X$ die Seiten eines zu diesem Kräftepolygon gehörigen Seilpolygons. Dieses neue Seilpolygon dient offenbar ebensogut dem Zwecke, einen Punkt der Resultierenden des ganzen Kraftsystems aufzufinden wie das ursprüngliche; es liefert sogar denselben Punkt. In Fällen, wo man in einfacher Weise die Resultierenden von aufeinanderfolgenden Kräften des gegebenen Kraftsystems im voraus bestimmen kann, wird man also besser mit diesen Resultierenden arbeiten können.

Bemerkenswert ist dabei die Tatsache, daß die Seiten des in einem solchen Falle entstehenden Polygons stets zusammenfallen mit bestimmten Seiten jenes anderen Polygons, das unter Benutzung desselben Pols bei dem System von Einzelkräften entstehen würde. Mit der zwischen zwei „Resultierenden" fallenden Seite der einen Figur fällt diejenige Seite der zweiten zusammen, welche die Gruppen von Kräften, zu denen die betreffenden Resultierenden gehören, scheidet. Wir werden von dieser Bemerkung später noch Gebrauch zu machen haben.

33. Beziehung zwischen zwei zu demselben Kraftsystem gehörigen Seilpolygonen. Bei der Konstruktion eines Seilpolygons legt die Reihenfolge, in welcher man im Kräftepolygon die Kräfte hintereinander fügt, die Numerierung der Kräfte selbst fest. Allein dadurch schon, daß man diese Reihenfolge abändert,

gelangt man in den verschiedensten Weisen zu einem Punkte der resultierenden Kraft. Aber abgesehen davon kann man bei einer und derselben Numerierung der Kräfte noch auf ∞^3 Arten ein zu dem Kraftsystem gehöriges Seilpolygon konstruieren, und zwar deshalb, weil man in der Wahl sowohl des Poles als in der Lage der ersten Seite des Seilpolygones vollkommen frei ist. Weil alle diese ∞^3 Seilpolygone zu einem der ∞^1 Punkte der Resultierenden des Kraftsystems führen, müssen sicherlich Beziehungen zwischen ihnen bestehen. Wir bringen diese im folgenden Hauptsatze zum Ausdruck:

Die entsprechenden Seiten zweier zu demselben Kraftsystem gehörigen Seilpolygone schneiden sich in Punkten einer Geraden (Parallelachse), welche der Verbindungsgeraden der beiden verwendeten Pole (Polachse) parallel ist. (Die Reihenfolge der Kräfte ist hierbei für beide Seilpolygone, wenn auch willkürlich, als gleich anzusehen.)

Wenn, wie in Abb. 17, für eine Einzelkraft $\mathfrak{K}$ die Konstruktion der Polfigur und des dazugehörigen Seilpolygons bei Annahme zweier verschiedenen Pole O

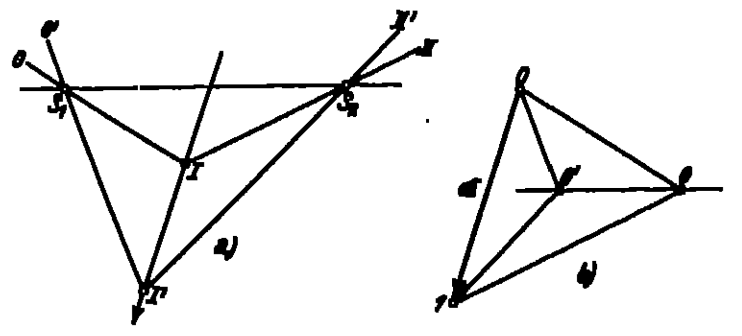


Abb. 17 a u. b. Beziehung zwischen zwei zu demselben Kraftsystem gehörigen Seilpolygonen.

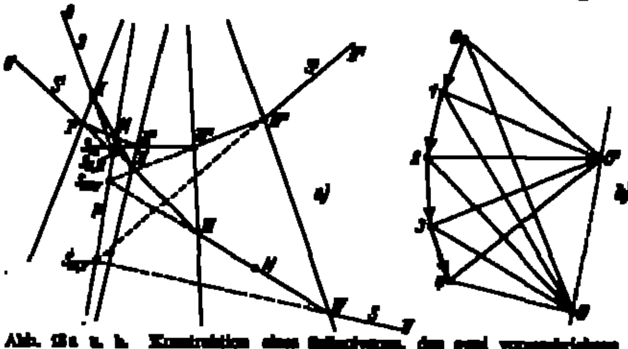
und O' ausgeführt wird, so ist die Kraft sowohl identisch mit zwei in $0I$ und $I\,II$ fallenden Kräften von der Größe und Richtung $0O$ und $O1$, wie mit zwei in $0'I'$ und $I'II'$ fallenden Kräften von der Größe und Richtung $0O'$ und $O'1$. Die in $0I$ und $I\,II$ liegenden Kräfte halten also den mit umgekehrtem Zeichen versehenen, in $0'I'$ und $I'II'$ liegenden Kräften das Gleichgewicht. Zwei dieser Kräfte gehen durch den Punkt S_1, die zwei anderen durch den Punkt S_2. Die Resultierenden dieser Paare von Kräften müssen also die Gerade S_1S_2 zur Wirkungslinie haben. Aus der Polfigur entnimmt man aber, daß die Größe und Richtung dieser Resultierenden durch die Strecke OO' (bzw. $O'O$) bestimmt ist. Folglich sind S_1S_2 und OO' einander parallel. Im Falle eines allgemeinen Kraftsystems, bei dem also mehrere Schnittpunkte $S_1, S_2, \ldots S_n$ auftreten, zeigt man in derselben Weise, daß $S_2S_3 \| OO'$, $S_3S_4 \| OO'$ usw., womit natürlich zugleich bewiesen ist, daß alle Punkte S auf einer und derselben Geraden liegen.

In ähnlicher, elementar-statischer Weise beweist man den Satz, daß die drei zu einem Tripel von Seilpolygonen gehörigen Parallelachsen sich in einem Punkt schneiden. Man zeichnet dazu für eine Einzelkraft $\mathfrak{K}$ die Seilpolygone, welche zu drei verschiedenen Polen O', O'' und O''' gehören, und legt in die drei durch diese Polygone bestimmten Parallelachsen Kräfte $\mathfrak{K}_{12}, \mathfrak{K}_{23}, \mathfrak{K}_{31}$ der Größen $O'O'', O''O''', O'''O'$. In der so entstandenen Figur liegt ein zu den Kräften gehöriges Seilpolygon fertig vor, wenn man in der Polfigur zu den Kräften $O'O'', O''O''', O'''O'$ entweder den Anfangs- oder den Endpunkt der mit 01 zu bezeichnenden Kraft $\mathfrak{K}$ als Pol annimmt. Dieses Seilpolygon ist ebenso wie das Kräftepolygon $O'O''O'''$ geschlossen, so daß die Kräfte $\mathfrak{K}_{12}, \mathfrak{K}_{23}, \mathfrak{K}_{31}$ mit-

einander im Gleichgewicht stehen. Ihre Wirkungslinien müssen sich also in einem Punkt schneiden.

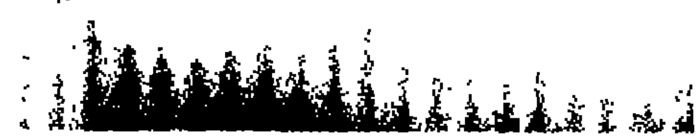
Geht man von dem bereits von CREMONA[1]) entwickelten, später von KLEIN[2]) nochmals analytisch bewiesenen Satze aus, nach welchem alle zu einem Kraftsystem gehörigen Seilpolygone erhalten werden als die Orthogonalprojektionen der Schnitte aller möglichen Ebenen mit einem bestimmten Vielflache, dessen Kanten die Wirkungslinien der Kräfte zur Projektion haben, so folgt unmittelbar, daß die entsprechenden Seiten zweier Seilpolygone einander in Punkten einer Geraden schneiden, und daß die drei zu drei Seilpolygonen gehörigen Parallelachsen durch einen Punkt hindurchgehen.

34. Seilpolygone, welche gewissen Bedingungen unterworfen sind. Wenn ein Seilpolygon (S) gezeichnet vorliegt, kann man, ohne auf die Polfigur zurückzugreifen, ∞^1 Seilpolygone zeichnen, welche mit dem ersten eine vorgeschriebene Parallelachse p haben. Drehen sich nämlich die Seiten des ersten Polygons derart um ihre Schnittpunkte mit p, daß die Eckpunkte des Polygons den Angriffslinien der Kräfte entlang gleiten, so stellt das bewegliche Polygon in jeder seiner Lagen ein zu dem Kraftsystem passendes Seilpolygon dar. Betrachtet man, um dies zu beweisen, das Polygon in einer willkürlichen Lage (S'), so kann man in Zweifel darüber, ob es wirklich als Seilpolygon zu betrachten ist, aus den Richtungen seiner beiden ersten Seiten im Kräfteplan den Pol O' konstruieren, welcher zu dem zu untersuchenden Polygon führen müßte. Vervollständigt man dann die Polfigur und konstruiert man die auf die beiden ersten Seiten des Polygons folgenden Seiten des zu O' gehörigen Seilpolygons (S''), so sieht man, daß die Seiten dieses Seilpolygons (S'') mit den entsprechenden Seiten des schon in der Zeichnung vorliegenden Polygons (S') zusammenfallen. Man entnimmt diesem Satze den folgenden, von welchem wir unter Ziff. 41 Gebrauch machen werden: Drehen sich von einem beweglichen n-Eck alle Seiten um Punkte einer und derselben Geraden und gleiten dabei ($n - 1$) Eckpunkte an Geraden entlang, so bewegt sich auch der n-te Eckpunkt längs einer Geraden.


Abb. 18a u. b. Konstruktion eines Seilpolygons, das zwei vorgeschriebene Seiten durch zwei vorgeschriebene Punkte sendet.

Hiernach läßt sich die Aufgabe lösen, ein Seilpolygon zu konstruieren, das mit einer vorgeschriebenen Seite (z. B. der m-ten) durch einen Punkt M und mit einer anderen (z. B. der n-ten) Seite durch einen Punkt N hindurchgehen soll. Man zeichnet hier zuerst (vgl. Abb. 18) unter Annahme eines willkürlichen Pols O' ein Seilpolygon S', das nur der ersten Forderung genügt. Weil die m-te Seite des gesuchten Polygons S ebenfalls durch M gehen muß, ist M ein Punkt der zu den beiden Polygonen gehörigen Parallelachse. Das gesuchte Polygon S wird nun dadurch bestimmt, daß man eine willkürliche, durch M gehende Gerade p als Parallelachse annimmt. Weil nämlich die n-te Seite von S durch den Punkt N hindurchgehen soll und außerdem die n-te Seite von S' in einem Punkte von p treffen muß, so ist sie vollständig festgelegt. Von der so erhaltenen

1) L. CREMONA, Le figure reciproche nella statica grafica. Milano 1879.
2) F. KLEIN, Encykl. d. math. Wiss. Bd. IV 1, S. 354.



Seite ausgehend, ist dann mit Hilfe der Parallelachse p das Polygon S nach beiden Seiten zu ergänzen. Weil die durch den Punkt M gehende Gerade p frei wählbar war, gibt es ∞^1 Seilpolygone, welche den gestellten Bedingungen genügen.

Die Aufgabe, ein Seilpolygon zu konstruieren, das mit drei vorgeschriebenen Seiten l, m und n durch drei vorgeschriebene Punkte L, M und N hindurchgeht, ist eindeutig bestimmt. Konstruiert man zuerst eins der ∞ vielen Seilpolygone, welche mit ihrer l-ten Seite durch L, und mit ihrer m-ten durch M hindurchgehen, so muß das gesuchte Polygon S mit diesem Polygon S' die Gerade LM zur Parallelachse p haben. Weil die n-te Seite des gesuchten Polygons den Punkt N enthalten soll und außerdem die n-te Seite des Polygons S' in einem Punkt von p treffen muß, ist sie wieder vollständig bestimmt. Das Polygon S ist dann mit Hilfe des Polygons S' und der zu beiden Polygonen gehörigen Parallelachse p leicht zu ergänzen.

35. Anwendung auf das ebene Gelenkpolygon. Unter einem Gelenkpolygon versteht man ein Gebilde aus n Stäben, die durch irgendwelche Kräfte belastet sind und von denen je zwei durch ein Gelenk zusammenhängen. Gleichgewichtsuntersuchungen an ebenen Gelenkpolygonen können am einfachsten mit Hilfe des Seilpolygons ausgeführt werden. Die Resultierende der äußeren Kräfte eines jeden Stabes des Gelenkpolygons muß, wenn das letztere im Gleichgewicht sein soll, in zwei durch die Gelenke des betreffenden Stabes hindurchgehende Komponenten derart zerlegt werden können, daß in jedem Polygongelenke zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte auftreten, d. h. es muß zu dem auf das Gelenkpolygon wirkende äußere Kraftsystem ein geschlossenes Seilpolygon existieren, dessen Seiten durch die Gelenke des Gelenkpolygons hindurchgehen. Ist das Gelenkpolygon nicht geschlossen, sondern an seinen Enden mit festen Gelenken versehen, so braucht natürlich auch das Seilpolygon nicht geschlossen zu sein. Lösungen von hierher gehörigen Aufgaben sind von KENNEDY, HENNEBERG und GALERKIN gegeben worden[1]. Der erstere behandelt einen Sonderfall der allgemeineren, von HENNEBERG behandelten Aufgabe: zu einem Gelenkpolygon die Wirkungslinie der auf der letzten Seite wirkenden Kraft für den Fall des Gleichgewichts zu bestimmen, wenn die auf die übrigen Seiten wirkenden Kräfte gegeben sind. Der letztere bestimmt die Stabkräfte in dem untersten Ring einer Schwedlerkuppel, bei dem die äußeren Kräfte in den Gelenken des Polygons angreifen, und bei welchem die Richtungen der ebenfalls in den Gelenken angreifenden Reaktionen vorgeschrieben sind.

36. Zerlegung einer Kraft in zwei mit ihr in derselben Ebene liegende Komponenten. Wenn eine Kraft in zwei mit ihr in derselben Ebene liegende Komponenten zerlegt werden soll, so müssen selbstverständlich die Wirkungslinien dieser Komponenten sich auf der Wirkungslinie der vorgegebenen Kraft schneiden. Liegt dieser Schnittpunkt auf dem Zeichenblatt, so wird die Zerlegung nach dem Parallelogrammgesetze in diesem Punkte erfolgen können. Sonst werden Größe, Sinn und Richtung der Komponenten einer besonders gezeichneten Kraftfigur entnommen.

Soll eine Kraft in zwei Komponenten zerlegt werden, deren jede durch einen vorgeschriebenen Punkt A bzw. B geht, so kann jeder Punkt S der gegebenen Kraftlinie als gemeinsamer Punkt von Kraft und Komponenten aufgefaßt werden. Konstruiert man zu den Punkten S mit Hilfe einer Polfigur Richtung,

[1] A. B. W. KENNEDY, Proc. Roy. Soc. London 1878, S. 221; L. HENNEBERG, Graphische Statik der starren Systeme, S. 68 ff.; B. G. GALERKIN, Wjestnik Ingenerow (Russisch) 1915, S. 384.

Sinn und Größe der zugehörigen Komponenten (vgl. Abb. 19a und 19b), so erhält man als geometrischen Ort des Poles O' nach dem unter Ziff. 35 entwickelten Satze eine Gerade, welche der Geraden AB parallel ist.

Von dieser Tatsache macht man Gebrauch, wenn eine Kraft $\mathfrak{K}$ in zwei Komponenten zerlegt werden soll, deren eine eine vorgeschriebene Wirkungslinie l_1 hat, welche diejenige der Kraft $\mathfrak{K}$ in einem unzugänglichen Punkt schneidet, und deren andere durch einen Punkt B hindurchgehen soll. Man zerlegt in diesem Falle mit Hilfe einer Polfigur die Kraft $\mathfrak{K}$ in zwei Komponenten, wovon die eine durch einen willkürlichen Punkt A von l_1 und die andere durch den Punkt B hindurchgeht. Der verwandelte Pol O' bestimmt eine zu AB parallele Polgerade, welche auch den Pol O enthält, welcher zu der gesuchten Zerlegung führt. Man erhält diesen Pol selbst als Schnittpunkt der Polgeraden mit dem aus 0 zu l_1 parallel gezogenen Polstrahl. Die Vektoren 01 und 12 liefern die gesuchten Komponenten.

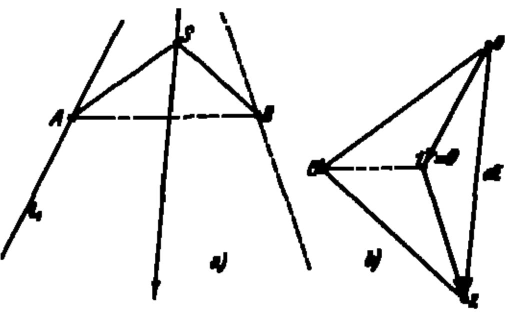


Abb. 19a u. b. Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten.

37. Zerlegung einer Kraft in drei mit ihr in derselben Ebene liegende Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien. Diese von RITTER in einfacher Weise analytisch gelöste Aufgabe (vgl. Ziff. 9b) wird nach CULMANN folgendermaßen graphisch behandelt (Abb. 20). Die Wirkungslinie l_{12} der Resultierenden $\mathfrak{R}_{12}$ zweier Komponenten $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ (Wirkungslinien l_1 und l_2) muß außer dem Schnittpunkt $(l_1 l_2)$ dieser Kräfte auch den Schnittpunkt der dritten Komponenten $\mathfrak{K}_3$ (Wirkungslinie l_3) mit der gegebenen Kraft (Wirkungslinie l) enthalten (vgl. Abb. 20a). Man zerlegt also die Kraft $\mathfrak{K}$ zuerst in zwei in l_{12} und l_3 fallende Komponenten $\mathfrak{R}_{12}$ und $\mathfrak{K}_3$, und dann $\mathfrak{R}_{12}$ wieder in zwei in l_1 und l_2 fallende Komponenten $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$.

Abb. 20a u. b. Zerlegung einer Kraft in drei Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien nach CULMANN.

Die Methode versagt, wenn die Schnittpunkte von l mit den drei Geraden l_1, l_2, l_3 unzugänglich sind. HENNEBERG gibt für diesen Fall eine Lösung, welche sich auf projektiv-geometrische Überlegungen stützt. Eine Methode, welche nur von statischen Sätzen Gebrauch macht, ist folgende[1] (s. Abb. 21). Man denke sich die Komponenten $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ vorläufig bekannt und konstruiere mit Hilfe einer Polfigur $O0123$ und des dazugehörigen Seilpolygons $0\,I\,II\,III\,IV$ ihre Resultierende. So findet man in der Schlußlinie 03 des Kräftepolygons Richtung, Sinn und Größe der gegebenen Kraft $\mathfrak{K}$ und im Schnittpunkt der

[1] C. B. BIEZENO, De Ingenieur, 1920, Nr. 52.

beiden äußersten Seiten des Seilpolygones einen Punkt der Wirkungslinie l dieser Kraft. Von der entworfenen Polfigur kann man nun, auch wenn die Komponenten $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ unbekannt sind, fast alle Geraden zeichnen, weil nur die Lage der Strecke 12 unbekannt ist. Vom Seilpolygon kann, nachdem die erste Seite $0I$ dem ersten Polstrahl parallel gezogen ist, jedenfalls auch die letzte Seite $III\,IV$ gezogen werden. In Abb. 21a ist nur die Lage des Punktes II auf l_2 unbekannt. Stellt man die Komponente $\mathfrak{K}_2$ in unbekanntem Maßstabe durch die Strecke $1'2'$ in der Polfigur dar, so erfüllen die Pole, welche zu den verschiedenen Seilpolygonen $I\,II\,III$ der Kraft $\mathfrak{K}_2$ gehören, eine Polachse p_1, welche der Parallelachse $I\,III$ parallel sein muß (vgl. Ziff. 36) und dadurch konstruiert werden kann, daß man für einen Punkt II, z. B. den Punkt II', den zugehörigen Pol O'' bestimmt. Auf dieser Geraden p_1 liegt auch ein Punkt O', welcher in den Geraden $O'1'$ und $O'2'$ die Richtungen der durch O gehenden, vorläufig noch unbekannten Polstrahlen $O1$ und $O2$ liefert. Die Dreiecke $O'1'2'$ und $O12$ haben aber den Punkt S als Ähnlichkeitszentrum, so daß O' als Schnitt der Geraden p_1 und $SO = p$ bestimmt ist. Man braucht also nur aus dem Punkte O noch Polstrahlen parallel zu $O'1'$ und $O'2'$ zu ziehen und diese Strahlen bzw. mit $0S$ und $3S$ in den Punkten 1 und 2 zu schneiden. Die gesuchten Komponenten sind dann 01, 12 und 23.

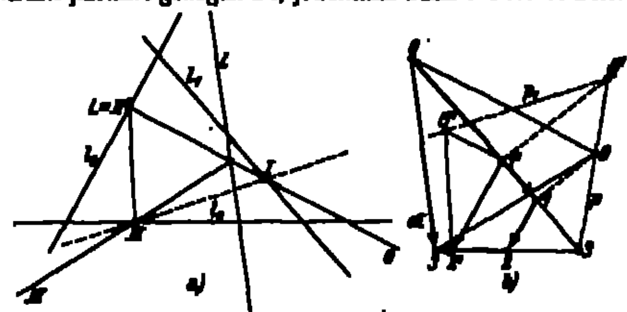


Abb. 21a u. b. Zerlegung einer Kraft in drei Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien.

38. Kräfte im Raum: Kräfte durch einen Punkt. Kräfte mit demselben Angriffspunkt führen zu einer durch denselben Punkt hindurchgehenden Resultierenden, deren Richtung, Sinn und Größe durch die vom Ausgangspunkt nach dem Endpunkt gehende Schlußlinie des aus den einzelnen Kräften herzustellenden Kräftepolygons bestimmt ist. Den Beweis dieses Satzes führt man natürlich unter wiederholter Benutzung des Parallelogramms der Kräfte. Projiziert man mehrere durch einen Punkt hindurchgehende Kräfte auf irgendeine Ebene, so ist die Resultierende der so erhaltenen Projektionen identisch mit der Projektion der zu den Kräften gehörigen Resultierenden. Graphostatisch erhält man also die Resultierende von mehreren durch einen Punkt hindurchgehenden Kräften dadurch, daß man in zwei, gewöhnlich senkrecht zueinander stehenden Ebenen je mittels eines Kräftepolygons die Resultierende der auf diese Ebenen projizierten Kräfte bestimmt.

39. Kräfte im Raum: allgemeines Kraftsystem. Zur graphischen Behandlung eines allgemeinen Kraftsystems eignen sich die unter Ziff. 4 und 5 behandelten Reduktionen.

a) Bei der Reduktion nach Poinsot nimmt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ an und „verschiebt" alle Kräfte nach dem Anfangspunkte dieses Koordinatensystems. An Stelle jeder Kraft tritt dann eine dazu parallele Kraft gleichen Sinnes durch O sowie ein Kräftepaar. Dieses Kräftepaar wird durch einen senkrecht zu seiner Ebene stehenden Momentvektor dargestellt, dessen Projektionen in die x-, y-, z-Richtungen, wie unter Ziff. 2 erörtert, keine andere Bedeutung haben, als die in bezug auf O genommenen statischen Momente der in die Koordinatenebenen fallenden Projektionen der betreffenden Kraft.

Liegen also die Projektionen eines Kraftsystems auf die drei Koordinatenebenen vor, so bestimme man in jeder Ebene mit Hilfe einer Polfigur und des zugehörigen Seilpolygones Lage, Größe und Sinn der Resultierenden der in diese Ebene fallenden Projektionskräfte. Diese Resultierenden bestimmen dann in Richtung, Sinn und Größe die auf die Koordinatenebenen gefällten Projektionen der resultierenden Kraft des Kraftsystems, sowie in ihren in bezug auf O genommenen statischen Momenten die auf die Koordinatenachsen gefällten Projektionen des zu O gehörenden resultierenden Kräftepaares des Kraftsystems. Zur Auffindung der resultierenden Kraft genügen die Projektionen des Kraftsystems auf zwei Koordinatenebenen; zur Bestimmung des resultierenden Kräftepaares dagegen sind die Projektionen auf drei Koordinatenebenen erforderlich.

Wenn das räumliche Kraftsystem ein Gleichgewichtssystem sein soll, muß sowohl die resultierende Kraft wie der Momentvektor des resultierenden Kräftepaares Null sein. Für jede Ebene muß also nach dem Vorangehenden das System der ihr zugehörigen Projektionskräfte im Gleichgewicht sein. Von diesem Satze werden wir unter Ziff. 40 bei der Behandlung einer von Mohr gegebenen Konstruktion für die Zentralachse eines Kraftsystems noch einmal Gebrauch machen.

b) Auch die unter Ziff. 5 behandelte Reduktion, nach welcher jede Kraft in zwei Komponenten zerlegt wird, deren eine in eine feste Ebene α fällt, und deren andere durch einen nicht in α liegenden festen Punkt A hindurchgeht, eignet sich zur graphischen Zusammensetzung räumlich verteilter Kräfte. Die in die Ebene α fallenden Kräfte können mit Hilfe einer Polfigur und eines Seilpolygons zu einer einzigen Kraft oder zu einem Kräftepaar vereinigt werden; die im Punkte A zusammenkommenden Kräfte werden nach Ziff. 38 behandelt (Methode von Culmann).

40. Graphische Bestimmung der Zentralachse eines räumlichen Kraftsystems nach Mohr. Wir denken uns das Kraftsystem durch die Resultierenden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ der in die Koordinatenebenen yz, zx, xy fallenden Projektionen seiner Kräfte vorgegeben und fassen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf als zueinander passende Projektionen von drei im Raume liegenden Kraftvektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$. Einer unter Ziff. 39 gemachten Bemerkung zufolge stimmen diese Kraftvektoren in Richtung, Sinn und Größe mit der Resultierenden des Kraftsystems überein und sind also der Zentralachse dieses Systems parallel. Wie Mohr gezeigt hat, erhält man nun die Zentralachse selbst als Schnitt dreier Ebenen, welche durch $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ senkrecht zu den Ebenen $(\mathfrak{E}\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{D}\mathfrak{E})$ gelegt werden können.

Nennt man nämlich die „fehlenden" Projektionen von $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, so ist es klar, daß jedes der drei Systeme $(-\mathfrak{A}', \mathfrak{A}, \mathfrak{D})$, $(-\mathfrak{B}', \mathfrak{B}, \mathfrak{E})$ und $(-\mathfrak{C}', \mathfrak{C}, \mathfrak{F})$ mit dem räumlichen Kraftsystem identisch ist, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil die drei Orthogonalprojektionen der zu vergleichenden Systeme identisch sind. Stellt man das Kraftsystem durch die in seiner Zentralachse liegende Kraft $\mathfrak{R}$ und durch das Kräftepaar $(\mathfrak{M})$, dessen Ebene senkrecht zu dieser Achse steht, dar, so sind also die beiden Systeme $(\mathfrak{R}, \mathfrak{M})$ und $(-\mathfrak{A}', \mathfrak{A}, \mathfrak{D})$ identisch. Hieraus folgt, daß die drei Kräftepaare $(\mathfrak{A}', -\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{R}, -\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{M})$ einander das Gleichgewicht halten, so daß ihre Ebenen derselben Geraden parallel sein müssen. Die Richtung dieser Geraden findet man in dem Schnitt der die Kräfte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ enthaltenden yz-Ebene mit einer zu $\mathfrak{D}$ senkrechten Ebene. Dieser Schnitt steht aber senkrecht zu der Projektion von $\mathfrak{D}$ auf die yz-Ebene, d. h. senkrecht zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$. Damit ist also bewiesen, daß die genannte Gerade senkrecht zu der von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ bestimmten Ebene steht: haben diese beiden Kräfte doch in $\mathfrak{A}$ ihre gemeinschaftliche Orthogonalprojektion auf die yz-Ebene. Die durch $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{R}$ gelegte Ebene steht also senkrecht zu der Ebene $(\mathfrak{E}\mathfrak{F})$.

41. Zerlegung von Kräften. Die Zerlegung einer Kraft $\mathfrak{K}$ (Wirkungslinie l) in drei, sich in demselben Punkt schneidende Komponenten $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ (Wirkungslinien l_1, l_2, l_3) geschieht nach der Culmannschen Methode derart, daß man zuerst die Wirkungslinie der Resultierenden $\mathfrak{R}_{12}$ von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ als Schnitt der Ebenen (l, l_3) und (l_1, l_2) bestimmt, und dann durch zweifache Zerlegung, erst von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}_3$ und $\mathfrak{R}_{12}$, und dann von $\mathfrak{R}_{12}$ in $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, die gesuchten Komponenten konstruiert.

Eine zweite, ebenso einfache Methode, welche in Abb. 22 wiedergegeben ist, verdankt man Müller-Breslau[1]). Wenn die Kraft $\mathfrak{K}$ in zwei Projektionen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ (Grundriß und Aufriß) gegeben vorliegt, kommt es nur darauf an, in den beiden (senkrecht zueinander vorausgesetzten) Projektionsebenen zwei zueinander gehörende geschlossene Kräftepolygone zu konstruieren, deren Seiten vorgeschriebene Richtungen haben, und deren Schlußlinien die Projektionskräfte $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ sind. In beiden Projektionen kann man die erste und dritte Seite dieser Kräftepolygone zeichnen, so daß nur noch die richtige Lage der zweiten Seite angegeben zu werden braucht. Dies geschieht dadurch, daß man in der horizontalen Projektion vorläufig die Lage $1'2'$ dieser Seite willkürlich annimmt und in der in Abb. 22 angegebenen Weise eine Vertikalprojektion $1''2''$ der vorgeschriebenen Richtung aufsucht. Wenn nun die Gerade $1'2'$ parallel zu sich selbst verschoben wird, beschreibt der Punkt $2''$ eine Gerade, weil von dem veränderlichen Viereck $1'2'2''1''$ alle Seiten sich um Punkte derselben Geraden (nämlich der unendlich fernen Geraden) drehen und zugleich drei Eckpunkte an geraden Linien entlanggleiten (vgl. Ziff. 34). Man konstruiert also zwei Punkte $2'', \bar{2}''$ und findet im Schnittpunkt von deren Verbindungsgeraden s mit l_2'' den gesuchten Punkt 2.

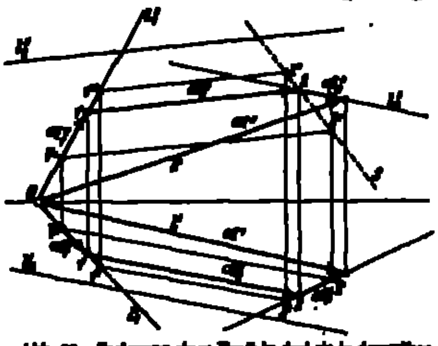


Abb. 22. Zerlegung einer Kraft in drei sich in demselben Punkt schneidende Komponenten.

Weit schwieriger ist die Aufgabe, eine Kraft in drei, vier, fünf oder sechs Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien zu zerlegen. Die Bedingungen, unter welchen solche Zerlegungen möglich sind, sowie die Zerlegungen selbst sind in Ziff. 9 diskutiert worden.

42. Die graphische Statik räumlicher Kraftsysteme nach Mayor. Mayor[2]) hat eine allgemeine Methode entwickelt, welche es gestattet, das räumliche und ebene Kraftsystem von einem einheitlichen Standpunkt aus zu behandeln. Das in der Ebene auftretende Seilpolygon ist hierbei ein Sonderfall einer im Raume eingeführten Seilkette.

Als Operationselement führt Mayor ein allgemeines Kraftsystem ein, das er ebenso wie Ball (vgl. Ziff. 11) durch das mit ihm verbundene Nullsystem, den sog. Wirkungskomplex und durch die Größe der in die Zentralachse dieses Komplexes fallenden Resultierenden bestimmt. Zur Konstruktion einer zu mehreren Kraftsystemen gehörigen Kette kommt er dann folgendermaßen: Es seien die zu den verschiedenen Kraftsystemen $F_1, F_2, \ldots F_n$ gehörigen Komplexe mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ angedeutet, die freien Vektoren der Kräfte $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_n$. Außerdem werden zu einem Kräftepolygon $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_n$ nach

[1]) H. Müller-Breslau, Zentralblatt der Bauverwaltung S. 437. 1891.
[2]) B. Mayor, Statique graphique des systèmes de l'espace, Lausanne, Paris 1910, chap. V.

Annahme eines Poles die Polstrahlen konstruiert. Schließlich werde ein Komplex Γ_{01} ins Auge gefaßt, welcher nur die einzige Bedingung zu erfüllen hat, daß seine Achse dem ersten Polstrahl parallel ist. Dann ist es in eindeutiger Weise möglich, einen die Kongruenz (Γ_1, Γ_{01}) enthaltenden Komplex Γ_{12} zu konstruieren, dessen Achse dem zweiten Polstrahl parallel läuft. Die Kongruenz (Γ_2, Γ_{12}) ihrerseits bestimmt wieder einen sie enthaltenden Komplex, dessen Achse dem dritten Polstrahl parallel ist, usw. Die Komplexe $\Gamma_{01}, \Gamma_{12}, \ldots$ spielen nun bei der Zusammensetzung der Kraftsysteme $F_1, F_2, \ldots F_n$ die Rolle, welche in dem folgenden Satze zum Ausdruck gebracht wird:

Eine willkürliche Anzahl von Kraftsystemen kann auf zwei Kraftsysteme reduziert werden, deren Wirkungskomplexe die äußersten Komplexe einer zu den Systemen $F_1, F_2, \ldots F_n$ gehörigen Seilkette sind, und deren resultierende Kräfte durch die äußersten Polstrahlen der entsprechenden Polfigur gegeben sind.

Die notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen für mehrere Kraftsysteme lassen sich also wie folgt zusammenfassen:

1. Das zu den Systemen F gehörige Polygon der in deren Zentralachse fallenden resultierenden Kräfte muß geschlossen sein.

2. Die äußersten Komplexe der entsprechenden Seilkette müssen zusammenfallen oder, wie wir es ausdrücken wollen, die Seilkette muß geschlossen sein.

Auch der aus der Theorie der ebenen Kraftsysteme bekannte Satz bezüglich der zu zwei Seilpolygonen gehörigen Parallelachse findet in der neuen Behandlung seine natürliche Verallgemeinerung, und zwar folgendermaßen:

Die entsprechenden Komplexe zweier zu denselben Kraftsystemen gehörigen Seilketten schneiden sich in Kongruenzen, welche einem linearen Komplexe angehören, dessen Achse der Verbindungsgeraden der entsprechenden Pole parallel ist.

Durch sinngemäße Übertragung der räumlichen Figuren auf die Ebene ist es möglich, die Seilkette mittels zweier Seilpolygone abzubilden und alle erforderlichen Konstruktionen in der Ebene auszuführen. Das Wesentliche dieser Übertragung liegt in der ebenen Abbildung einer Kraft. Diese wird dadurch erzeugt, daß als festes Bezugselement ein linearer Komplex eingeführt wird — für praktische Zwecke mit seiner Achse senkrecht auf der Abbildungsebene stehend — und daß als Abbildungselemente der Kraft ihre Projektion auf die Bildebene, sowie der Durchstoßpunkt der in bezug auf den genannten Komplex konjugierten Geraden der Kraftlinie bezeichnet werden.

43. Die graphische Statik räumlicher Systeme nach v. Mises. In einem zwar äußerlich von der Mayorschen Methode abweichenden, trotzdem mit ihr in engem Zusammenhang stehenden Gedankengang hat v. Mises[1]) noch eine andere ebene Abbildung des räumlichen Kraftsystems behandelt, welche wir zum Schluß hier kurz erwähnen wollen.

Bezeichnet man mit X', Y', Z' die Komponenten eines Vektors in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, mit X, Y die Komponenten eines in der xy-Ebene liegenden Stabes, sowie mit M das Moment dieses Stabes in bezug auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems, so besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Vektoren des Raumes und den Stäben der xy-Ebene, welche definiert ist durch

$$X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad cZ' = M,$$

wo c eine beliebige positive Konstante bedeutet. In der hierdurch festgelegten

[1]) R. v. Mises, ZS. für Math. u. Physik Bd. 64, S. 209. 1917; E. Kruppa, ZS. für angew. Math. u. Mech. Bd. 4, S. 146. 1924.

Zuordnung entspricht jeder Summe von Raumvektoren die Summe der entsprechenden Stäbe der Ebene.

Damit sind die Aufgaben der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in einem Punkte auf die wohlbekannten Konstruktionen, welche für ebene Kraftsysteme gelten, zurückgeführt.

Greifen die räumlichen Kräfte nicht in einem Punkt an, so wird ihre Zusammensetzung durch zweimalige Vektoraddition herbeigeführt, in dem Sinne, daß zuerst die Kraftvektoren selbst und dann ihre Momentvektoren für irgendeinen Bezugspunkt addiert werden. Zum Zwecke dieser zweiten Summation wird auch jedes Moment durch einen Stab in der Abbildungsebene dargestellt, und zwar mittels eines ähnlichen wie für die Raumvektoren geltenden Übertragungsprinzips. Sind M_x, M_y, M_z die drei Komponenten des Momentvektors, so sind die Komponenten des zugeordneten Stabes

$$X = \frac{M_z}{e}, \qquad Y = \frac{M_z}{e}, \qquad M = M_y.$$

Die Zusammensetzung räumlicher Kräfte läuft also mit Hilfe der genannten Abbildungen auf das Zeichnen zweier gewöhnlichen Seilpolygone hinaus. Auch die Lösung aller Zerlegungsprobleme wird in elementarer Weise ermöglicht.

Überhaupt dürfte man für praktische Zwecke in den verwendeten elementaren Hilfsmitteln einen Vorzug gegenüber der unter Ziff. 42 behandelten Methode erblicken, obwohl zweifellos die letztere einen tieferen Einblick in die räumlichen Verhältnisse eröffnet und die räumlichen und ebenen Probleme von einem einheitlicheren Gesichtspunkt aus zu behandeln gestattet. Übrigens geht auch Mayor in einer kürzlich erschienenen Abhandlung[1]) näher auf die praktische Verwendbarkeit seiner Methode ein.

IV. Anwendungen der Graphostatik.

a) Momente erster und zweiter Ordnung.

44. Das statische Moment einer Kraft in bezug auf einen Punkt. Zur graphischen Bestimmung des statischen Momentes einer Kraft $\mathfrak{K}$ in bezug auf einen Punkt P konstruiert man mit Hilfe einer Polfigur ein (aus zwei Seiten bestehendes) zu $\mathfrak{K}$ gehörendes Seilpolygon (vgl. Abb. 23) und schneidet die Seiten

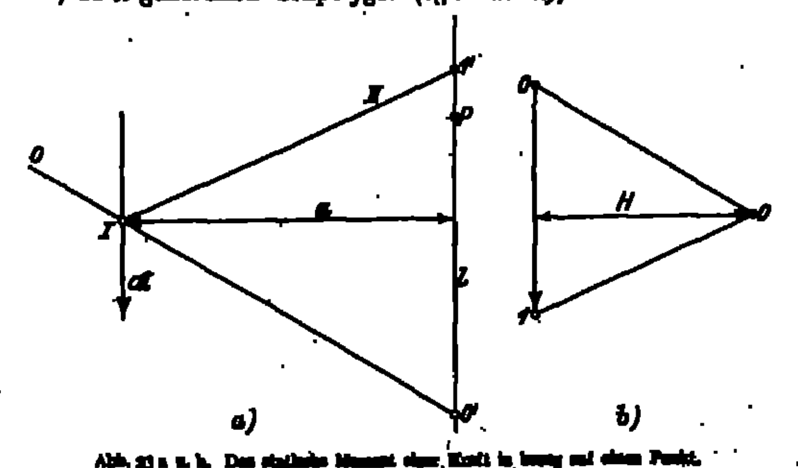


Abb. 23 a u. b. Das statische Moment einer Kraft in bezug auf einen Punkt.

[1]) R. Mayor, Statique graphique. Lausanne 1926.

$0I$ und $I\,II$ mit der durch P parallel zur Wirkungslinie von $\mathfrak{K}$ gezogenen Geraden l. Die Strecke $0'1'$ ist dann ein Maß für das gesuchte statische Moment. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $01O$ und $0'1'I$ folgt nämlich $s:H = 0'1':01$. Hierin bedeutet, wie aus der Figur ersichtlich, s den Abstand des Momentenpunktes P von der Wirkungslinie der Kraft $\mathfrak{K}$, H den Abstand des Poles von dem die Kraft $\mathfrak{K}$ in der Polfigur darstellenden Vektor. Es ist also $01 \cdot s = 0'1' \cdot H$. Legt man H die Bedeutung einer Kraft bei, so findet man: das statische Moment von $\mathfrak{K}$ in bezug auf P ist gleich dem Produkt der Kraft H und der Länge $0'1'$. Die Kraft H wird gemessen mit dem in die Polfigur für die Strecke 01 eingeführten Kraftmaßstabe, die Länge $0'1'$ dagegen mit dem für die Abb. 23a geltenden Längenmaßstab. Das Zeichen des statischen Momentes wird versinnlicht durch den Sinn der Strecke $0'1'$.

Liegen mehrere parallele Kräfte vor, so liefert ein zu ihnen konstruiertes Seilpolygon in analoger Weise ein Maß, sowohl für die statischen Momente der einzelnen, wie auch für das resultierende Moment einer willkürlichen Anzahl

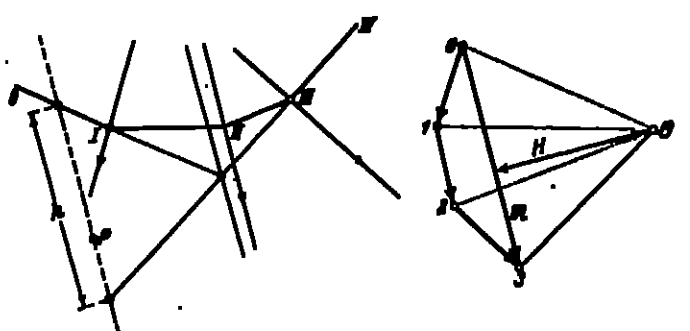


Abb. 24. Das Moment einer Anzahl willkürlich gerichteter Kräfte in bezug auf einen Punkt.

aufeinanderfolgender Kräfte. Dem soeben Gesagten gemäß schneiden je zwei aufeinanderfolgende Seiten des Seilpolygons auf der durch den Bezugspunkt P den Kräften parallel gezogenen Geraden l eine Strecke ab, deren Länge ein Maß für das statische Moment der zwischen den Polygonseiten liegenden Kraft ist; und die einzelnen Strecken sind in der für die Kräfte angenommenen Reihenfolge lückenlos hintereinander gereiht. Das Moment mehrerer aufeinanderfolgender Kräfte wird also, auch mit dem Vorzeichen, in der Strecke abgebildet, welche auf der Geraden l von den beiden die sämtlichen Kräfte einschließenden Polygonseiten ausgeschnitten wird.

Auch für den Fall, daß die Kräfte nicht parallel sind, leistet das Seilpolygon dieselben Dienste. Denn nach einem schon früher bewiesenen Satze ist die Summe der Momente mehrerer Kräfte in bezug auf einen Punkt gleich dem Momente der Resultierenden der Kräfte, so daß nur das statische Moment dieser Resultierenden in bezug auf den vorgegebenen Punkt zu konstruieren ist. Abb. 24 erläutert an einem Beispiel die auszuführende Konstruktion. Das Moment ist gleich dem Produkt von h und H.

45. Die Momentenfläche eines statisch bestimmten gewichtslosen Balkens; die Querkraftlinie. Die soeben behandelte Konstruktion wird vielfach verwendet bei der Bestimmung der sog. Momentenfläche eines durch äußere Kräfte belasteten, in zwei Punkten gestützten Balkens. Es handelt sich dabei um die Aufgabe, für jeden zur Balkenachse senkrechten Querschnitt in graphischer Weise das in diesem Querschnitt zu übertragende Biegungsmoment zu-

zugeben. Beschränken wir uns auf den Fall eines geraden prismatischen Balkens, bei dem alle belastenden Kräfte die Achse des Balkens senkrecht schneiden und in einer durch diese Achse hindurchgehenden Ebene liegen, so wird außer einem Biegungsmoment in einem solchen Querschnitt nur noch eine Querkraft übertragen. Querkraft und Moment werden bestimmt mit Hilfe der Gleich-

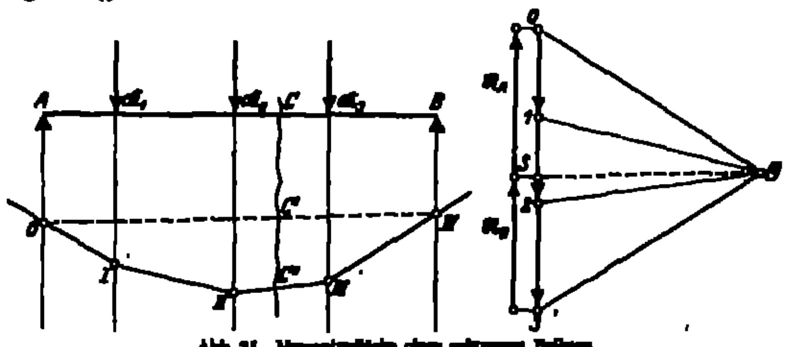


Abb. 25. Momentenfläche eines gelagerten Balkens.

gewichtsbedingungen, welche für einen der beiden Teile, in welche der Balken durch den ins Auge gefaßten Querschnitt geteilt gedacht werden kann, gelten. Aus diesen Gleichgewichtsbedingungen erhellt sofort, daß das in einem Querschnitt wirkende Moment der Größe nach gleich dem statischen Moment aller auf einen der beiden Teile des Balkens wirkenden Kräfte in bezug auf den betrachteten Querschnitt ist. Die Aufgabe ist also mit der unter Ziff. 44 behandelten identisch. Bei der praktischen Lösung geht man folgendermaßen

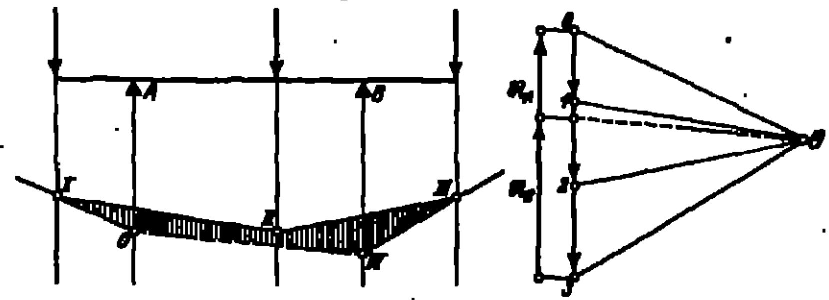


Abb. 26. Momentenfläche eines Kragbalkens.

vor (Abb. 25). Erstens konstruiert man mit Hilfe einer Polfigur ein den gegebenen Kräften $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ zugeordnetes Seilpolygon. Dann bezieht man die Lagerreaktionen $\mathfrak{R}_A$ und $\mathfrak{R}_B$ mit in das Kräftesystem ein und sucht das Polygon durch zwei Seiten zu vervollständigen, wovon die eine durch den Punkt 0, die andere durch den Punkt *IV* hindurchgeht. Weil aber die Lagerreaktionen den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten, muß das ergänzte Polygon geschlossen sein, so daß die beiden hinzuzufügenden Seiten in der Geraden $0IV$, welche wir die **Schlußlinie** nennen, liegen müssen. Zieht man durch O den zu dieser Geraden parallelen Polstrahl OS, so sind die Lagerreaktionen $\mathfrak{R}_A$ und $\mathfrak{R}_B$ durch $S0$ und $3S$ bestimmt. Da nun alle auf den Balken wirkenden Kräfte bekannt sind, kann das in einem willkürlichen Querschnitt C übertragene Biegungsmoment mit Hilfe des geschlossenen Seilpolygons bestimmt werden. Das Polygon $C'0IIIC''$ spielt die Rolle eines zu den Kräften $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{R}_A$ gehörigen Seilpolygons, welches in der Strecke $C'C''$ ein Maß für das gesuchte Moment liefert.

Die vom geschlossenen Seilpolygon umschlossene Fläche nennt man die **Momentenfläche** des Balkens. In Abb. 26 ist die Konstruktion dieser Fläche noch für einen überhängenden Balken ausgeführt.

Für den Fall einer kontinuierlichen Belastung des Balkens (wie diese z. B. von dem Eigengewicht geliefert wird) ersetzt man diese Belastung streckenweise durch mit ihr gleichwertige Einzelkräfte und konstruiert zu dieser neuen Belastung die Momentenfläche (vgl. Abb. 27). Obwohl diese Momentenfläche natürlich nicht die gesuchte ist, so steht sie mit dieser doch in einem engen Zusammenhang, insofern als die Seiten des zu den Einzelkräften gehörigen Seilpolygons die gesuchte Fläche umhüllen. Wir haben nämlich die unter Ziff. 32 erörterte Methode auf die über die Balkenlänge kontinuierlich verteilten Kräfte (zu denen also eine **Seilkurve** gehört) angewandt und wissen deshalb, daß jede Seite des von uns gezeichneten Seilpolygons eine Seite der Seilkurve tragen, d. h. die Seilkurve tangieren muß. Außerdem liegen die Berührungspunkte der verschiedenen Seiten, wie ebenfalls aus der unter Ziff. 32 gemachten Schlußfolgerung erhellt, auf den Loten, welche die Unterteilung der gegebenen Belastung angeben.

Es ist von Bedeutung, hier festzustellen, daß die angeführte Konstruktion die Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt.

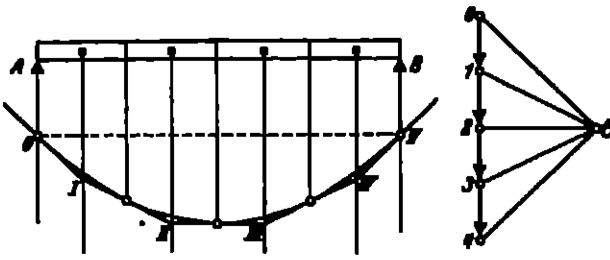


Abb. 27. Momentenfläche eines kontinuierlich belasteten Balkens.

Betrachtet man nämlich das Gleichgewicht eines Balkenelementes, das von zwei unendlich nahen Querschnitten begrenzt und nicht von einer äußeren Einzelkraft belastet wird, so wirken in den genannten Querschnitten außer den Momenten M und $M + dM$ auch noch Querkräfte, welche wir mit Q und $Q + dQ$ bezeichnen wollen. Als äußere Belastung ist nur eine unendlich kleine Kraft $q\,dx$ vorhanden.

Die Gleichgewichtsbedingungen liefern für dieses Balkenelement

$$q\,dx = dQ, \qquad Q\,dx = dM.$$

Für das Moment gilt also die Beziehung

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q.$$

Die soeben konstruierte Seilkurve ist also die Lösung dieser Differentialgleichung; ihre Schlußlinie paßt die Lösung an die beiden Randbedingungen an, welche beim statisch bestimmten Balken dem Moment auferlegt sind.

In vielen Fällen ist es angebracht, neben der Momentenkurve auch die Querkraftkurve des Balkens, d. h. die Linie, welche in ihrer Ordinate die von dem betreffenden Querschnitt übertragene Querkraft angibt, zu zeichnen. Sie kann unmittelbar erhalten werden, indem man für jeden Querschnitt das Gleichgewicht des z. B. links vom Querschnitt gelegenen Balkenteiles betrachtet, und die in diesem Querschnitt erforderliche Querkraft bestimmt. Mittelbar leitet man sie aus der Momentenlinie mit Hilfe der obenerwähnten Beziehung $Q = \frac{dM}{dx}$ ab.

46. Fortsetzung. Auch wenn der Balken nicht gerade ist oder wenn die belastenden Kräfte nicht parallel sind (jedoch mit der Balkenachse in einer Ebene liegen), kann mit Hilfe des Seilpolygons, wenn auch in etwas umständlicherer Weise, das in jedem Querschnitt zu übertragende Biegungsmoment bestimmt werden. Zeichnet man z. B. für den in der Abb. 28 gegebenen Fall zu den Kräften

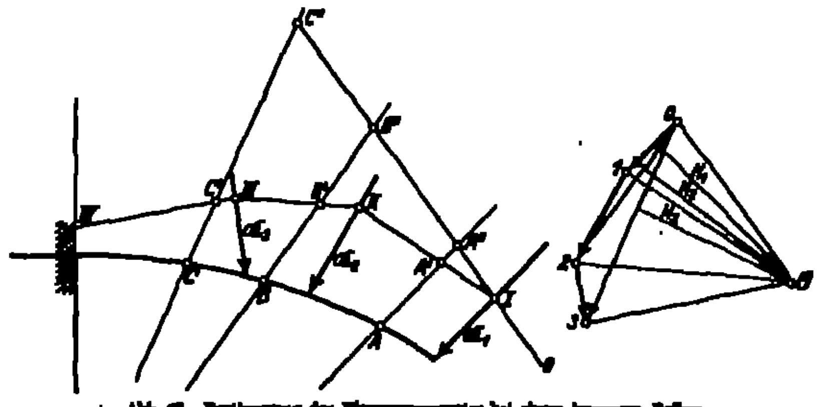


Abb. 28. Bestimmung des Biegungsmomentes bei einem krummen Balken.

$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ ein Seilpolygon, so erhält man für das auf einen Punkt A bezogene statische Moment der Kraft $\mathfrak{K}_1$ das Produkt aus der Kraft H_1 ($\perp 01$) in die Strecke $A'A''$, welche durch die beiden Seiten $0I$ und $I\,II$ von der durch A parallel zu $\mathfrak{K}_1$ gezogenen Geraden abgeschnitten wird. Das Moment der Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in bezug auf den Punkt B wird erhalten, indem man die Seiten $0I$ und $II\,III$ mit einer durch B gehenden Geraden, welche der Resultierenden von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ parallel läuft, schneidet. Die hierdurch bestimmte Strecke $B'B''$ muß mit der der Polfigur zu entnehmenden Kraft H_2 ($\perp 02$) multipliziert werden, um das gesuchte Moment zu liefern. Für die Punkte C, welche dem letzten Felde des Balkens angehören, müssen Geraden parallel zu der Resultierenden der drei Kräfte $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ gezogen werden usw. Sollte der Balken in einem seiner Punkte gelenkig gelagert, in einem anderen in vorgeschriebener Weise gestützt sein, so hat man zuerst die Auflagerreaktionen zu bestimmen.

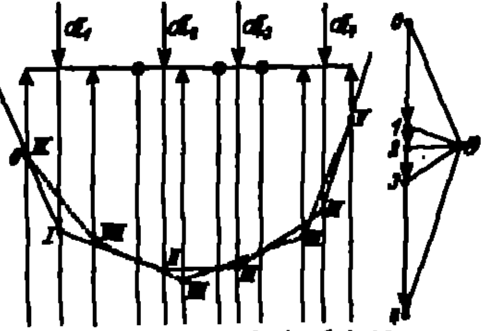


Abb. 29. Momentenfläche eines Gerberträgers.

47. Die Momentenfläche eines Gerberträgers. Ist ein Balken auf mehr als zwei Stützen gelagert, so genügen die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr zur Bestimmung der Lagerreaktionen. Durch Einführung von Gelenken — welche derart anzubringen sind, daß kein Balkenteil labil wird — kann diese statische Unbestimmtheit aber wieder behoben werden. Ein jedes Gelenk liefert nämlich eine Gleichgewichtsbedingung, welche besagt, daß das Biegungsmoment dort Null ist. Balken von der genannten Beschaffenheit werden nach ihrem Erfinder Gerberträger genannt.

Ein einfaches Beispiel ist in Abb. 29 angegeben. Die Momentenfläche erhält man, indem man zu den Kräften $\mathfrak{K}_1, \ldots \mathfrak{K}_4$ ein Seilpolygon konstruiert und dazu einen Zug von Schlußlinien zeichnet, welche dem obengenannten Umstand Rechnung tragen.

48. Bestimmung der größten Biegungsmomente bei bewegten Lasten. Bestimmt man bei dem in Abb. 30 gezeichneten Balken das Biegungsmoment M_2, welches in D auftritt, wenn eine Kraft $\mathfrak{K}$ sich im Punkte C befindet, so erhält man dafür denselben Wert wie für das Moment M_1, welches in C auftritt, wenn die Kraft $\mathfrak{K}$ in D angreift, nämlich

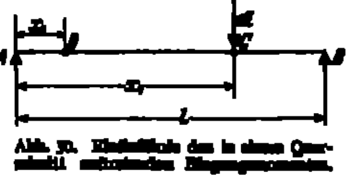


Abb. 30. Einflußlinie des in einem Querschnitt auftretenden Biegungsmomentes.

$$M = \frac{(l-x_1)x_2}{l} K.$$

Wenn für einen bestimmten Querschnitt D bei jeder Lage x des Angriffspunktes von $\mathfrak{K}$ das in diesem Querschnitt D auftretende Moment als Ordinate über die Abszisse x aufgetragen wird, so erhält man in den Endpunkten dieser Ordinaten die sog. Einflußlinie für das Moment M_D. Die von dieser Einflußlinie und der Abszissenachse eingeschlossene Fläche heißt die Einflußfläche. Nach dem oben entwickelten Satze stimmt die Einflußlinie mit der Momentenlinie des in D belasteten Balkens überein. Das größte Moment im Querschnitt D tritt auf, wenn die Last sich in D befindet. Ist der Balken einem beweglichen Lastsystem unterworfen, so erhält man die Einflußlinie für das in einem Querschnitt auftretende Biegungsmoment durch Superposition der von den Einzelkräften herrührenden Einflußlinien. Wir gehen auf die Frage, wie man diese Einflußlinien am zweckmäßigsten summiert, nicht ein, stellen aber die wichtige Tatsache fest, daß in dem betrachteten Querschnitt das Moment nur dann ein größtes sein kann, wenn eine der Lasten über dem Querschnitt steht. Die Kurve, welche für alle Querschnitte D durch ihre Ordinaten das bei einer beweglichen Last oder bei einem beweglichen Lastsystem auftretende größte Moment angibt, wird die Maximalmomentenkurve genannt. Der Abb. 30 entnimmt man, daß die Gleichung dieser Kurve für den dort betrachteten einfachen Fall einer Einzellast K die folgende ist

$$M_{max} = \frac{(l-x)x}{l} K.$$

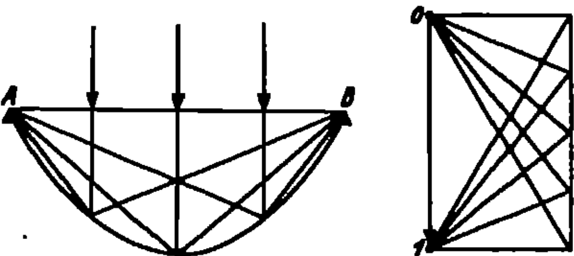


Abb. 31. Maximalmomentenkurve bei einer Einzellast.

Graphisch erhält man die durch diese Gleichung dargestellte Parabel, indem man, unter Festhaltung der Schlußlinie und des Polabstandes, die zu den verschiedenen Laststellungen gehörenden Momentenflächen zeichnet (s. Abb. 31). Man braucht dazu nur von A aus Geraden zu ziehen, welche den durch den Punkt 0 der Polfigur gehenden Polstrahlen parallel sind, und von B aus Geraden, welche den durch 1 gehenden Polstrahlen parallel laufen.

Eine Konstruktion, mit Hilfe derer man in einer einzigen Figur die Einflußlinien für das Biegungsmoment aller Querschnitte und zugleich die benötigten Daten für die Maximalmomentenkurve erhält, gab Culmann. Zeichnet man zu einer bestimmten Stellung der Kraft das Seilpolygon, so erhält man bei Verschiebung des Balkens (samt seinen Lagern) gegen die festgehaltene Last alle möglichen relativen Lagen zwischen Kraft und Träger. Die zu diesen Lagen passenden Schlußlinien umhüllen eine Parabel, welche die beiden Seiten des Seilpolygons berührt. Jede Tangente dieser Parabel schließt also mit dem Seilpolygon die Momentenfläche für eine bestimmte Laststellung, oder wenn man

will, die Einflußfläche des Biegungsmomentes des mit der Laststellung übereinstimmenden Querschnittes ein. Die größte Höhe dieser Fläche bestimmt das in diesem Querschnitt auftretende größte Biegungsmoment, so daß auch die Maximalmomentenkurve leicht gezeichnet werden kann.

Die hier für eine Einzelkraft angegebenen Konstruktionen lassen eine sinngemäße Übertragung auf den Fall eines beweglichen Kraftsystems zu. Wir verweisen hierfür auf das schon mehrere Male zitierte Buch von HENNEBERG und erwähnen nur noch, wenn auch ohne Beweis, das elegante Verfahren, welches v. MISES[1]) zur Ermittlung der Maximalbiegungsmomente an statisch bestimmten Trägern unter dem Einfluß eines beweglichen Lastsystems veröffentlicht hat.

Ausgehend von dem schon erwähnten Satze, daß in einem bestimmten Balkenquerschnitt das Biegungsmoment nur dann einen Höchstwert erreichen kann, wenn eine der Einzellasten über diesem Querschnitt steht, wird zuerst diejenige Last als die für die betreffende Stelle „gefährliche" Last bezeichnet, welche, über den Querschnitt gestellt, mit den übrigen Lasten des Systems das größte Moment in diesem hervorruft. Sodann wird der Satz bewiesen, daß, wenn die Balkenlänge l in n Teile zerlegt wird, die sich der Reihe nach zueinander verhalten wie die Beträge der Kräfte $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$, für jeden Querschnitt des ersten Feldes die Kraft $\mathfrak{K}_1$, für jeden Querschnitt des zweiten Feldes die Kraft $\mathfrak{K}_2$ usw. die gefährliche Kraft ist. Es zeigt sich nun, daß der Verlauf der von ruhender und wandernder Last herrührenden Maximalmomente erhalten wird, indem man zur ruhenden Belastung in den soeben genannten Teilpunkten $\left(\text{deren Abszissen also } \frac{K_1}{\sum K} l,\ \frac{K_2}{\sum K} l, \ldots \frac{K_{n-1}}{\sum K} l \text{ sind}\right)$ Einzelkräfte von den Größen

$$-\frac{a_{12}}{l}\sum K,\ -\frac{a_{23}}{l}\sum K, \ldots -\frac{a_{n-1,n}}{l}\sum K$$

(a_{pq} = Abstand der Kräfte $\mathfrak{K}_p$ und $\mathfrak{K}_q$)

sowie eine über die Stützweite gleichmäßig verteilte Belastung vom Gesamtwerte $2\sum K$ hinzufügt und das Biegungspolygon für dieses neue Lastsystem zeichnet.

49. Graphische Schwerpunktsbestimmung. Die Koordinaten x_s und y_s des Schwerpunktes einer ebenen Figur sind definiert durch die Gleichungen

$$x_s F = \int_F x\,dF, \qquad y_s F = \int_F y\,dF,$$

in welchen dF das Flächenelement der betrachteten Figur mit den Koordinaten x, y bedeutet (vgl. Ziff. 18 u. 19).

Zerlegt man die Fläche F in n Teile mit den Teilflächen $F_1, F_2, \ldots F_n$ und den Teilschwerpunkten $x_{s_1}, y_{s_1};\ x_{s_2}, y_{s_2}; \ldots x_{s_n}, y_{s_n}$, so erhält man:

$$\int_F x\,dF = \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} x\,dF_i = \sum_{i=1}^{n} x_{s_i} F_i,$$

$$\int_F y\,dF = \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} y\,dF_i = \sum_{i=1}^{n} y_{s_i} F_i,$$

oder

$$x_s F = \sum_{i=1}^{n} x_{s_i} F_i,$$

$$y_s F = \sum_{i=1}^{n} y_{s_i} F_i.$$

[1]) R. v. MISES, Dinglers Polytechn. Journ. Bd. 321, H. 38, 1906.

Dieser Satz ermöglicht es, für jede ebene Figur, welche eine Unterteilung in Gebiete zuläßt, deren Schwerpunkte bekannt sind, die Lage des Gesamtschwerpunktes durch eine einfache Summation zu bestimmen. Stellt man die Flächen F_i durch parallele, von ihren Schwerpunkten ausgehende Vektoren dar, so ist, wenn die Richtung dieser Vektoren parallel zur y-Achse gewählt wird, der Ausdruck $\sum x_{si} F_i$ als das statische Moment dieser Vektoren in bezug auf die y-Achse aufzufassen.

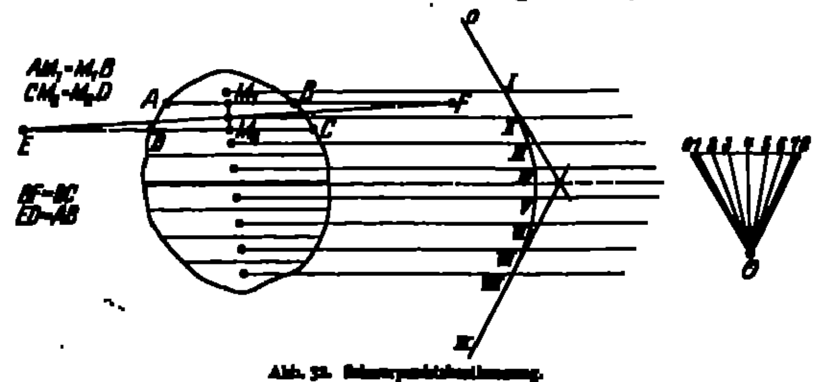


Abb. 32. Schwerpunktbestimmung.

Dieses statische Moment wird graphisch erhalten, indem man die genannten Vektoren wie Kräfte behandelt und mit Hilfe einer Polfigur ein zu ihnen gehörendes Seilpolygon konstruiert. Das Stück, welches die äußersten Seiten dieses Polygons von der y-Achse abschneiden, multipliziert mit der durch den benutzten Polabstand dargestellten Fläche, liefert den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} x_{si} F_i = \int x\,dF$. Weil überhaupt die äußersten Seiten des Seilpolygons von jeder zur y-Achse parallelen Geraden ein Stück abschneiden, welches ein Maß für das auf diese Gerade bezogene statische Moment der Fläche ist, so erhält man in dem Schnittpunkt jener beiden äußersten Seiten einen Punkt der zur y-Achse parallelen Schwerlinie. Wiederholung der Konstruktion für parallel zur x-Achse gerichteten F_i-Vektoren liefert eine zweite Schwerlinie, welche zusammen mit der zuerst gefundenen den Schwerpunkt S bestimmt.

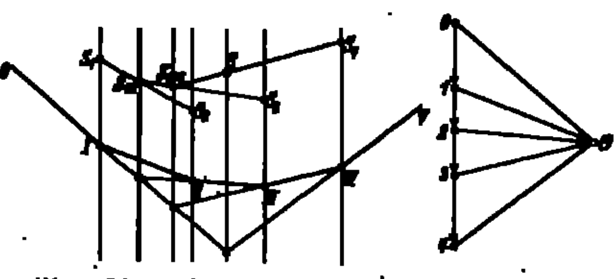


Abb. 33. Schwerpunktsbestimmung mit Hilfe eines einzigen Seilpolygons.

Am einfachsten verläuft die Konstruktion, wenn man die vorgegebene Figur in Rechtecke oder Dreiecke zerteilen kann. Bei einer beliebigen Figur hilft man sich dadurch, daß man sie durch ein System von zueinander parallelen Geraden in Streifen zerlegt, welche genügend schmal sind, um als Trapeze angesehen werden zu können. Die Schwerpunkte dieser Trapeze werden am besten mit Hilfe der in Abb. 32 angegebenen Konstruktion bestimmt. Die Schwerpunkte der beiden äußersten Streifen können in der Regel mit genügender Genauigkeit in einem Abstand von $\frac{1}{3}$ der größten Streifendicke von der begrenzenden Sehne angenommen werden.

Schließlich sei noch bemerkt, daß auch mit dem Zeichnen eines einzigen Seilpolygons der Schwerpunkt einer Figur, welche in Teilflächen mit bekanntem

Schwerpunkt zerlegt ist, bestimmt werden kann. Dabei wird Gebrauch gemacht von der Tatsache, daß der Schwerpunkt zweier Flächen auf der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte liegt. Hat man also zu einem System von gleichgerichteten Vektoren $F_1 \ldots F_n$ (vgl. Abb. 33, wo $n = 4$ ist), ein Seilpolygon konstruiert, so erhält man in dem Schnittpunkt S_{12} der Geraden $S_1 S_2$ mit der durch den Schnittpunkt von $0I$ und $II\,III$ gezogenen Lotrechten den Schwerpunkt S_{12} von F_1 und F_2. Der Schwerpunkt S_{123} von F_1, F_2, F_3 liegt auf der Geraden $S_{12}S_3$, während andererseits die lotrechte Schwerlinie von diesen Teilflächen durch den Schnittpunkt der beiden Polygonseiten $0I$ und $III\,IV$ hindurchgeht. Hiermit ist der Schwerpunkt S_{123} bestimmt. Schließlich wird der Gesamtschwerpunkt S als Schnittpunkt der Geraden $S_{123}S_4$ mit der durch den Schnittpunkt von $0I$ und $IV\,V$ gehenden Vertikalen ermittelt.

50. Graphische Ermittlung der Spannungs- und Stromverteilung bei Gleichstrom. Die unter Ziff. 44 behandelte graphische Methode zur Bestimmung von Momenten erster Ordnung eignet sich naturgemäß zur graphischen Behandlung aller solcher Probleme, bei denen es sich um die algebraische Summierung von Produkten aus zwei Faktoren handelt. Ein charakteristisches Beispiel für derartige Aufgaben bildet ein elektrischer Leiter, an dem in gewissen Punkten Strom abgenommen wird und bei dem die Spannungsabnahme ermittelt werden soll. Man betrachtet dabei den gestreckt gedachten Leiter als einen Balken, dessen Längenelement ein Maß für den örtlichen Widerstand des Leiters sein muß, und der in gewissen Punkten durch die Ströme $i_1, i_2, i_3, \ldots$ welche dem Leiter entnommen werden, „belastet" ist. Ein zu diesen „Kräften" konstruiertes Seilpolygon liefert bei geeignet gezeichneter Schlußlinie eine Fläche, deren Ordinaten den Spannungsabfall angeben.

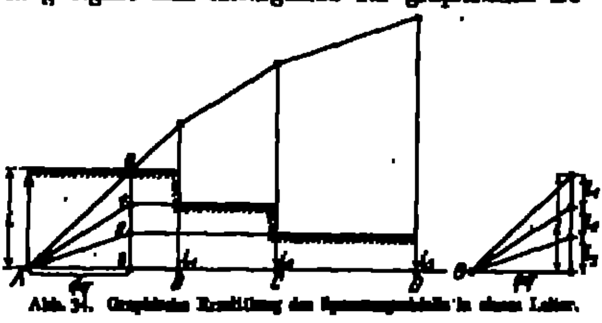


Abb. 34. Graphische Ermittlung des Spannungsabfalls in einem Leiter.

Abb. 34 stellt einen solchen Leiter AD dar, dem an seinem linken Ende A ein Strom i zugeführt wird, und bei welchem in den Punkten B, C, D Stromabnahme (mit den Beträgen i_1, i_2 und i_3) erfolgt. Betrachtet man den Leiter als einen im Punkte D eingespannten Balken, und zeichnet man zu den „Kräften" i, i_1, i_2, i_3 eine Polfigur, deren Polabstand gleich dem Reziproken des auf die Längeneinheit bezogenen Leitungswiderstandes $1/q\varrho$ ist (wobei q den Querschnitt und ϱ die Leitfähigkeit des Leiters bedeutet), so erhält man in der zu diesen Kräften gehörenden Momentenfläche den Verlauf der im Leiter auftretenden Spannungsabnahme.

Ist die Spannung in den Endpunkten A und E eines Leiters gleichhoch und erfolgt in den Punkten B, C, D eine Stromabnahme i_1, i_2, i_3, so liegt ein Analogon mit dem in seinen Endpunkten gestützten Balken vor. Man braucht diesen Balken nur mit den „Kräften" i_1, i_2, i_3 belastet zu denken, um in der zu dieser Belastung gehörenden Momentenfläche ein Bild des Spannungsverlaufes und in den Auflagerreaktionen die in A und E zuzuführenden Ströme zu gewinnen. Die Querkraftlinie gibt, wie leicht ersichtlich, das Stromdiagramm[1]).

[1]) Für weitere Einzelheiten sowie für Anwendungen der Graphostatik auf Wechselstromprobleme sei auf das Buch von J. Herzog und C. Feldmann, Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze, Bd. I, 4. Aufl., 1927 und die daselbst angegebene Literatur verwiesen.

51. Momente zweiter Ordnung. Das Moment zweiter Ordnung J einer ebenen Figur in bezug auf eine in ihrer Ebene liegende Gerade g kann dadurch approximiert werden, daß man das Integral $\int_F e^2 dF$ (in welchem e den Abstand des Flächenelementes dF von der Geraden g bedeutet), ersetzt durch eine Summe $\sum e_i^2 F_i$ von Produkten $e_i^2 F_i$, in welchen der eine Faktor die Fläche

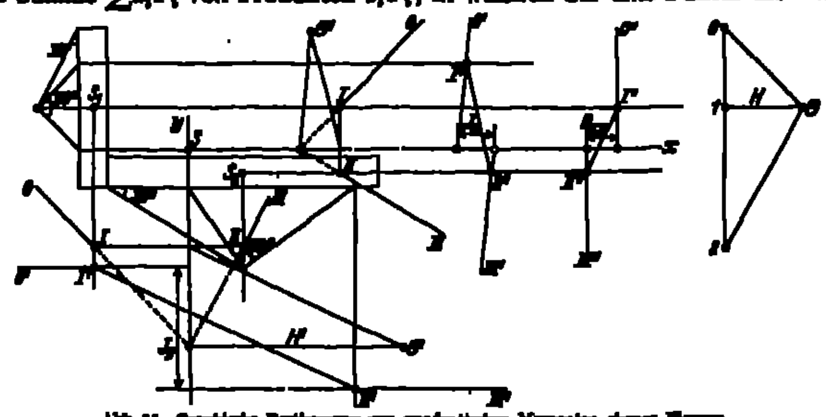


Abb. 35. Graphische Bestimmung von quadratischen Momenten ebener Figuren.

eines endlichen Teiles von F und der andere Faktor e_i^2 das Quadrat des Abstandes seines Schwerpunktes von der Geraden g bedeutet. Dabei müssen die sämtlichen F_i natürlich die Gesamtfläche F ausfüllen.

Da in Wirklichkeit der Beitrag J_i eines Flächenteiles F zu dem gesuchten Trägheitsmoment nach dem unter Ziff. 22 erörterten gleich

$$J_i = J_i' + e_i^2 F_i$$

ist, wobei J_i' das Trägheitsmoment dieses Teiles in bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende, zu g parallele Gerade g' bedeutet, so kann nur dann von einer wirklichen Approximation die Rede sein, wenn die F_i von solcher Gestalt sind, daß die Beträge J_i' vernachlässigbar werden. Um dies zu erreichen, zerteilt man die vorgegebene Fläche durch eine Anzahl zu g paralleler Geraden in Streifen, deren Breite als genügend klein angesehen werden kann, um die obenstehende Bedingung zu erfüllen.

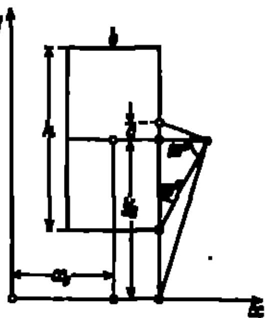


Abb. 36. [illegible] für das Trägheitsmoment eines Rechteckes.

Sodann konstruiert man mit Hilfe eines Seilpolygons die statischen Momente $e_i F_i$ der Größen F_i in bezug auf die Gerade g und wiederholt diese Konstruktion noch einmal für die in dieser Weise gefundenen Größen $e_i F_i$. Die Konstruktion ist in Abb. 35 für den Querschnitt eines ungleichschenkligen Winkeleisens ausgeführt, und zwar sind die Trägheitsmomente in bezug auf zwei durch den Schwerpunkt der Figur hindurchgehende Geraden x und y bestimmt. Dabei ist aber die ganze Figur nur in zwei Teile zerlegt worden, so daß die „Eigenträgheitsmomente" J' dieser Flächen nicht einmal annähernd vernachlässigt werden dürfen. Demgemäß ist beim Zeichnen des zweiten Seilpolygons eine Verbesserung angebracht worden, welche noch erläutert werden muß.

Betrachten wir das in Abb. 36 angegebene Rechteck, so ist sein Trägheitsmoment in bezug auf die x-Achse gleich

$$J = F y_s^2 + \frac{1}{12} b h^3 = F y_s \left(y_s + \frac{1}{12} \frac{h^2}{y_s} \right).$$

Hieraus folgt, daß man, um J zu erhalten, bei der Bestimmung des statischen Momentes der Größe $(y_s l')$ in bezug auf die x-Achse ihre Wirkungslinie um den Betrag $e = \frac{1}{12}\frac{h^2}{y_s}$ nach oben verschieben muß. Die Konstruktion dieses Betrages ist in Abb. 36 angegeben und in Abb. 35 benutzt worden.

In gleicher Weise wie das Trägheitsmoment J_y ist in Abb. 35 das Trägheitsmoment J_x bestimmt worden.

Auch die Konstruktion des Zentrifugalmomentes D_{xy} geht durch zweimalige Bestimmung von statischen Momenten vor sich; die erste liefert die Momente der Flächenteile in bezug auf die y-Achse, die zweite die Momente dieser statischen Momente in bezug auf die x-Achse. Es sei bemerkt, daß eine Korrektion, wie sie bei der Bestimmung der Trägheitsmomente notwendig erschien, für unser Beispiel bei der Konstruktion des Zentrifugalmomentes nicht erforderlich ist. Für das in Abb. 36 gezeichnete Rechteck gilt nämlich, wie man sich leicht überzeugt, $\int_F xy\,dF = x_s y_s F$.

Wie schon unter Ziff. 24 erörtert, genügt es, J_x, J_y, D_{xy} zu kennen, um in bezug auf jedes andere Paar zueinander senkrechter Geraden die entsprechenden Größen $J_{x'}, J_{y'}, D_{x'y'}$ berechnen zu können. Beschränken wir uns auf Geraden durch denselben Punkt S, und ist das neue Achsenkreuz $x'y'$ aus dem alten xy durch eine Drehung um den Winkel φ entstanden, so gelten die Beziehungen:

$$J_{x'} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\varphi - D_{xy}\sin 2\varphi,$$

$$D_{x'y'} = \frac{J_x - J_y}{2}\sin 2\varphi + D_{xy}\cos 2\varphi.$$

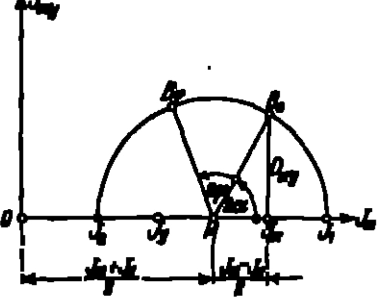


Abb. 37. Mohrscher Trägheitskreis.

Betrachtet man $J_{x'}$ und $D_{x'y'}$ als kartesische Koordinaten eines Bildpunktes B (vgl. Abb. 37), so erhält man als geometrischen Ort dieser Bildpunkte den sog. **Mohrschen Trägheitskreis**, dessen Gleichung durch Elimination von φ aus obenstehenden Beziehungen entsteht. Man findet

$$\left(J_{x'} - \frac{J_x + J_y}{2}\right)^2 + D_{x'y'}^2 = \left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2.$$

Der Kreis ist vollständig bestimmt durch einen seiner Punkte $B_0(J_x, D_{xy})$ und seinen Mittelpunkt M, dessen Koordinaten $\frac{J_x + J_y}{2}$, 0 sind. Den zu den Achsen $x'y'$ gehörenden Bildpunkt B_φ erhält man, indem man, im Drehsinne des Winkels φ, den Zentriwinkel B_0MB_φ gleich 2φ macht. Die beiden Hauptträgheitsmomente J_1, J_2 werden in den Abszissen der beiden Schnittpunkte des Trägheitskreises mit der x-Achse abgebildet. Ihre Werte sind gegeben durch

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2}.$$

Die Hauptträgheitsachsen schließen mit der x-Achse die Winkel $-\alpha$ und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ein, definiert durch (vgl. Abb. 37)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2D_{xy}}{J_x - J_y}.$$

52. Konstruktion des Kernumfanges einer ebenen Figur. Sind von einer ebenen Figur die beiden Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes bekannt, so

kann in einfacher Weise der sog. Kern dieser Figur konstruiert werden. Dieser Kern ist nämlich definiert als der geometrische Ort derjenigen Punkte, deren Antipolgeraden in bezug auf die Zentralträgheitsellipse den Umfang der betrachteten Figur berühren, ohne sie irgendwo sonst zu schneiden (vgl. Ziff. 27). Die Gleichung einer zu einem Punkte x_1, y_1 gehörenden Antipolgeraden in bezug auf die Ellipse $x^2/i_y^2 + y^2/i_x^2 = 1$ (vgl. Abb. 38) lautet

$$\frac{x x_1}{i_y^2} + \frac{y y_1}{i_x^2} + 1 = 0.$$

Die Stücke, welche diese Gerade von den Koordinatenachsen abschneidet, haben die Längen $a = -i_y^2/x_1$, $b = -i_x^2/y_1$. Zu einer vorgegebenen Geraden p kann der Antipol P also in der in Abb. 38 angegebenen Weise konstruiert werden.

In Abb. 39 ist der Kern für den Querschnitt des unter Ziff. 51 behandelten Winkeleisens gezeichnet, unter Benutzung des aus der Polarentheorie bekannten

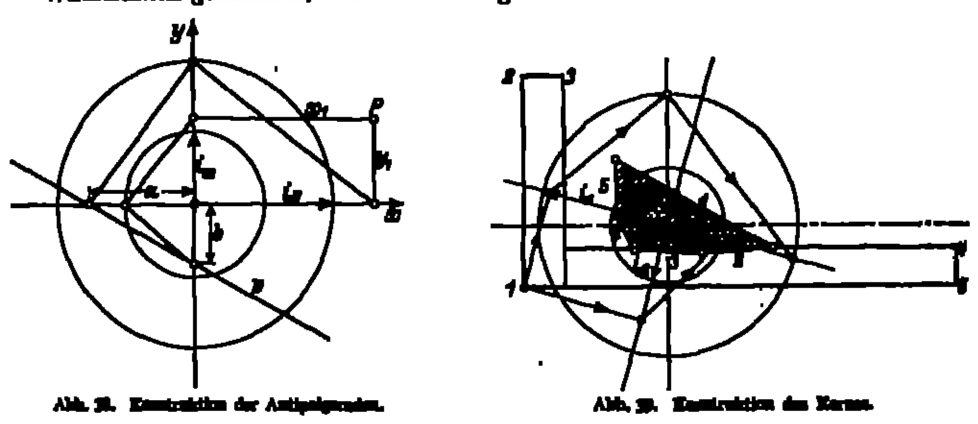


Abb. 38. Konstruktion der Antipolgeraden. Abb. 39. Konstruktion des Kernes.

Satzes, daß der Antipol einer sich um einen Punkt drehenden Geraden sich auf einer Geraden bewegt, welche die Antipolgerade des genannten Punktes ist.

52. Konstruktion der elastischen Linie eines statisch bestimmten Balkens. Wie in Bd. VI näher erläutert werden wird, lautet (unter Annahme des Hookeschen Gesetzes) die Differentialgleichung der elastischen Linie eines gebogenen Balkens mit anfänglich gerader Achse

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

Hierin bedeuten x und y Abszisse und Ordinate eines Punktes der elastischen Linie, E den Elastizitätsmodul des Balkenmaterials, J das auf die Biegungsachse des zu der Abszisse x gehörigen Querschnittes bezogene Trägheitsmoment und M das in bestimmter Weise mit einem Vorzeichen versehene Biegungsmoment desselben Querschnittes. Es ist dabei stillschweigend angenommen, daß die Hauptträgheitsachsen der verschiedenen Querschnitte in zwei Ebenen und die senkrecht zur Balkenachse wirkenden Kräfte alle in eine von diesen Ebenen fallen.

Weil die Form der Differentialgleichung übereinstimmt mit derjenigen der unter Ziff. 45 behandelten Gleichung für das Biegungsmoment, kann eine graphische Lösung dieser Gleichung nach MOHR dadurch erhalten werden, daß die Größe M/EJ als eine auf den Balken wirkende „Belastung" aufgefaßt und zu dieser Belastung eine „Momentenfläche" konstruiert wird.

Die Konstruktion, welche einer näheren Erläuterung kaum bedarf, ist für einen einfachen Fall in der Abb. 40 ausgeführt.

Als Längenmaßstab ist in Abb. 40a 1 cm = 200 cm, als Kraftmaßstab in Abb. 40b 1 cm = 0,25 t angenommen. Somit bedeutet in Abb. 40c, bei dem in der Abb. 40b angenommenen Polabstand $H_1 = 2$ cm, ein cm in vertikaler Richtung: 1 cm ↑ = $H_1 \cdot 200 = 100$ t·cm.

Vertritt die Ordinate der Momentenfläche nicht die Größe M, sondern M/EJ, so bedeutet 1 cm² aus der Momentenfläche

$$\frac{1 \cdot 200 \cdot 1 \cdot 100 \text{ t cm}^2}{EJ \text{ t cm}^2} = \frac{2 \cdot 10^4}{EJ}.$$

Wird zur Abbildung dieser „reduzierten" Momentenfläche in der zweiten Polfigur als Maßstab $1 \text{ cm} = \frac{4 \cdot 10^4}{EJ}$ eingeführt, so bedeutet bei einem Polabstand von H_2 cm (Abb. 40d) eine in vertikaler Richtung gemessene Einheitslänge der Abb. 40e in Wirklichkeit $200 \cdot 4 \cdot 10^4 H_2/EJ$ cm. Die Zahl $8 \cdot 10^6 H_2/EJ$ gibt also den Maßstab an, in welchem die Ordinaten der elastischen Linie gezeichnet worden sind. Ist dieser Maßstab vorgeschrieben (s), so ist der zweite Polabstand bestimmt durch

$$8 \cdot 10^6 \frac{H_2}{EJ} = s, \qquad H_2 = \frac{s EJ}{8 \cdot 10^6} \text{ cm}.$$

Abb. 40a—e. Konstruktion der elastischen Linie eines statisch bestimmten Balkens.

54. Konstruktion der Übergangsmomente eines statisch unbestimmten Balkens. Wir betrachten zunächst den Fall eines auf drei Stützen A, B, C gelagerten Balkens (vgl. Abb. 41a). Wird der Balken über dem mittleren Stützpunkt durchgeschnitten und werden in diesem Querschnitt die auf die beiden Balkenteile wirkenden Biegungsmomente M_B eingeführt, so kann nach MOHR für jeden Teil die Momentenfläche aufgefaßt werden als die Summe der von den gegebenen äußeren Kräften herrührenden und von dem betreffenden Moment M_B bedingten Momentenflächen. In der Abb. 41b sind bei bekannt gedachtem M_B diese Momentenflächen gezeichnet. Teilte man sie in der unter Ziff. 53 angegebenen Weise in Streifen, so könnte man ein die elastische Linie umhüllendes Seilpolygon konstruieren. Teilt man dagegen die Momentenfläche für jedes der Felder AB und BC in die zwei obengenannten Teile auf, so entsteht ein Seilpolygon, das gemäß Ziff. 32 mit dem ersteren nur noch die über A, B und C laufenden Seiten gemein hat und die elastische Linie in den Punkten A, B und C

Abb. 41a—c. Konstruktion der Übergangsmomente eines statisch unbestimmten Balkens.

tangiert. Es tritt in diesem Falle der Vorteil ein, daß die Wirkungslinien der in Frage kommenden Größen alle bekannt sind; ist doch die Schwerpunktslage der vom Moment M_B herrührenden dreieckigen Momentenflächen in horizontaler Richtung von vornherein bestimmt.

Man nimmt nun (vgl. Abb. 41c) einen willkürlichen, senkrecht unter *A* gelegenen Punkt *A'* an und betrachtet eine, ebenfalls willkürliche, durch diesen Punkt gezogene Gerade als Seite *I' II'* des soeben genannten Polygons. Stellt man die Forderung, daß die erste Seite durch den Punkt *A* gehen soll, so ist damit die Seite *0 I'* bestimmt. Weil die Strecke *AA'* das Moment der in die Wirkungslinie w_1 fallenden und durch *EJ* dividierten Momentenfläche in bezug auf die Gerade *AA'* bedeutet und also eine im voraus zu bestimmende Länge vorstellt, so ist außerdem für die vertikale Maßrichtung der Längenmaßstab festgelegt.

Die Seite *I' II'* bestimmt übrigens auch die Seite *II' III'*, weil diese, nach dem soeben Gesagten, durch den Punkt *B* hindurchgehen muß. Selbst die Seite *III' IV'* kann konstruiert werden, wenn man ins Auge faßt, daß *I' II'* und *III' IV'* sich in einem Punkt der „Resultierenden" der in w_2 und w_3 fallenden, von M_B bedingten Größen schneiden. Denn obwohl diese Größen selbst unbekannt sind, ist doch ihr Verhältnis durch den Quotienten $l_1 : l_2$ gegeben, so daß die Wirkungslinie der Resultierenden den Abstand $l_2/3$ von w_2 (bzw. $l_1/3$ von w_3) hat.

Die Seite *III' IV'* bedingt aber ihrerseits die Richtung der Seite *IV' V'*; denn weil die in w_4 fallende Größe bis auf den Faktor $1/EJ$ die für den zweiten Balkenteil bekannte Momentenfläche repräsentiert, so ist das statische Moment dieser Größe in bezug auf irgendeine vertikale Gerade (für welche wir gleich eine bestimmte Wahl treffen werden) bekannt, d. h. *III' IV'* und *IV' V'* schneiden von einer solchen Geraden ein Stück von bekannter Länge ab. Zugleich aber müßte die in Einklang mit dieser Forderung zu konstruierende Seite *IV' V'* durch den Punkt *C* gehen. Im allgemeinen wird dies natürlich nicht zutreffen, und unsere Aufgabe wird eben darauf hinauskommen, die Wahl der Seite *I' II'* derart zu treffen, daß der entstandene Widerspruch behoben wird.

Mit den verschiedenen möglichen durch *A'* gehenden Seiten *I' II'* korrespondieren nun die Tripel von Seiten *I' II'*, *II' III'* und *III' IV'*, welche alle als Seilpolygone der in die Wirkungslinien w_2 und w_3 fallenden Größen aufzufassen sind, und deren Elemente *I' II'* und *II' III'* je einen gemeinschaftlichen Punkt *A'* bzw. *B* aufweisen. Hieraus folgt aber (vgl. Ziff. 33), daß auch die Geraden *III' IV'* einen gemeinsamen Punkt *Q* haben, welcher auf der Geraden *A'B* liegt und bereits als Schnittpunkt von *A'B* und der in Abb. 41c gezeichneten Seite *III' IV'* erhalten worden ist. Dann hat aber auch die Seite *IV' V'* einen vorgeschriebenen Punkt *Q'*, wie aus der bereits erwähnten Tatsache folgt, daß *III' IV'* und *IV' V'* von jeder vertikalen Geraden, also auch von der durch *Q* gehenden Vertikalen ein Segment von vorgeschriebener Größe abschneiden.

Dieser Punkt *Q'* bestimmt also zusammen mit dem Punkt *C* die letzte Seite des gesuchten Polygons. Ist diese einmal bekannt, so kann in rückwärts schreitender Richtung das Polygon selbst leicht vervollständigt werden. Die Seite *IV III* muß nämlich durch *Q*, *III II* durch *B*, *II I* durch *A'*, *I 0* durch *A* gezogen werden.

Es ist nun ein leichtes, mit Hilfe des so konstruierten Seilpolygons das Moment M_B zu bestimmen. Schneidet man nämlich die Seite *I II* mit der Vertikalen durch *B* in den Punkt *B'*, so stellt *BB'* in bekanntem Maßstabe das Moment der von M_B bedingten, reduzierten Momentenfläche für das Balkenstück *AB* in bezug auf *BB'*, d. h. also $\frac{1}{6}\frac{M_B l_1^2}{EJ}$ dar. In Abb. 41c sind die Maßstäbe

so gewählt, daß die Strecke BB' das Moment M_B in demselben Maßstabe liefert, mit welchem die bekannten Momentenflächen in Abb. 41b eingeführt sind.

Die Konstruktion läßt in einfachster Weise eine Ausdehnung auf den Balken mit mehreren Stützen zu. Betrachtet man z. B. den in Abb. 42 gezeichneten Balken (bei dem die Momentenfläche des mittleren Feldes jetzt in drei Teile zerlegt worden ist) und führt man die für den in drei Punkten gestützten Balken gegebene Konstruktion aus, so findet man, daß ein Versuchspolygon bis an die Seite $III'\,IV'$ auch hier konstruiert werden kann, und daß also die Fixpunkte Q und Q' in derselben Weise bestimmt werden können. Damit ist aber ein Punkt Q' erhalten, der für die Bestimmung des zu den Feldern BC und CD gehörenden

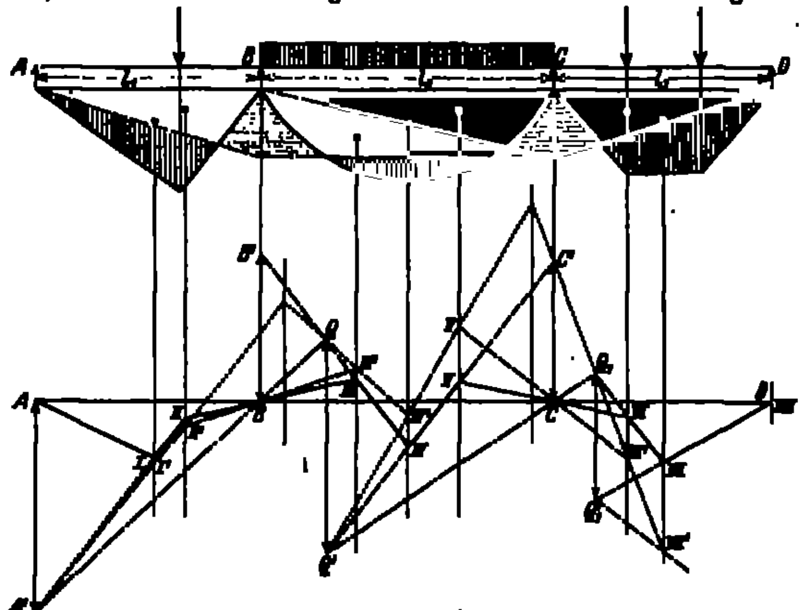


Abb. 42. Konstruktion der Übergangsmomente eines statisch unbestimmten Balkens.

Polygonzuges genau dieselbe Rolle spielt wie der Punkt A' bei dem Balken auf drei Stützen.

Ein Versuchspolygon $Q'\,IV'\,V'\,VI'\,VII'$ liefert nämlich in der früher besprochenen Weise als Schnitt der Geraden $Q'\,C$ und $VI'\,VII'$ einen Fixpunkt Q_1 für die Seite $VI'\,VII'$ und deshalb auch einen Punkt Q_1' für die Seite $VII\,VIII$, welche damit vollständig bestimmt ist.

Auch jetzt kann das gesuchte Seilpolygon in einfacher Weise rückwärts ergänzt werden.

Für den Fall, daß die Stützpunkte ungleich hoch liegen, müssen die Höhenunterschiede natürlich in dem für die vertikale Meßrichtung zur Verwendung kommenden Maßstabe im voraus in die Zeichnung eingetragen sein.

Ist der Balken nicht prismatisch (wie dies in den beiden vorangehenden Beispielen angenommen wurde), so müssen die Momentenflächen, welche zur Konstruktion des Seilpolygones dienen, unter Einführung eines Multiplikationsfaktors EJ_0/EJ umgezeichnet werden. Die neuen Momentenflächen können dann als zu einem prismatischen Balken (Steifigkeitsfaktor EJ_0) gehörend angesehen werden.

Ist bei einem Balken die Momentenfläche einmal vollständig bekannt, so kann seine elastische Linie natürlich in der unter Ziff. 53 angegebenen Weise

gezeichnet werden. Diese Konstruktion liefert eine wertvolle Kontrolle, weil diese Kurve von ihrer Schlußlinie in einer Anzahl von Punkten geschnitten werden muß, welche senkrecht unter den Stützpunkten des Balkens liegen.

55. Bestimmung der Übergangsmomente eines federnd gestützten Balkens. Die unter Ziff. 54 behandelte, nur für einen auf festen Stützpunkten gelagerten Balken geltende Konstruktion ist einer Verallgemeinerung für den federnd gestützten Balken fähig. Es würde zu weit führen, sie hier vollständig zu behandeln; wir beschränken uns deshalb auf den Spezialfall des dreifach gestützten Balkens, dessen Feldlängen gleich groß sind und dessen Stützfedern gleiche Steifigkeit haben[1] (Abb. 43).

Wir denken uns den Balken über B durchgeschnitten und versuchsweise in diesem Querschnitt ein Moment der Größe Null eingeführt. Einerseits sind

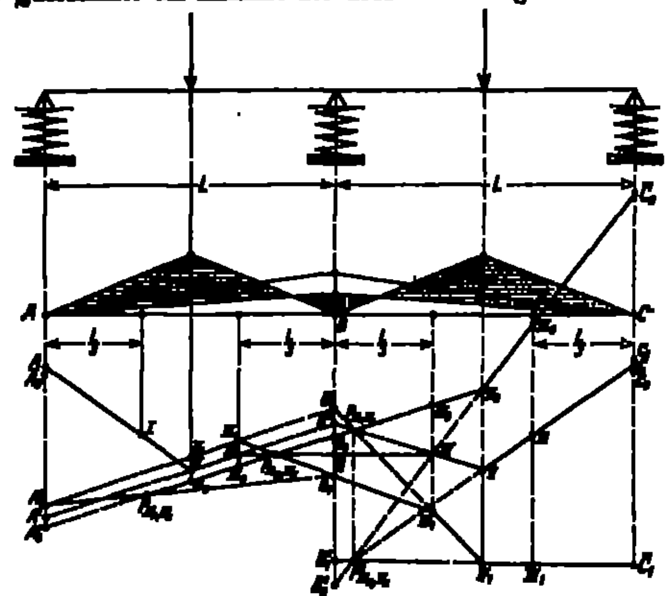


Abb. 43. Konstruktion der Übergangsmomente eines federnd gestützten Balkens.

dann die Federreaktionen, ebenso wie die ihnen proportionalen Federverkürzungen AA_0, BB_0, CC_0, direkt zu berechnen. Andererseits kann man ein Mohrsches Polygon $A_0\,II_0\,III_0\,B_0\,IV_0\,V_0\,VI_0\,\overline{C}_0$ zeichnen, wie es zu einem durchgehenden Balken gehört, dessen Punkte A und B mit A_0 und B_0 zusammenfallen, und dessen Querschnitt B unfähig ist, ein Biegungsmoment zu übertragen. Dabei tritt aber als Lage des Balkenendpunktes C der Punkt $\overline{C}_0$ zutage.

Führt man im Querschnitte B ein Biegungsmoment von willkürlicher Größe $M_B = z$ ein, so ist man in gleicher Weise imstande,

1. in statischer Weise die Federverkürzungen AA_z, BB_z und CC_z zu bestimmen,

2. mit Hilfe eines Mohrschen Seilpolygons die Lage $\overline{C}_z$ des Balkenendpunktes C anzugeben.

Für jeden Wert z des Momentes M_B erhält man in dieser Weise zwei Punkte C_z und $\overline{C}_z$, welche im allgemeinen verschieden sind. Nur für den wirklichen Wert des Momentes M_B fallen sie zusammen.

[1] Für den allgemeinen Fall sei verwiesen auf: C. B. Biezeno, Versl. Kon. Akad. Amsterdam Bd. 26, S. 908—919 u. 996—1004. 1917.

Weil die Punktreihen C_s und $\bar{C}_s$ gleichförmig sind, genügen zwei Paare korrespondierender Punkte, wie sie z. B. zu den Werten $M_s = 0$ und $M_s = 1$ gehören, um den im Endlichen gelegenen Doppelpunkt $\underline{C}$ dieser Reihen zu konstruieren. Sobald dieser Punkt bekannt ist, kann das zum gesuchten Moment M_s gehörende Seilpolygon $\underline{C}\ VI\ V\ IV\ III\ II\ I\ \underline{A}$ rückwärts konstruiert werden, weil, wie in elementarer Weise gezeigt werden kann, die Seiten $VI\ V$, $V\ IV$, $IV\ III$, ... bzw. durch Festpunkte $P_{IV_s V_s}$, $P_{IV_s V_s}$, $P_{III_s IV_s}$, ... hindurchgehen müssen, deren Lagen natürlich bestimmt sind als Schnitt der korrespondierenden Seiten derjenigen Polygone, welche zur Konstruktion der Punktepaare C_0, $\bar{C}_0$ und C_1, $\bar{C}_1$ zu zeichnen notwendig waren.

Auch die für den allgemeinen Fall eines mehrfach gelagerten Balkens gültige Konstruktion stützt sich auf den oben entwickelten Gedanken. Doch ist der Übergang vom besonderen zum allgemeinen Fall hier schwieriger als bei dem auf festen Stützpunkten gelagerten Träger, wie dies auch von vornherein nicht anders zu erwarten war. Wird doch das Problem des federnd gestützten Balkens statt von dem Dreimomentensatz vom sog. Fünfmomentensatz beherrscht.

In vielen praktisch vorkommenden Fällen ist übrigens der hier kurz angedeuteten Konstruktion eine andere vorzuziehen, welche nur die wiederholte Benutzung der unter Ziff. 53 behandelten elementaren Mohrschen Konstruktion erfordert. Der leitende Gedanke ist folgender[1]).

Die Zusammendrückung (oder Dehnung) der Federn und die Biegung des Balkens kommen durch einen Ausgleich zwischen den Federn und dem Balken zustande, den man sich in folgender Weise entstanden denken kann.

Es gebe vorläufig eines der beiden elastischen Gebilde, z. B. der Balken, nicht nach. Dann müssen sich die Federn so deformieren, daß ihre Endpunkte wieder in eine gerade Linie zu liegen kommen. Die dabei auftretenden Verrückungen der Auflagerpunkte $A_0, A_1, \dots A_{n+1}$ des Balkens, welche in einfacher Weise graphisch konstruiert werden können, deuten wir mit $y_0', y_1', \dots y_{n+1}'$ (allgemein mit y_i') an. Bleiben nun, nachdem sie sich in der obengenannten Weise verlängert oder verkürzt haben, die Federn vorläufig undeformierbar, unterwirft man sodann den jetzt wieder biegsam gedachten Balken dem äußeren Lastsystem und den aus den Größen y_i' folgenden Federreaktionen $k_i y_i'$ (k_i = Steifigkeitsfaktor der i-ten Feder), welche jenem das Gleichgewicht halten, und zeichnet schließlich mit Hilfe der unter Ziff. 53 besprochenen Konstruktion die elastische Linie, so wird es im allgemeinen unmöglich sein, diese Kurve über die n Federendpunkte zu führen.

Denkt man sich den Balken in seinem deformierten Zustand abermals steif, so wäre die Verbindung zwischen Federn und Balken, wenn nun die Federn wieder Deformationen erleiden könnten, in mancherlei Weise zu erzielen, etwa indem man den Federn derartige weitere Verlängerungen oder Verkürzungen erteilte, daß ihre Endpunkte auf eine mit der elastischen Linie kongruenten Kurve zu liegen kämen. Diesen Prozeß führen wir aber in einer ganz bestimmten Weise aus, und zwar so, daß die für die Federdeformationen erforderlichen Kräfte zusammen ein Gleichgewichtsystem bilden. Graphisch läuft dies darauf hinaus, daß man zu der gefundenen elastischen Linie des Balkens eine Nullinie derart zeichnet, daß die bis zu dieser Geraden gemessenen Abstände y_i'' der Punkte $A_0, A_1, \dots A_{n+1}$, multipliziert mit den Steifigkeitsfaktoren k_i der betreffenden Federn, ein Gleichgewichtsystem bilden. Die Konstruktion dieser Nullinie, welche in einfacher Weise vor sich geht, möge hier unterdrückt werden. Dagegen werde festgestellt, daß die Abstände y_i'' analytisch aus den Größen y_i' mittels

[1]) C. B. Biezeno, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 4, S. 93—102. 1924.

einer linearen Substitution hergeleitet werden. Bliebe der Balken in seinem deformierten Zustand wirklich steif, und gäbe man den Federn Gelegenheit, sich unter dem Einfluß der Kräfte $k_i y_i^j$ zu deformieren, so wäre (nach Hinzufügung der auf die Federn wirkenden Zusatzkräfte $k_i y_i^j$ und gleichzeitiger Einführung der auf den Balken wirkenden Reaktionskräfte $-k_i y_i^j$) eine Verbindung zwischen Federn und Balken möglich. In Wirklichkeit wird aber der Balken unter dem Einfluß der Kräfte $-k_i y_i^j$ eine neue Deformation erleiden, welche die eben erreichte Möglichkeit der Verbindung abermals zerstört. Man kann sie jedoch wieder herzustellen suchen, indem man aus den Größen y_i^j ein zweites System y_i^j in der eben beschriebenen Weise ableitet, die Federn mit den Kräften $k_i y_i^j$ und den Balken mit dem Gleichgewichtssystem $-k_i y_i^j$ belastet usw.

Wenn nun die Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} y_i^j$ $(i = 1, \ldots n+1)$ konvergieren, können die Federreaktionen R_i gleich

$$R_i = k_i \sum_{j=0}^{\infty} y_i^j$$

gesetzt werden.

Zur Aufstellung der Konvergenzbedingung braucht man zwei Systeme von sog. **Maxwellschen Einflußzahlen** α_{ij} und a_{ij}. Jede dieser Zahlen bedeutet in einem bestimmten elastischen System die (in diesem Falle lotrechte) Verschiebung des Punktes A_i infolge einer (in diesem Falle ebenfalls lotrechten) Einheitskraft im Punkt A_j. Die Größen α_{ij} beziehen sich auf den **elastischen** Balken, der **nur** in seinen Punkten A_0 und A_{n+1}, und zwar **nichtfedernd** gestützt ist. Die Größen a_{ij} dagegen werden am vollkommen steif gedachten Balken bestimmt, der in den Punkten A_0 und A_{n+1} von den dort anwesenden Federn **elastisch** gestützt wird.

Wird die horizontale Lage eines Stützpunktes A_i mit x_i angedeutet, so besagt die Konvergenzbedingung, daß der quadratische Ausdruck

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \alpha_{ij}) x_i x_j$$

definit positiv sein soll. Ist dagegen V definit negativ, so gilt eine Lösungsmethode, welche sich von der vorgehenden nur dadurch unterscheidet, daß die Rollen von Balken und Federn vertauscht sind. In diesem Falle fängt man also damit an, die Federn als vollkommen steif anzusehen und berechnet, mit Hilfe der unter Ziff. 54 behandelten Konstruktion, die dann auftretenden Lagerreaktionen. Alsdann erteilt man den Federn die Verlängerungen oder Verkürzungen, welche von diesen Kräften erzeugt werden und sucht durch Einführung eines zusätzlichen Systems von im Gleichgewicht stehenden Kräften, welche in den Punkten $A_0, A_1, \ldots A_{n+1}$ angreifen, den Balken derart zu biegen, daß er auf die Endpunkte der deformierten Federn gelegt werden kann. Die Federn werden durch die Reaktionsgrößen dieser Kräfte eine erneute Deformation erleiden, sodaß der Balken aufs neue gebogen werden muß usw.

Natürlich haben die geschilderten Methoden nur dann praktische Bedeutung, wenn für die Erzielung eines genügend genauen Ergebnisses nur einige wenige elastische Linien gezeichnet zu werden brauchen. Dieser Fall kann z. B. dadurch eintreten, daß die Größen y_i^j bereits bei kleinem j vernachlässigbare Werte annehmen. Aber auch wenn dies nicht der Fall ist, kann man unter Umständen mit nur wenigen Seilpolygonen auskommen. Wenn nämlich die entsprechenden Ordinaten zweier aufeinanderfolgender elastischer Linien mit den Zeigern m

und $m+1$ ein festes Verhältnis annehmen, so daß, wenn R_i^m und R_i^{m+1} die aus diesen Ordinaten folgenden Teilreaktionen vorstellen, die Gleichung

$$\frac{R_i^{m+1}}{R_i^m} = \nu = \text{konst.}, \qquad (i = 0, 1, \ldots n+1)$$

gilt, so gilt dieselbe Gleichung für jedes folgende Paar aufeinanderfolgender Seilpolygone:

$$\frac{R_i^{m+1+p}}{R_i^{m+p}} = \nu, \qquad (p \geq 0).$$

Der Beitrag zu den Reaktionen R_i, soweit dieser von den auf die $(m-1)$-te folgenden Iterationen geliefert wird, ist also (wenn $\nu < 1$)

$$R_i^m \frac{1}{1-\nu}.$$

Bei dem in Abb. 44 wiedergegebenen Beispiel tritt die Proportionalität zwischen den Ordinaten von zwei aufeinanderfolgenden Seilpolygonen bereits bei der zweiten und dritten Iteration auf, so daß nur die Werte R_i^0, R_i^1 und $R_i^2 \frac{1}{1-\nu}$ addiert werden müssen. In dem unteren Teil dieser Abbildung ist zu dem äußeren Lastsystem und den in dieser Weise bestimmten Reaktionen R_i die elastische Linie konstruiert. Die Nullinie ist derart eingetragen, daß die Federkräfte, welche aus den unter $A_0, A_1, \ldots A_3$ auftretenden Verschiebungen folgen, mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht stehen. Die zur Nachprüfung dienenden Federkräfte sind praktisch von den bereits erhaltenen nicht zu unterscheiden.

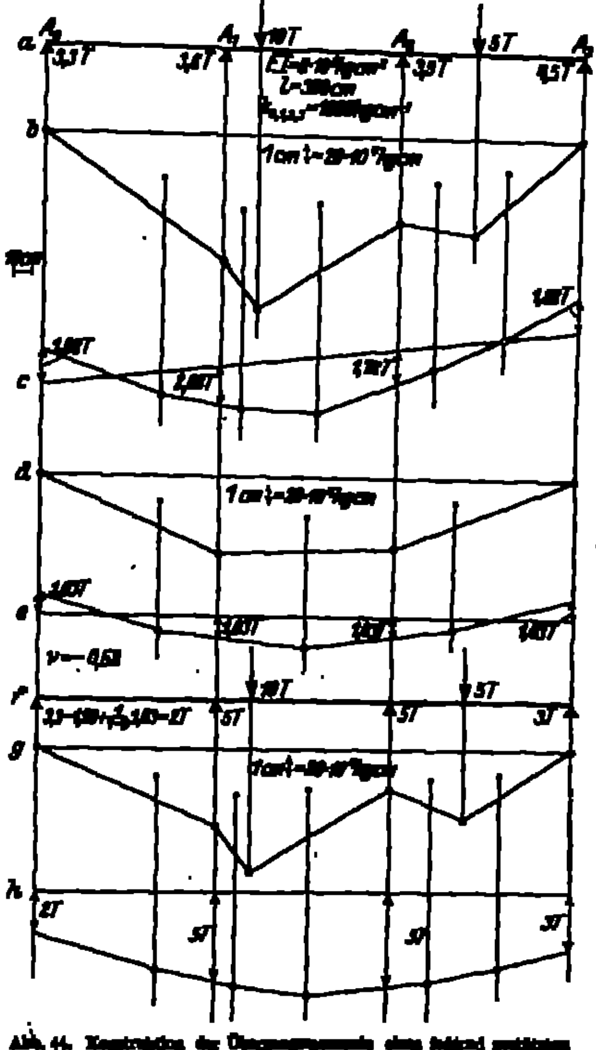


Abb. 44. Konstruktion der Übergangsmomente eines federnd gestützten Balkens.

Es sei übrigens nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die zuletzt besprochenen Methoden nicht allgemein gültig sind, und daß ihre Anwendungsmöglichkeit von der quadratischen Form V beherrscht wird (vgl. auch die Schlußbemerkung von Ziff. 56).

56. Bestimmung der elastischen Linie eines über seine ganze Länge elastisch gestützten Trägers. Die elastische Linie des über seine ganze Länge elastisch gestützten Balkens genügt (bei konstantem EI) der Differentialgleichung

$$EIy'''' + hy = q,$$

wo q die spezifische Belastung des Balkens und h die Bettungsziffer der elastischen Unterlage bedeutet. Diese Gleichung ist in bekannter Weise in eine Volterrasche Integralgleichung umzuformen, deren Lösung, unter Berücksichtigung der für den Balken geltenden Randbedingungen, in formeller Weise mit Hilfe einer

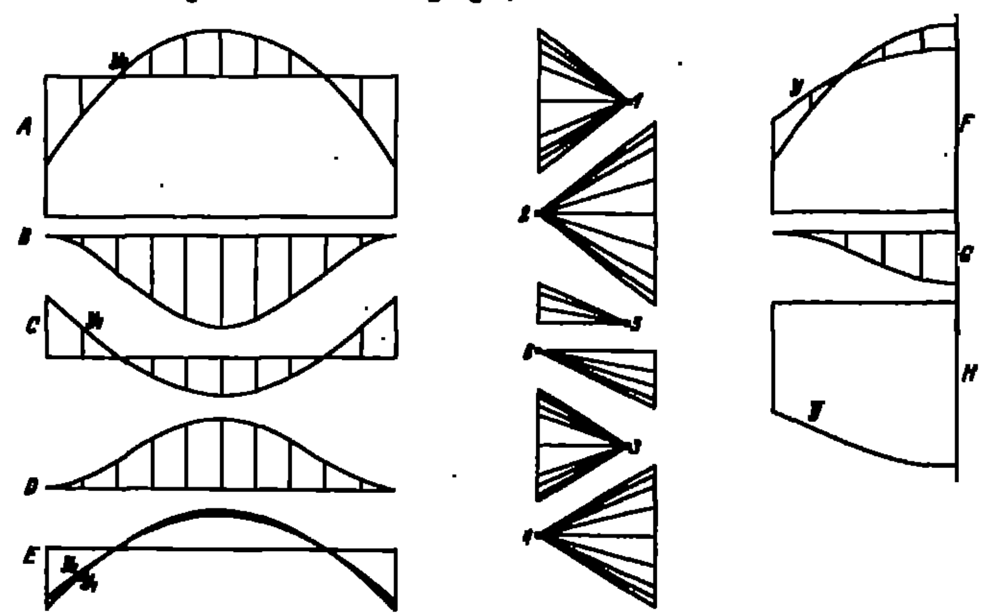


Abb. 45. Konstruktion der elastischen Linie eines über seine ganze Länge elastisch gestützten Balkens.

Iterationsmethode erhalten werden kann, welche als eine Modifikation der von Volterra selbst angegebenen zu betrachten ist[1]).

Es zeigt sich, daß die durch diese Methode definierten Iterationen identisch sind mit denjenigen, welche zu der zweiten der unter Ziff. 55 besprochenen Konstruktionen führte, so daß diese Konstruktion auch hier verwendet werden kann. Sie ist in Abb. 45 für eine parabelförmige q-Fläche ausgeführt. Man findet, daß bereits die Ordinaten der Kurven y_1 und y_2 einander proportional sind, so daß die gesuchte Durchbiegung y gleich

$$y = y_0 + y_1 + \frac{1}{1-\nu} y_2$$

gesetzt werden darf.

Wie Droste mit Hilfe der für die Fredholmsche Integralgleichung geltenden Theorie bewiesen hat[2]), ist der Gültigkeitsbereich des Verfahrens begrenzt durch die Bedingung

$$\frac{hl^4}{EI} < (2p_1)^4 \approx 500,$$

[1]) C. B. Biezeno, Versl. Kon. Akad. Amsterdam Bd. 32, S. 248. 1923.
[2]) J. Droste, Versl. Kon. Akad. Amsterdam Bd. 32, S. 270. 1923.

wo l die Länge des Balkens bedeutet und p_1 die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\mathfrak{Tg}\,p = -\operatorname{tg} p.$$

Es kann übrigens nachgewiesen werden, daß auch für den Fall $\nu > 1$, bei welchem also von einer Summation der Reihe $y_n(1 + \nu + \nu^2 + \cdots)$ nicht die Rede sein kann, die gesuchte Funktion y trotzdem annähernd durch

$$y = y_0 + y_1 + \cdots y_{n-1} + \frac{1}{1-\nu} y_n$$

dargestellt wird, wenn nur

$$\frac{kl^4}{EI} < 14600.$$

Eine analoge Bemerkung gilt für den in einzelnen Punkten elastisch gestützten Balken.

b) Fachwerke.

57. Definition des Fachwerkes und dessen kinematische und statische Bestimmtheit. Unter einem Fachwerk versteht man ein System von in ihren Endpunkten gelenkig miteinander verbundenen Stäben, welches nur bei Formänderung dieser Stäbe seine Gestalt zu ändern vermag. Die gelenkigen Verbindungen werden reibungsfrei gedacht, so daß in dem eben definierten Gebilde nur eine Idealisierung der in der Technik gebräuchlichen Kran-, Dach- und Brückenkonstruktionen zu sehen ist. Denn während in den wirklich ausgeführten Konstruktionen die Stäbe wegen der in den sog. Knotenpunkten auftretenden Nietverbindungen im allgemeinen eine Biegung erleiden, können sie in dem idealisierten Fachwerke nur Zug- oder Druckkräfte aufnehmen, vorausgesetzt wenigstens, daß die Belastung in den Knotenpunkten angreift, was wir in den nachfolgenden Untersuchungen stets annehmen wollen.

Aus der gegebenen Definition geht hervor, daß eine der wichtigsten Fragen beim Fachwerk diejenige nach seiner inneren Unbeweglichkeit ist. Kinematisch bestimmt nennt man dabei ein Fachwerk, bei welchem nicht nur endliche, sondern auch unendlich kleine relative Verrückungen der Knotenpunkte (unter Beibehaltung der Stablängen) ausgeschlossen sind, während Wegnahme eines einzelnen Stabes relative Bewegungen der Knotenpunkte ermöglicht. Ein Fachwerk, dessen Knotenpunktskonfiguration auch noch bei Wegnahme von einem oder von mehreren Stäben gesichert bleibt, nennt man ein kinematisch überbestimmtes Fachwerk. Ein Gelenksystem, bei dem (unter Beibehaltung der Stablängen) endliche oder unendlich kleine relative Bewegungen der Gelenke möglich sind, nennt man kinematisch unbestimmt.

Von gleicher Bedeutung wie die Frage nach der kinematischen Bestimmtheit ist diejenige nach der sog. statischen Bestimmtheit eines Fachwerks; diese Frage tritt bei der Ermittlung der in dem Fachwerk auftretenden Stabkräfte auf. Die belastenden Kräfte, welche, wie bereits erwähnt, nur in den Knotenpunkten angreifen, werden dabei als im Gleichgewicht stehend betrachtet. Dann müssen auch die in jedem einzelnen Knotenpunkt auftretenden Kräfte, d. h. also die äußeren Kräfte und die von den in dem Knotenpunkt zusammenkommenden Stäben ausgeübten Gelenkkräfte, im Gleichgewicht stehen. Sind k Knotenpunkte vorhanden, so liefert die letzte Forderung bei einem räumlichen Fachwerk $3k$, bei einem ebenen Fachwerk $2k$ Gleichgewichtsbedingungen. Aus ihnen kann man aber im ersten Falle sechs, im zweiten drei Gleichungen ableiten, welche mit den Gleichgewichtsbedingungen der äußeren Kräfte identisch sind, so daß nur $(3k-6)$ bzw. $(2k-3)$ Gleichungen zwischen den unbekannten Stabkräften übrigbleiben. Es sind nun die drei folgenden Fälle zu unterscheiden:

a) die Anzahl s der unbekannten Stabkräfte ist kleiner als die Zahl $(3k-6)$ bzw. $(2k-3)$,

b) die Anzahl der unbekannten Stabkräfte ist gleich $(3k-6)$ bzw. $(2k-3)$,

c) die Anzahl der unbekannten Stabkräfte ist größer als $(3k-6)$ bzw. $(2k-3)$.

Im Falle a) lassen die Gleichgewichtsbedingungen sicherlich nicht unter allen Umständen, und höchstens nur unter bestimmten, den äußeren Kräften aufzuerlegenden Bedingungen Lösungen zu, welche in diesem Falle noch ein- oder mehrdeutig sein können.

Im Falle b) nennt man das Fachwerk **statisch bestimmt**, wenn die Gleichungen bei **jeder** das Gleichgewicht verbürgenden Belastung die Stabkräfte in eindeutiger Weise liefern.

Im Falle c) können die unbekannten Stabkräfte sicherlich nicht mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen allein in eindeutiger Weise bestimmt werden. Das Fachwerk heißt in diesem Falle **statisch unbestimmt**. Die Behandlung des statisch unbestimmten Fachwerkes erfordert die Zuhilfenahme von elastostatischen Betrachtungen und wird deshalb an dieser Stelle beiseite gelassen.

Zu den beiden Fragen nach der kinematischen und statischen Bestimmtheit kommt schließlich die dritte Frage nach der praktischen Bestimmung der Stabkräfte bei vorgegebener Belastung. Wir gehen im folgenden kurz auf die drei genannten Probleme näher ein.

58. Die kinematische Bestimmtheit des Fachwerkes. Werden die Lagen der k Knotenpunkte eines räumlichen Fachwerkes auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ bezogen, so gilt für die Koordinaten von je zwei Punkten x_i, y_i, z_i und x_j, y_j, z_j, welche durch einen Stab von der Länge l_{ij} verbunden sind, eine Bedingung von der Form

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = l_{ij}^2. \tag{1}$$

Die Anzahl dieser Bedingungen stimmt mit derjenigen s der Stäbe überein. Nun ist zu beachten, daß es bei der Untersuchung der kinematischen Bestimmtheit eines Fachwerkes nur darauf ankommt, **relative** Bewegungen der Knotenpunkte auszuschließen; die Lage des Fachwerkes als Ganzes spielt also keine Rolle. Dies wird am einfachsten dadurch zum Ausdruck gebracht, daß man das Koordinatensystem mit der vom Fachwerk definierten Konfiguration verknüpft und zum Koordinatenanfang O einen der Knotenpunkte, zur xy-Ebene die Ebene von zwei in diesem Punkte zusammenstoßenden Stäben, zur x-Achse einen von diesen beiden Stäben wählt. Hiermit bekommen **sechs** Knotenpunktskoordinaten den Wert Null, so daß die soeben genannten s Gleichungen nur noch $(3k-6)$ Koordinaten x, y, z enthalten.

Soll das Fachwerk nun kinematisch bestimmt sein, so dürfen die Gleichungen (1) unter keinen Umständen eine unendliche Anzahl von Lösungen zulassen. Andererseits muß bei Wegnahme eines Stabes Beweglichkeit des Fachwerkes eintreten, d. h. bei Unterdrückung einer Gleichung müssen die übrigen $s-1$ Gleichungen eine unbestimmte Zahl von Lösungen aufweisen. Eine notwendige Bedingung für kinematische Bestimmtheit ist also $s = 3k-6$. Hinreichend ist diese Bedingung aber nicht; denn weil auch jede unendlich kleine relative Verschiebung der Knotenpunkte unter Beibehaltung der Längen l_{ij} ausgeschlossen sein soll, so dürfen die s Gleichungen

$$(x_i - x_j)(dx_i - dx_j) + (y_i - y_j)(dy_i - dy_j) + (z_i - z_j)(dz_i - dz_j) = 0,$$

welche aus den Gleichungen (1) durch vollständige Differentiation entstehen,

keine Lösung für die Größen $\delta x, \delta y, \delta z$ zulassen. Es muß also die Koeffizientendeterminante D dieser Gleichungen von Null verschieden sein.

Aus dem Vorangehenden folgt ohne weiteres, daß für $s < 3k - 6$ das Fachwerk kinematisch unbestimmt ist. Für $s > 3k - 6$ $(s = 3k - 6 + p)$ ist das Fachwerk im Falle, wo man nach Wegnahme von den p überzähligen Stäben ein kinematisch bestimmtes Fachwerk erhalten kann, kinematisch überbestimmt. Bleibt dagegen, wie auch die p überzähligen wegzulassenden Stäbe gewählt werden, stets ein kinematisch unbestimmtes Fachwerk zurück, so ist auch das gegebene Fachwerk selbst kinematisch unbestimmt.

59. Die Struktur des Fachwerkes. An die Untersuchung nach der kinematischen Bestimmtheit des Fachwerkes schließt sich diejenige nach seiner Struktur[1]) unmittelbar an. Für den Fall des räumlichen kinematisch bestimmten Fachwerkes erhält man zunächst für die mittlere Zahl $\bar{s}$ der in einem Knotenpunkt zusammenkommenden Stäbe:

$$\bar{s} = \frac{2s}{k} = \frac{6k - 12}{k} = 6 - \frac{12}{k}. \qquad (k \geq 4)$$

Nennt man einen Knotenpunkt, in welchem $n + 1$ Stäbe zusammenstoßen, einen n-fachen Knotenpunkt, so folgt aus dieser Beziehung der grundlegende Satz:

Jedes kinematisch bestimmte räumliche Fachwerk hat wenigstens einen zweifachen, dreifachen oder vierfachen Knotenpunkt. Insbesondere hat das kinematisch bestimmte Fachwerk von weniger als zwölf Knotenpunkten einen zweifachen oder dreifachen Knotenpunkt. Das kinematisch bestimmte räumliche Fachwerk von vier Knotenpunkten hat nur zweifache Knotenpunkte.

Hat ein kinematisch bestimmtes Raumfachwerk F einen zweifachen Knotenpunkt K, so bleibt nach Wegnahme der in ihm zusammenkommenden drei Stäbe ein kinematisch bestimmtes Fachwerk F' übrig. Umgekehrt erhält man in dem folgenden Satz ein Bildungsgesetz des Raumfachwerkes:

Aus einem kinematisch bestimmten Raumfachwerk F mit k Knotenpunkten erhält man ein kinematisch bestimmtes Fachwerk mit $k + 1$ Knoten durch Hinzufügung eines Knotenpunktes K und dreier Stäbe, welche den Punkt K mit drei bereits vorhandenen Knotenpunkten verbinden. Dabei dürfen die drei Stäbe nicht in einer Ebene liegen.

Aus einem kinematisch bestimmten Fachwerk F mit k Knotenpunkten, das einen dreifachen Knotenpunkt K hat, erhält man ein kinematisch bestimmtes Fachwerk mit $k - 1$ Knotenpunkten, wenn man die vier in K zusammenstoßenden Stäbe wegnimmt und zwischen zwei der übriggebliebenen Knotenpunkte, welche in dem so erhaltenen kinematisch unbestimmten Fachwerk einer relativen Lageänderung fähig sind, einen Stab einführt. Umgekehrt gilt das Bildungsgesetz:

Aus einem kinematisch bestimmten Fachwerk F mit k Knotenpunkten erhält man ein solches mit $k + 1$ Knotenpunkten, indem man den Stab zwischen zweien dieser Punkte (K_1 und K_2) wegnimmt, einen neuen Knotenpunkt K hinzufügt und diesen Punkt durch vier Stäbe mit K_1, K_2 und zwei weiteren bereits vorhandenen Knotenpunkten, welche nicht auf der Geraden $K_1 K_2$ liegen dürfen, verbindet. Dabei darf aber der Punkt K nicht auf einer bestimmten Grenzfläche zweiten Grades gewählt werden.

Hat schließlich das kinematisch bestimmte Fachwerk einen vierfachen Knotenpunkt K, der mit fünf anderen Knotenpunkten $K_1, \ldots K_5$ durch Stäbe verbunden ist, so kann das durch Wegnahme dieser Stäbe entstandene unverbundene

[1]) Man verdankt diese Strukturuntersuchungen L. Henneberg; vgl. sein bereits mehrfach zitiertes Lehrbuch: Statik der starren Systeme.

bestimmte Fachwerk wieder zu einem kinematisch bestimmten gemacht werden, indem zwischen den Knotenpunkten $K_1, \dots K_5$ in geeigneter Weise zwei Stäbe eingeführt werden.

Umgekehrt kann man aus einem kinematisch bestimmten Fachwerk F mit k Knotenpunkten ein solches mit $k+1$ Knotenpunkten herleiten, indem man zwei Stäbe zwischen den Punkten K_1, K_2, bzw. K_3, K_4 wegnimmt, einen Knotenpunkt K hinzufügt und diesen mit K_1, K_2, K_3, K_4 sowie mit einem fünften bereits vorhandenen Knotenpunkt K_5 verbindet. Die Punkte $K_1, \dots K_5$ dürfen dabei nicht in einer Geraden liegen, während der Punkt K, zur Vermeidung unendlich kleiner Beweglichkeit, außerhalb einer bestimmten Fläche vierten Grades gewählt werden muß.

Diesen sog. drei **Henneberg**schen **Bildungsgesetzen** kann noch das **Föppl**sche **Gesetz** an die Seite gestellt werden: Aus zwei kinematisch bestimmten räumlichen Fachwerken erhält man ein ebensolches drittes Fachwerk, wenn sechs Knotenpunkte des einen mit sechs Knotenpunkten des anderen verbunden werden durch Stäbe, welche nicht zu demselben linearen Komplex gehören.

Bei dem kinematisch bestimmten **ebenen** Fachwerke gelten analoge Sätze. Die mittlere Zahl $\bar{s}$ der in einem Knotenpunkt zusammenstoßenden Stäbe ist hier

$$\bar{s} = \frac{2(2k-3)}{k} = 4 - \frac{6}{k}, \qquad (k \geqq 3)$$

woraus folgt, daß ein ebenes kinematisch bestimmtes Fachwerk jedenfalls einen einfachen oder einen zweifachen Knotenpunkt hat.

Für das ebene Fachwerk gelten die folgenden Bildungsgesetze:

Aus einem kinematisch bestimmten ebenen Fachwerk mit k Knotenpunkten wird ein solches mit $k+1$ Knotenpunkten hergeleitet, indem man einen $(k+1)$-ten Knotenpunkt hinzufügt und diesen mittels zweier Stäbe mit zwei bereits vorhandenen Knotenpunkten K_1 und K_2 verbindet. Der Punkt K darf nicht auf der Verbindungsgeraden K_1K_2 liegen.

Aus einem kinematisch bestimmten ebenen Fachwerk mit k Knotenpunkten wird ein solches mit $k+1$ Knotenpunkten hergeleitet, indem man den zwischen zwei Knotenpunkten K_1 und K_2 liegenden Stab wegnimmt, einen neuen Knotenpunkt K einführt und diesen durch drei Stäbe mit K_1 und K_2 und einem dritten schon vorhandenen Knotenpunkt K_3 verbindet. Damit unendlich kleine Beweglichkeit des so entstehenden Fachwerkes ausgeschlossen ist, darf K aber nicht auf einem bestimmten Kegelschnitt, dem Grenzkegelschnitt, angenommen werden[1]).

Das Föpplsche Bildungsgesetz lautet für die Ebene wie folgt: Aus zwei kinematisch bestimmten ebenen Fachwerken wird ein ebensolches drittes erhalten, wenn drei Knotenpunkte des einen mit drei Knotenpunkten des anderen verbunden werden durch Stäbe, welche sich nicht in einem Punkt schneiden.

60. Die statische Bestimmtheit des Fachwerkes. Wie bereits unter Ziff. 57 erwähnt wurde, nennt man ein Fachwerk statisch bestimmt, wenn bei jeder (endlichen) Gleichgewichtsbelastung des Fachwerkes die Stabkräfte endlich sind und mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen in eindeutiger Weise bestimmt werden können.

---

[1]) Der bei dem ebenen Fachwerk auftretende Grenzkegelschnitt sowie die beim räumlichen Fachwerk genannten Grenzoberflächen sind näher behandelt worden von C. B. Biezeno, Nieuw Archief voor Wiskunde 1920, Tweede reeks, dertiende deel, blz. 210; H. Liebmann, Münchener Ber. 1920, H. 2.

Wird die Stabkraft in dem die Punkte x_i, y_i, z_i und x_j, y_j, z_j verbindenden Stab S_{ij} genannt und dabei eine Zugkraft als positiv, eine Druckkraft als negativ betrachtet, so lauten, wenn die Komponenten der im i-ten Knotenpunkt angreifenden äußeren Kraft mit X_i, Y_i, Z_i bezeichnet werden, die Gleichgewichtsbedingungen des i-ten Knotenpunktes

$$X_i = \sum_j \frac{x_i - x_j}{l_{ij}} S_{ij}, \qquad Y_i = \sum_j \frac{y_i - y_j}{l_{ij}} S_{ij}, \qquad Z_i = \sum_j \frac{z_i - z_j}{l_{ij}} S_{ij}, \tag{1}$$

wobei die Summation über die im betrachteten Knotenpunkt zusammenkommenden Stäbe zu erstrecken ist. Zur eindeutigen Bestimmung der Unbekannten S_{ij} ist es notwendig, daß die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen übereinstimmt mit derjenigen der Größen S_{ij}, woraus sich die Bedingung (vgl. Ziff. 57) $s = 3k - 6$ für ein Raumfachwerk bzw. $s = 2k - 3$ für ein ebenes Fachwerk ergibt.

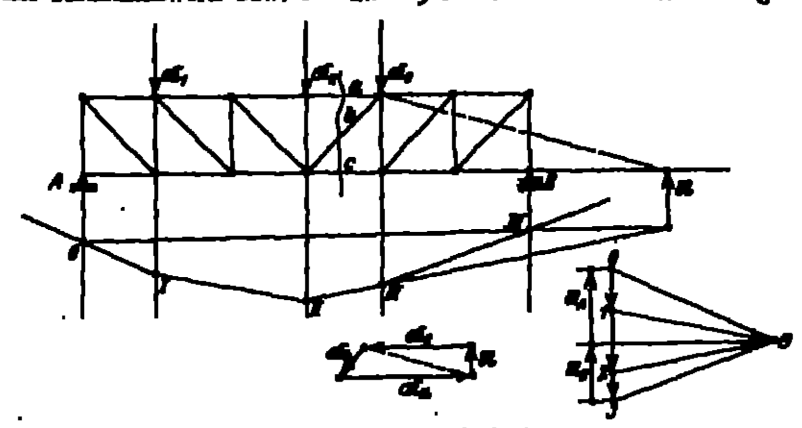


Abb. 46. Die Culmannsche Stabbestimmung.

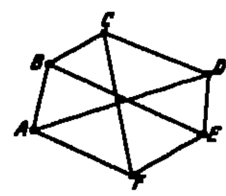
Außerdem muß aber noch, weil alle Stabkräfte endlich sein sollen, die Diskriminante des Gleichungssystems (1) einen von Null verschiedenen Wert aufweisen. Wie Föppl gezeigt hat, ist diese letzte Forderung gleichbedeutend mit der unter Ziff. 58 besprochenen Bedingung $D \neq 0$. Es folgt hieraus der wichtige Satz, daß ein Fachwerk zugleich kinematisch und statisch bestimmt ist, so daß schlechthin von bestimmten Fachwerken gesprochen werden kann.

61. Bestimmung der Stabkräfte in einem Fachwerk. Es mögen schließlich einige graphische Methoden angegeben werden, mit Hilfe deren man die Stabkräfte in einem bestimmten Fachwerk bei vorgegebener Belastung ermitteln kann. Wir beschränken uns dabei vorläufig auf ebene Fachwerke, und zwar auf diejenigen, welche man mit dem Namen Dreiecksfachwerke zu bezeichnen pflegt. Die Stäbe dieser Fachwerke bilden eine Reihe von aneinandergereihten Dreiecken, und zwar derart, daß jeder Stab höchstens als Seite zweier solcher Dreiecke auftritt.

In Abb. 46 ist ein Beispiel eines solchen Fachwerkes gegeben, an dem zugleich die sog. Schnittmethode von Culmann erläutert werden soll. Führt man durch die Stäbe a, b, c einen Schnitt und betrachtet man z. B. den rechten Teil des Fachwerkes, so müssen die drei in a, b und c wirkenden Stabkräfte den auf den betrachteten Teil wirkenden äußeren Kräften, deren Resultierende $\mathfrak{R}$ heiße, das Gleichgewicht halten. Man wird also zu der Aufgabe geführt, $\mathfrak{R}$ in drei Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien zu zerlegen; die gesuchten Stabkräfte sind nämlich, abgesehen vom Vorzeichen, diesen Komponen-

ten gleich. Diese Aufgabe ist schon unter Ziff. 57 nach dem Culmannschen Verfahren gelöst, so daß nicht weiter auf sie eingegangen zu werden braucht. Die Methode ist überall da verwendbar, wo es gelingt, das Fachwerk mittels eines Schnittes durch drei nicht in einem Punkt zusammenlaufende Stäbe in zwei getrennte Teile zu zerschneiden.

Sie findet ihr analytisches Gegenstück in der Schnittmethode von RITTER (vgl. Ziff. 9b). Auch hier wird ein Schnitt durch drei nicht in einem Punkt zusammenlaufende Stäbe a, b, c geführt und angenommen, daß das Fachwerk dann in zwei getrennte Teile zerfällt. Als Gleichgewichtsbedingungen dienen die Momentengleichungen, welche in bezug auf die drei Schnittpunkte von a, b und c aufgestellt werden können, so daß drei Gleichungen mit je einer Unbekannten erhalten werden. Sind zwei der durchgeschnittenen Stäbe einander parallel, so daß der von ihnen bestimmte Momentenpunkt ins Unendliche fällt, so geht die betreffende Momentengleichung in eine Komponentengleichung über, und zwar für die zu den beiden Stäben senkrechte Richtung.



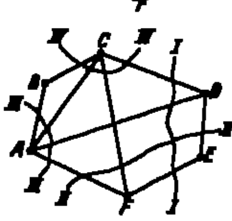


Abb. 47. Die Hennebergsche Stabvertauschung.

62. Die Methode der Stabvertauschung. Als Beispiel eines Fachwerkes, auf welches die vorangehenden Methoden nicht anwendbar sind, kann das in Abb. 47 angegebene gelten. In einem solchen Falle hilft oft eine einmalige sog. Stabvertauschung, bei welcher ein Stab aus dem Fachwerk weggenommen und durch einen anderen derart ersetzt wird, daß das neue Fachwerk erstens die erforderliche Struktur erhält und zweitens nach einer der vorangehenden Methoden behandelt werden kann. In dem vorgeführten Fall erfüllt man z. B. diese Bedingungen, indem man den Diagonalstab BE wegläßt und durch den Stab AC ersetzt. Für das neue Fachwerk können, bei willkürlicher Belastung, die Stabkräfte nach einer der beiden Schnittmethoden bestimmt werden, indem man nacheinander die Schnitte I, II, III und IV anbringt. Daß bei den letzten Schnitten mehr als drei Stäbe getroffen werden, schadet nicht, weil die Zahl der in Frage kommenden unbekannten Stabkräfte kleiner als drei ist.

Die Bestimmung aller Stabkräfte wird nun beim abgeänderten Fachwerk für zwei Belastungen ausgeführt, und zwar für die gegebene äußere Belastung und für zwei in B und E angreifende, sich das Gleichgewicht haltende Einheitskräfte. Nennt man die Stabkräfte, welche bei diesen beiden Belastungen im i-ten Stabe auftreten, bzw. S_i und S_i', so sind die Stabkräfte, welche im Fachwerke erzeugt werden, wenn außer der gegebenen äußeren Belastung in B und E noch zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte der Größe X angebracht werden,

$$S_i + X S_i'.$$

Wird mit X_0 der Wert von X bezeichnet, welcher die in AC auftretende Stabkraft zu Null macht, so sind die im ursprünglichen Fachwerk auftretenden Stabkräfte gleich $S_i + X_0 S_i'$ zu setzen. Für den Stab BE ist natürlich $S_i = 0$ und $S_i' = 1$.

Der hier vorgeführten Hennebergschen Methode kommt allgemeinere Bedeutung zu; sie ermöglicht es, ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der in einem bestimmten Fachwerk auftretenden Stabkräfte anzugeben[1]).

63. Die kinematische Methode zur Stabkraftbestimmung. Von MOHR und MÜLLER-BRESLAU ist eine Methode zur Stabkraftbestimmung entwickelt

[1]) L. HENNEBERG, Die Statik der starren Systeme.

worden, welche sowohl auf kinematischen Betrachtungen wie auf dem Prinzip der virtuellen Verrückungen beruht. Wird aus einem bestimmten Fachwerk ein Stab s_{ij} weggenommen und durch zwei auf das verbleibende Gelenksystem wirkende Kräfte S_{ij} ersetzt, so muß nach dem genannten Prinzip die Arbeit, welche von den auf das Gelenksystem wirkenden Kräften geleistet wird, wenn den Gelenken diejenigen virtuellen Verrückungen erteilt werden, welche mit der Beweglichkeit des verbliebenen Systems verträglich sind, den Wert Null haben. Weil die Gleichung, welche dies zum Ausdruck bringt, in den Verrückungen homogen ist, genügt es, Größen zu bestimmen, welche mit diesen Verrückungen proportional sind. Als solche sind natürlich die Geschwindigkeitsgrößen zu betrachten, welche bei einer unendlich kleinen Bewegung des Gelenksystems auftreten, wobei die Bewegung selbstverständlich so gewählt werden muß, daß relative Verschiebungen der Knotenpunkte entstehen. Die Frage ist damit zurückgeführt auf die Konstruktion eines zu einer kinematischen Kette gehörenden Geschwindigkeitsplanes[1]). Die Methode findet, weil sie nur eine Stab-

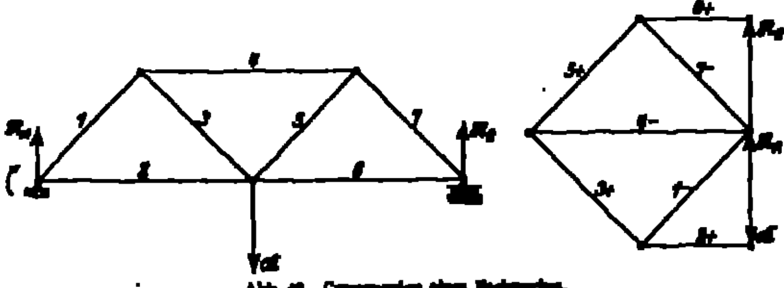


Abb. 48. Cremonaplan eines Fachwerks.

kraft liefert, hauptsächlich da Verwendung, wo nach Kenntnis einer einzigen Stabkraft die unter Ziff. 61 behandelten Schnittmethoden vollends zum Ziele führen.

64. Die Polygonalmethode; der Cremonaplan. Wie schon früher erwähnt, bilden die von den Stäben auf ein Gelenk ausgeübten Kräfte zusammen mit den auf dieses Gelenk wirkenden äußeren Kräften ein Gleichgewichtssystem. Wirken auf den betrachteten Knotenpunkt nur zwei unbekannte Stabkräfte, so können diese in leichtverständlicher Weise mit Hilfe eines Kräftepolygons bestimmt werden. Ein Fachwerk, bei welchem dieses Verfahren mit Nutzen angewendet wird, ist das in Abb. 48 gezeichnete Fachwerk, bei dem man vom Knotenpunkt A ausgehend nacheinander alle anderen Knotenpunkte in der angegebenen Weise behandeln kann.

Ein Nachteil dieser Methode ist aber, daß jede Stabkraft zweimal gezeichnet wird. Diesem Übel wäre abzuhelfen, wenn die zu den verschiedenen Knotenpunkten gehörenden Knotenpolygone zu einer einzigen Figur zusammengeschoben werden könnten, so daß jede Seite nur einmal in dieser Figur vorkäme. Für das in Abb. 48 gegebene Beispiel ist dies tatsächlich möglich. Die dabei auftretende Kraftfigur steht in einem sog. reziproken Zusammenhang mit der eigentlichen Fachwerkfigur und kann in einfacher Weise unter Berücksichtigung der nachfolgenden von CREMONA gegebenen Regeln konstruiert werden:

1. In dem Kräftepolygon sind die äußeren Kräfte in derselben Reihenfolge zu einem geschlossenen Vieleck einzuzeichnen, in welcher die Knotenpunkte der Fachwerkgurtung aufeinanderfolgen.

[1]) Vgl. Kap. 5 ds. Bd. des Handb.

2. Die Spannkraft S_{ij} in dem Gurtungsstab s_{ij} muß ausgehen von demjenigen Eckpunkt des soeben genannten Vielecks, in welchem die zu den Knotenpunkten i und j gehörenden äußeren Kräfte zusammenstoßen.

3. Die Spannkräfte in den Stäben eines Fachwerkfaches kommen in der Kräftefigur in einem Punkt zusammen. Werden je zwei solche Punkte, welche zu zwei benachbarten Fächern gehören, verbunden, so entsteht ein fortlaufender Linienzug, dessen Seiten die Diagonalspannkräfte liefert. Die Fachwerkfigur und die ihr so entsprechende Kräftefigur stehen in derselben Beziehung zueinander wie die Projektionen zweier, in bezug auf ein Nullsystem zueinander reziproken Polyeder, wenn diese auf eine Ebene senkrecht zur Achse des Nullsystems projiziert werden.

Die Frage, ob zu einem bestimmten Fachwerke immer in der eben umschriebenen Weise ein sog. Cremonaplan konstruiert werden kann, hängt also zusammen mit jener anderen, ob stets zwei in bezug auf ein Nullsystem zueinander reziproke Polyeder konstruiert werden können, wovon das eine bei Projektion auf eine zur Achse des Nullsystems senkrecht stehende Ebene das Fachwerk und die Wirkungslinien der äußeren Kräfte, das andere dagegen den gesuchten Kräfteplan liefert. Für Fachwerke besonderer Art ist diese Frage schon von CREMONA[1]) bejahend beantwortet worden. Wird die Fachwerkfigur ergänzt durch ein zu den äußeren Kräften gehörendes (und deshalb geschlossenes) Seilpolygon, der Kräfteplan durch die zu diesem Polygon gehörenden Polstrahlen, so sind die betreffenden Polyeder geschlossen und einander sowohl ein- wie umschrieben.

In ihrem vollen Umfang ist die Frage von F. SCHUR[2]) behandelt worden.

65. Bestimmung der Stabkräfte im Raumfachwerke. Bei der Bestimmung der in einem statisch bestimmten Raumfachwerke hervorgerufenen Stabkräfte wird man meistens von der analytischen Methode, welche das Gleichgewicht eines jeden Knotenpunktes in Betracht zieht, Gebrauch machen, dabei Rücksicht nehmend auf die spezielle Natur des Fachwerkes. An allgemeinen Methoden können hier die Methode der Stabvertauschung, die kinematische Methode (MÜLLER-BRESLAU) und schließlich die Methoden von MAYOR und v. MISES, nach welcher die Gleichgewichtsuntersuchungen am räumlichen Kraftsystem auf ebene Gleichgewichtsprobleme zurückgeführt werden, Erwähnung finden. Es ist nicht möglich, an dieser Stelle auf die Einzelheiten dieser Methoden einzugehen, so daß auch hier auf die Literatur verwiesen werden muß[3]).

---

[1]) L. CREMONA, Le figure reciproche nella statica grafica, 3. Aufl. Milano 1879.

[2]) F. SCHUR, Math. Ann. Bd. 48, S. 142. 1897; H. E. TIMERDING, Theorie der Kräftepläne. Leipzig 1910.

[3]) S. z. B. W. SCHLINK, Das Raumfachwerk. Leipzig und Berlin 1907. Ferner R. V. SOUTHWELL, Engineering 1920. S. 165.

Kapitel 7.

Kinetik der Massenpunkte.

Von

R. Grammel, Stuttgart.

Mit 29 Abbildungen.

I. Einleitung.

1. Die Bedeutung der Punktdynamik und des Massenpunkts. Die Punktdynamik beschäftigt sich mit dem Gleichgewichts- und Bewegungszustand von einzelnen punktförmigen (oder durch Punkte ersetzten) Massen oder von Systemen solcher Massenpunkte (Punkthaufen) unter dem Einfluß von Kräften, die entweder zwischen diesen Punkten wirken oder dem System von außen her eingeprägt sind. Die Untersuchung des Gleichgewichtszustandes der Punktsysteme (die Punktstatik) bildet einen Teil der Fachwerktheorie und ist bereits früher[1] erledigt worden. Die nunmehr zu behandelnde Punktkinetik umfaßt die Bewegungserscheinungen der Massenpunkte und verdankt ihre Entwicklung hauptsächlich der die Physik des 18. Jahrhunderts durchdringenden Vorstellung, daß alle Naturerscheinungen sich zurückführen lassen müßten auf Kräfte zwischen den punktförmig gedachten Atomen oder Molekülen. Obwohl diese mechanistische Denkweise, die im 19. Jahrhundert zur Theorie der mechanischen Modelle vertieft worden ist, heute als überwunden gilt, so beherrschen die Gesetze der Punktkinetik doch noch umfangreiche Teile der Physik, z. B. die Dynamik der Kristallgitter und der Atomphysik. Besonders wichtig aber ist die Punktkinetik für die Anwendungen der Mechanik geworden, nämlich einerseits für die Mechanik der Himmelskörper, andererseits für diejenigen Fragestellungen, die man durch Stichworte, wie Wurf, Fall, Pendel, kennzeichnen kann[2].

[1] S. Kap. 6, Ziff. 57ff. ds. Bd. des Handb.

[2] Die Punktkinetik in diesem Sinne ist natürlich in den meisten Lehrbüchern der allgemeinen Mechanik mehr oder weniger ausführlich dargestellt. Von neueren Lehrbüchern und von älteren, deren Darstellung auch heute noch in Betracht kommt, seien erwähnt: P. Appell, Traité de mécanique rationelle 2. Aufl., Bd. I, Paris 1902; M. Born, Vorlesungen über Atommechanik. Berlin 1925; C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. 2 Bde. Leipzig 1902/1907; A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik Bd. I, IV u. VI (zahlreiche Auflagen). Leipzig u. Berlin 1917/23; G. Hamel, Elementare Mechanik, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1922; H. Lamb, Higher mechanics. Cambridge 1920; H. Lamb, Dynamics. Cambridge 1923; T. Levi-Civita u. U. Amaldi, Lezioni di meccanica razionale. Bologna 1923; H. Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik 2. Aufl., Bd. I. Berlin 1924/26; A. E. H. Love, Theoretische Mechanik, deutsch von H. Polster. Berlin 1920; R. Marcolongo, Theoretische Mechanik, deutsch von H. E. Timerding Bd. II. Leipzig u. Berlin 1912; C. H. Müller u. G. Prange, Allgemeine Mechanik. Hannover 1923; M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. Leipzig 1923; O. Rausenberger, Lehrbuch der analytischen Mechanik Bd. I. Leipzig 1888; E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, deutsch von A. Schepp, 2 Bde. Leipzig 1898; W. Thomson u. P. G. Tait, Treatise on natural philosophy, 2. Aufl., 2 Bde. Cambridge 1879/83; A. G. Webster, The dynamics of particles usw., 3. Aufl. Leipzig 1925; E. T. Whittaker, Analytische Dynamik, deutsch von F. u. K. Mittelsten Scheid. Berlin 1924.

Solche Anwendungsmöglichkeit beruht wesentlich auf einer vernünftigen Bestimmung des Begriffs „Massenpunkt". Hiernach ist unter einem Massenpunkte nicht etwa ein mit Masse begabter mathematischer Punkt zu verstehen, sondern ein Körper von beliebiger Größe, für den jedoch mindestens eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt wird: entweder sollen alle Durchmesser des Körpers als vernachlässigbar klein gegen seine Entfernung von anderen zur Aufgabe gehörenden Körpern gelten, oder es soll jede Drehung des Körpers außer Betracht bleiben dürfen und nur die Bewegung seines Massenmittelpunktes (Schwerpunktes) als wesentlich angesehen werden. In diesem Sinne ist der Massenpunkt ein unentbehrliches Hilfsmittel der Approximationsmechanik, welche sich mit solchen Fehlern zufrieden gibt, die nur von der Größenordnung des Verhältnisses der vernachlässigten Körperdurchmesser zu den sonstigen vorkommenden Strecken sind oder von dem Einfluß der übersehenen Drehungen herrühren.

Man schreibt häufig der Punktmechanik noch eine weitere Bedeutung zu, indem man, von der diskreten Punktmenge zum stofflichen Kontinuum übergehend, aus den Gesetzen der Punktmechanik die Gesetze der starren, elastischen, flüssigen und luftförmigen Körper herleitet. Die Zulässigkeit einer derartigen Begründung der Mechanik der Kontinua ist jedoch neuerdings wiederholt mit Recht bestritten worden[1]).

2. Die Bewegungsgleichungen. Man unterscheidet für die Bewegungsgleichungen zwei Bildungsarten, die man kurz als die Eulersche und die Lagrangesche bezeichnen könnte. Die Eulersche Methode betrachtet die Bewegung des Massenpunktes von einem festgedachten Bezugspunkt O aus. Ist $\mathfrak{r}$ der Fahrstrahl von O nach der augenblicklichen Lage P des Punktes und also $\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}}$ der Geschwindigkeitsvektor, $\mathfrak{w} = \dot{\mathfrak{v}} = \ddot{\mathfrak{r}}$ der Beschleunigungsvektor (übergesetzte Punkte bedeuten Differentiationen nach der Zeit t), ferner m die Masse und also $\mathfrak{i} = m\mathfrak{v}$ der Impulsvektor des Punktes, endlich $\mathfrak{k}$ der Gesamtvektor der auf P wirkenden Kräfte, so besagt das Newtonsche Grundgesetz, der Impulssatz, daß $d\mathfrak{i}/dt = \mathfrak{k}$ ist, wofür man bei unveränderlicher Masse auch

$$m\mathfrak{w} = m\dot{\mathfrak{v}} = m\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{k} \tag{1}$$

schreiben kann.

Zerlegt man die Kraft $\mathfrak{k}$ in ihre Komponenten k_1, k_2 und k_3 nach der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Bahnkurve vom Krümmungshalbmesser ϱ, und desgleichen[2]) die Beschleunigung $\mathfrak{w}$ in $w_1 = \dot{v}$, $w_2 = v^2/\varrho$, $w_3 = 0$, so spaltet sich die Vektorgleichung (1) in die drei von EULER[3]) aufgestellten sog. natürlichen Bewegungsgleichungen

$$m\dot{v} = k_1, \qquad m\frac{v^2}{\varrho} = k_2, \qquad 0 = k_3, \tag{2}$$

denen man mit Hilfe der Bewegungsenergie $T = \frac{1}{2}mv^2$ auch die Gestalt geben kann

$$\frac{dT}{ds} = k_1, \qquad \frac{2T}{\varrho} = k_2, \qquad 0 = k_3. \tag{3}$$

Die Komponente k_2 ist also positiv gegen den Krümmungsmittelpunkt hin zu rechnen, und die Schmiegungsebene enthält den Vektor $\mathfrak{k}$.

---

[1]) Vgl. hierzu Kap. 4, Ziff. 26 ds. Bd. des Handb.; ferner G. HAMEL, Elementare Mechanik, 2. Aufl., Nr. 106. Leipzig u. Berlin 1922.
[2]) S. Kap. 5, Ziff. 6 ds. Bd. des Handb.
[3]) L. EULER, Mechanica sive motus scientia Bd. I, § 552. Petersburg 1736.

Die Zerlegung der Vektorgleichung (1) in einem kartesischen Koordinatensystem x, y, z, dessen Ursprung mit dem Bezugspunkt O zusammenfällt, liefert mit den Kraftkomponenten k_x, k_y, k_z die drei zuerst von MACLAURIN[1]) benutzten kartesischen Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = k_x, \qquad m\ddot{y} = k_y, \qquad m\ddot{z} = k_z. \tag{4}$$

Ist die Bewegung des Massenpunktes an bestimmte kinematische Bedingungen geknüpft (z. B. Führungen durch feste oder bewegte Flächen oder Kurven), so erweist es sich oft als zweckmäßig, von der Kraft $\mathfrak{k}$ diejenigen Teile abzusondern, die von solchen Führungen herrühren, und sie als sog. **Reaktionskräfte** $\mathfrak{k}^r$ den alsdann noch übrigbleibenden sog. **eingeprägten Kräften** $\mathfrak{k}^e$ gegenüberzustellen[2]). Als eingeprägt sind hierbei insbesondere alle Kräfte anzusehen, die von der physikalischen Beschaffenheit des durch den Massenpunkt dargestellten Körpers abhängen, also außer der Schwere oder elektrischen und magnetischen Kräften beispielsweise die Gleitreibungskraft; aber auch die durch Seile u. dgl. hervorgerufenen Kräfte sind eingeprägt. Die Reaktionskräfte sind bei eigentlicher Bewegung, also bei Ausschließung der Haftreibung, normal zur Führung gerichtet und von vornherein nicht bekannt; sie lassen sich jedoch aus den Bewegungsgleichungen ermitteln, sobald die Bewegung selbst gefunden ist. So dient von den natürlichen Gleichungen

$$m\dot{v} = k_t^e, \qquad m\frac{v^2}{\varrho} = k_n^e + k_n^r, \qquad 0 = k_b^e + k_b^r \tag{5}$$

die erste zur Bestimmung der Bewegung auf einer gegebenen Kurve unter dem Einfluß der Kraft $\mathfrak{k}^e$, wogegen die zweite und dritte dann die Komponenten k_n^r und k_b^r liefern. Ähnliches gilt bei der Bewegung auf einer Fläche, wo sich aus der zweiten und dritten Gleichung sowohl ϱ (also die Kurvenform) wie auch k_n^r und k_b^r ergeben, wenn man noch beachtet, daß ihre Resultante $\mathfrak{k}^r$ auf der Fläche senkrecht stehen muß.

Ist die Führungskurve in kartesischen Koordinaten durch die Gleichungen $f(x, y, z, t) = 0$, $g(x, y, z, t) = 0$ dargestellt, so lauten die Bewegungsgleichungen[3])

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= k_x^e + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= k_y^e + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\frac{\partial g}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= k_z^e + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\frac{\partial g}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Handelt es sich nur um eine Fläche $f = 0$, so fallen die Glieder mit μ fort. Die Größen λ und μ, die sog. **Lagrangeschen Multiplikatoren**, sind unbekannte Funktionen der Koordinaten und der Zeit und hängen in leicht ersichtlicher Weise mit den Komponenten der Reaktionskräfte zusammen. Wie schon angedeutet, gelten die Gleichungen (6) auch für den Fall, daß die Zeit t in den Gleichungen der Führungsgebilde vorkommt, d. h. daß diese sich selbst bewegen. Die Bedeutung der Gleichungen (6), die unter dem Namen der **Lagrangeschen Gleichungen erster Art** in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik eine große Rolle spielen, ist übrigens stark überschätzt worden: sie eignen sich nur selten zur Lösung wirklich vorkommender Aufgaben.

Die zweite auf LAGRANGE und HAMILTON zurückgehende Bildungsart der Bewegungsgleichungen der Punktmechanik beruht auf der Verwendung

---

[1]) C. MACLAURIN, A complete treatise on fluxions, Art. 465. 1742.
[2]) Vgl. hierzu Kap. 1, Ziff. 15 u. 18 ds. Bd. des Handb.
[3]) S. Kap. 2, Ziff. 8 ds. Bd. des Handb.

verallgemeinerter Lagekoordinaten q_i, verallgemeinerter Impulskoordinaten p_i und verallgemeinerter Kraftkoordinaten Q_i. Führt man noch die Bewegungsenergie T, die potentielle Energie V sowie die Hamiltonsche Funktion $H = \sum \dot{q}_i p_i - T + V$ ein, welche in vielen Fällen einfach gleich der Summe von Bewegungsenergie und potentieller Energie wird, so lauten unter bestimmten, bei den folgenden Anwendungen stets erfüllten Voraussetzungen[1]) die Bewegungsgleichungen entweder in der Lagrangeschen Form zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \tag{7}$$

oder in der von Hamilton stammenden kanonischen Form

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{8}$$

Handelt es sich um die Bewegung eines Punktes auf einer festen Fläche bzw. Kurve, so kann man es so einrichten, daß von den drei q_i eines bzw. zwei feste Werte behalten. Dann dienen zwei bzw. eine der drei Gleichungen (7) zur Ermittlung der Bewegung, wogegen die dritte bzw. die zwei anderen die Reaktionskräfte liefern.

Die kanonischen Gleichungen (8) sind wegen ihrer Kovarianz gegen bestimmte Transformationen [sog. kanonische Transformationen[2])] von hoher Bedeutung für die Lösung der schwierigeren Probleme der Punktdynamik geworden.

II. Die Freie Bewegung eines Massenpunktes.

3. Wurf und Fall ohne Luftwiderstand. Die sowohl geschichtlich wie wegen ihrer Bedeutung für die Ballistik und Astronomie wichtigsten Aufgaben der Punktmechanik betreffen die Wurf- und Planetenbewegung. Zunächst möge es sich um die Wurfbewegung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes handeln. Dieser Widerstand darf bei ungefähr kugelförmigen Körpern etwa in demselben Maße vernachlässigt werden, als die dimensionslose Größe $\frac{\gamma_0}{\gamma}\,\frac{v^2}{g d}$ klein gegen die Zahl 10 ist, wobei γ_0 und γ die spezifischen Gewichte der Luft und des Körpers, d dessen Durchmesser, v seine jeweilige Geschwindigkeit und g die Schwerebeschleunigung bezeichnen.

Der Wurf beginne im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, dessen x-Achse wagerecht in der Wurfebene und dessen y-Achse senkrecht aufwärts weise. Der Vektor der jeweiligen Geschwindigkeit v bilde mit der positiven x-Achse den Winkel φ, und es seien v_0 und φ_0 die Anfangswerte. Die Impulsgleichungen [Ziff. 2, Gleichung (4)] lauten

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g$$

und geben integriert, falls man die Veränderlichkeit der Schwerebeschleunigung g außer acht läßt,

$$\dot{x} = v_x = v_0 \cos\varphi_0, \qquad \dot{y} = v_y = v_0 \sin\varphi_0 - g t \tag{1}$$

sowie

$$x = v_0 t \cos\varphi_0,$$

$$y = v_0 t \sin\varphi_0 - \frac{g t^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\varphi_0 - v_y^2}{2g} = x \operatorname{tg}\varphi_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\varphi_0}. \tag{2}$$

[1]) S. Kap. 2, Ziff. 9 und Kap. 3, Ziff. 2 ds. Bd. des Handb.
[2]) S. Kap. 3, Ziff. 3 ds. Bd. des Handb.

Die Wurfbahn ist also eine nach unten offene **Parabel** mit lotrechter Achse. Der Symmetrie der Wurfbahn entspricht auch eine vollständige **Symmetrie der Bewegung** im auf- und absteigenden Aste der Bahn: die Geschwindigkeitsvektoren je zweier Bahnpunkte in gleicher Höhe sind dem Betrage nach gleich und bilden mit der positiven x-Achse entgegengesetzt gleiche Neigungswinkel φ.

Die **Wurfhöhe** (d. h. der Höhenunterschied des Scheitels gegenüber dem Anfangspunkt) ist

$$y_1 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi_0$$

mit dem bei senkrechtem Abschuß ($\varphi_0 = 90°$) erreichbaren Höchstwerte $y_{1\max} = v_0^2/2g$. Die **Wurfweite** (d. h. die Entfernung des Treffpunktes auf der durch den Anfangspunkt gelegten wagerechten Ebene vom Anfangspunkt) ist

$$x_2 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi_0$$

mit dem für $\varphi_0 = 45°$ erreichbaren Höchstwert $x_{2\max} = v_0^2/g$. Die **Wurfdauer** (d. h. die Zeit bis zur Erreichung jenes Treffpunktes) ist

$$t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin \varphi_0 .$$

Die Wurfdauer t_0, die zur Erreichung eines beliebigen Zieles x_0, y_0 erforderlich ist, gehorcht zusammen mit den Anfangswerten v_0 und φ_0 den Gleichungen

$$x_0 = v_0 t_0 \cos \varphi_0 , \qquad y_0 = v_0 t_0 \sin \varphi_0 - \frac{g}{2} t_0^2 . \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß der **Wurfbereich** zu gegebener Abschußgeschwindigkeit v_0 der konkave Innenraum eines Umdrehungsparaboloides mit lotrechter Achse ist, dessen Scheitel in der Höhe $y_{1\max}$ senkrecht über dem Abschußpunkt liegt, und welches die wagrechte Ebene durch den Anfangspunkt nach einem um diesen geschlagenen Kreise vom Halbmesser $x_{2\max}$ schneidet. Jedes Ziel x_0, y_0 innerhalb dieses Wurfbereiches kann mit **zwei** Werten der Elevation φ_0 erreicht werden (**Flachschuß** und **Bogenschuß**). Liegt das Ziel x_0, y_0 auf der Grenze des Wurfbereiches, so gibt es nur **einen** Wert der Elevation φ_0. Alle zu gleicher Anfangsgeschwindigkeit gehörenden Wurfparabeln berühren die Grenze des Wurfbereiches (allerdings zum Teil erst unterhalb der wagerechten Ebene des Anfangspunktes); ihre Leitlinien liegen alle in einer wagerechten Ebene von der Höhe $y_{1\max}$ (Leitebene); ihre Scheitelpunkte liegen auf einem Rotationsellipsoid mit lotrechter Achse, welches die Leitebene berührt, durch den Abschußpunkt geht und einen Äquatorkreis vom Halbmesser $y_{1\max}$ besitzt. Die Geschwindigkeit ist in jedem Punkte so groß wie diejenige, die ein von der Leitebene bis ebendahin frei fallender Massenpunkt erreicht hätte. Der geometrische Ort aller vom selben Anfangspunkt aus mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit v_0 gleichzeitig geworfenen Punkte ist eine Kugel, deren Mittelpunkt sich jeweils an der Stelle befindet, die ein vom Anfangspunkt aus frei fallender Massenpunkt inzwischen erreicht hätte, und deren Halbmesser sich mit der Geschwindigkeit v_0 vergrößert.

Hält man dagegen die Anfangselevation φ_0 fest und variiert die Abschußgeschwindigkeit v_0, so folgt aus den Gleichungen (3): Der **Wurfbereich** ist ein gerader Kreiskegel mit lotrechter Achse, dessen Spitze im Abschußpunkt liegt, und dessen Erzeugende die Neigung φ_0 besitzen. Jedes Ziel x_0, y_0 innerhalb dieses Wurfbereiches kann mit **einem** Wert von v_0 erreicht werden. Die

Scheitelpunkte aller Wurfparabeln liegen jetzt auf einem geraden Kreiskegel mit lotrechter Achse, dessen Spitze der Abschußpunkt ist, und dessen Erzeugende die Neigung arc tg ($\frac{1}{2}$ tg φ_0) besitzen. Der geometrische Ort aller vom selben Anfangspunkt aus mit gleicher Elevation φ_0 gleichzeitig geworfenen Punkte ist ein gerader Kreiskegel mit lotrechter Achse, dessen Spitze sich jeweils an der Stelle befindet, die ein vom Anfangspunkt aus frei fallender Massenpunkt inzwischen erreicht hätte, und dessen Erzeugende die Neigung φ_0 besitzen[1]).

Im vorausgehenden sind insbesondere die Gesetze des senkrechten Wurfs auf- und abwärts mit $\varphi_0 = \pm 90°$ sowie diejenigen des freien Falls mit $v_0 = 0$ enthalten.

4. Wurf und Fall mit Luftwiderstand. Behält man die bisherigen Bezeichnungen bei und beobachtet, daß die vom Luftwiderstand hervorgerufene Verzögerung $-f(v)$ erfahrungsgemäß von Form und Geschwindigkeit v des fliegenden Körpers abhängt, so lauten die Bewegungsgleichungen entweder in natürlichen Komponenten [Ziff. 2, Gleichung (2)]

$$\dot{v} = -g \sin\varphi - f(v), \qquad \frac{v^2}{\varrho} = g\cos\varphi, \tag{1}$$

oder in kartesischen Komponenten

$$\dot{v}_x = -f(v)\cos\varphi, \qquad \dot{v}_y = -g - f(v)\sin\varphi. \tag{2}$$

Da mit dem Bogenelement ds die stets positive Krümmung $\frac{1}{\varrho} = -\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\dot{\varphi}}{v}$ wird, so kann man der zweiten Gleichung (1) auch die Gestalten geben

$$v^2 \frac{d\varphi}{ds} = -g\cos\varphi \quad \text{oder} \quad v\frac{d\varphi}{dt} = -g\cos\varphi. \tag{3}$$

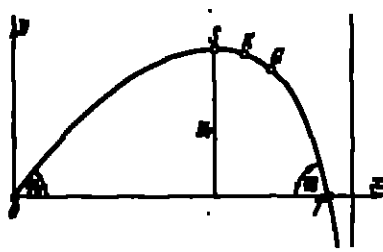
Hieraus läßt sich vollends leicht auch folgende Gleichung gewinnen:

$$g\frac{d}{d\varphi}(v\cos\varphi) = v f(v), \tag{4}$$

oder in etwas anderer Form

$$\frac{dw}{dz} = \mathfrak{Tg}\, z + F(w), \tag{5}$$

wo $w = \ln v$, $z = \mathfrak{ArTg}(\sin\varphi)$ und $F(w) = f(v)/g$ gesetzt ist. Man nennt (4) bzw. (5) die **ballistische Hauptgleichung.**


Abb. 1. Wurfbewegung mit Luftwiderstand.

Aus diesen Gleichungen können von vornherein, unabhängig von der expliziten Form der jedenfalls wesentlich positiven Widerstandsfunktion $f(v)$, folgende Schlüsse gezogen werden[2]) (Abb. 1): Der Scheitelpunkt S der Flugbahn liegt dem Treffpunkt T näher als dem Anfangspunkt O; der Auffallwinkel ψ_0 ist größer als der Abschußwinkel φ_0; die Scheitelhöhe y_1 liegt innerhalb der Grenzen $\frac{1}{2}x_2 \operatorname{tg}\varphi_0 < y_1 < \frac{1}{2}x_2 \operatorname{tg}\psi_0$, wo x_2 die Schußweite ist; der aufsteigende Ast OS ist länger als der absteigende ST, wird aber in kürzerer Zeit durchflogen

[1]) Über weitere Eigenschaften der Wurfparabeln s. C. CRANZ, Lehrbuch der Ballistik. 5. Aufl. Bd. I, § 4, 5 u. 7. Berlin 1925.
[2]) C. CRANZ, Lehrbuch der Ballistik 5. Aufl., Bd. I, § 20.

als dieser; die wagerechte Komponente v_x der Bahngeschwindigkeit nimmt dauernd ab, die lotrechte Komponente v_y nähert sich auf dem absteigenden Aste einer durch die Gleichung $f(v_\infty) = g$ bestimmten Grenze v_∞, die sie nicht überschreiten kann, und der absteigende Ast besitzt in der endlichen Entfernung

$$x^* = \frac{1}{g}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0} v^2\, d\varphi$$

von O eine lotrechte Asymptote; auf dem aufsteigenden Aste ist die Geschwindigkeit v größer als in dem gleich hohen Punkte des absteigenden Astes, die Neigung φ dagegen geringer; die kleinste Geschwindigkeit $v_{\min}$ tritt in einem Punkte G auf, der hinter dem Scheitel S auf dem absteigenden Aste liegt; ihre kleinste Krümmung besitzt die Flugbahn in einem Punkte K, der zwischen S und G liegt; und zwar gehorchen die Punkte G bzw. K gemäß (1) und (3) der Gleichung

$$f(v) = -g\sin\varphi \qquad \text{bzw.} \qquad f(v) = -\tfrac{1}{2}g\sin\varphi .$$

Die Integration der Gleichungen (1) bis (5) bildet den wesentlichen Inhalt der sog. äußeren Ballistik[1]). Ist keine sehr große Genauigkeit gefordert, so kommt man mit einem quadratischen Widerstandsgesetz $f(v) = \varkappa v^2$ aus, unter $\varkappa$ eine noch von der Geschoßform und der Luftdichte abhängige Größe (reziproke Länge) verstanden, die auf der Flugbahn als unveränderlich angesehen werden darf[2]). Für die Größe $\varkappa$ kann man den Ansatz machen

$$\varkappa = \frac{\zeta}{l}\,\frac{\gamma_h}{\gamma},$$

wo l die Geschoßlänge und ζ ein Zahlenfaktor ist, der beispielsweise für Kruppsche Normalgeschosse bei Geschwindigkeiten unterhalb der Schallgeschwindigkeit den Wert 0,11 hat, in der Nähe der Schallgeschwindigkeit stark ansteigt und sich bei sehr großen Geschwindigkeiten dem Werte 0,32 nähert.

Das von EULER[3]) stammende, geistreiche Integrationsverfahren geht von der ersten Gleichung (2) aus, die, auf die Form $dv_x = -\varkappa v_x\, ds$ gebracht, das erste Integral

$$v_x = v_0 \cos\varphi_0 \cdot e^{-\varkappa s} \tag{6}$$

liefert. Führt man die neue Veränderliche $p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ mit dem Anfangswert $p_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$ ein, so wird $v_y = p v_x$, und mithin nimmt die zweite Gleichung (2), wenn man noch die mit p multiplizierte erste Gleichung (2) von ihr abzieht, die Form an

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{g}{v_x}. \tag{7}$$

Beachtet man, daß $\frac{1}{dt} = \frac{v}{ds} = \frac{v_x}{dx}\sqrt{1+p^2}$ ist, und setzt man den Wert von v_x aus (6) ein, so lautet das erste Integral von (7)

$$\Phi(p) - \Phi(p_0) = \frac{g}{\varkappa v_0^2 \cos^2\varphi_0}\left(1 - e^{2\varkappa s}\right), \tag{8}$$

[1]) Ausführliches Literaturverzeichnis in dem angeführten Buche von CRANZ. Über die Messung der Geschoßgeschwindigkeit vgl. ds. Handb. Bd. II, Kap. 7.

[2]) Vgl. ds. Handb. Bd. VII, Kap. 2 u. 5 sowie C. CRANZ, Ballistik, § 10.

[3]) L. EULER, Berl. Ber. Bd. 9, S. 321. 1755.

wo zur Abkürzung mit

$$\Phi(p) = 2\int \sqrt{1+p^2}\,dp = p\sqrt{1+p^2} + \ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)$$

eine von EULER tabellierte Funktion bezeichnet ist. Bildet man aus $\Phi(p)$ die Funktion

$$\Psi(p) = \Phi(p_0) + \frac{g}{\varkappa v_0^2 \cos^2\varphi_0} - \Phi(p),$$

so lassen sich die zweiten Integrale der Bewegungsgleichungen sofort angeben. Zunächst folgt aus (6) bis (8) die Flugzeit

$$t = \frac{1}{\sqrt{g\varkappa}}\int_p^{p_0} \frac{dp}{\sqrt{\Psi(p)}} \tag{9}$$

als Funktion des Parameters p, dann aus $dx = v_x dt$ und $dy = p\,dx$ die Koordinaten der Flugbahn

$$x = \frac{1}{\varkappa}\int_p^{p_0} \frac{dp}{\Psi(p)}, \qquad y = \frac{1}{\varkappa}\int_p^{p_0} \frac{p\,dp}{\Psi(p)} \tag{10}$$

und schließlich aus $v = v_x\sqrt{1+p^2}$ die Fluggeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{g}{\varkappa}\,\frac{1+p^2}{\Psi(p)}}\,.$$

Da die Integrale (9) und (10) sich in geschlossener Form nicht auswerten lassen, so ersetzt man die Differentiale dt, dx, dy, dp durch endliche Differenzen und berechnet so die Flugbahn schrittweise.

Für sehr flache Schußbahnen darf man s mit x verwechseln und p^2 gegen 1 vernachlässigen und erhält dann aus (6) und (7) angenähert

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g e^{2\varkappa x}}{v_0^2\cos^2\varphi_0}$$

mit dem Integral

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2\cos^2\varphi_0}\left[1 + \mathfrak{K}(\varkappa x)\right], \tag{11}$$

wo

$$\mathfrak{K}(\varkappa x) = \frac{e^{2\varkappa x} - 2\varkappa^2 x^2 - 2\varkappa x - 1}{2\varkappa^2 x^2}$$

eine mit $\varkappa = 0$ verschwindende Funktion bedeutet. Der Vergleich von (11) mit der Bahngleichung des widerstandsfreien Wurfs [Ziff. 3, Gleichung (2)] zeigt den durch $\mathfrak{K}$ ausgedrückten Einfluß des Luftwiderstandes auf die Gestalt der Bahn.

Will man höhere Genauigkeiten erreichen, so muß man statt des einfachen quadratischen Widerstandsgesetzes ein wesentlich verwickelteres, in der Regel nur tabellarisch gegebenes Gesetz der Integration zugrunde legen und ist dann gezwungen, von Anfang an die Methoden der Differenzenrechnung anzuwenden. Man geht etwa von der Hauptgleichung (4) aus und schreibt sie als Differenzengleichung in der Form $\Delta v_x = F\left(\frac{v_x}{\cos\varphi}\right)\Delta\varphi$, aus der man dann schrittweise die Geschwindigkeitskomponente v_x und damit auch $v = \frac{v_x}{\cos\varphi}$ als Funktion von φ ermittelt. Weiter ist durch die zweite Gleichung (1) der Krümmungshalbmesser der Bahn $\varrho = \frac{v^2}{g\cos\varphi}$ bestimmt, und diese kann vollends rasch aus lauter Kreisbögen mit Halbmessern ϱ und Zentriwinkeln $\Delta\varphi$ stetig zusammengesetzt werden.

Hinsichtlich der zahlreichen Näherungslösungen, welche die Ballistik zur Umgehung der ziemlich mühsamen Differenzenrechnung ausgebildet hat, und von denen namentlich die analytische von SIACCI und die an die Hauptgleichung (5) anknüpfende graphische von CRANZ und ROTHE hervorgehoben zu werden verdienen, ferner hinsichtlich der mannigfachen Verbesserungen, die dann schließlich noch an den Ergebnissen anzubringen sind, muß auf die zitierte Literatur verwiesen werden. Hier möge nur noch angeführt sein, daß (entgegen einem viel verbreiteten Irrtum) der Abgangswinkel φ_0, der zur größten Schußweite führt, bei großen Anfangsgeschwindigkeiten sehr wohl über 45° liegen kann.

Für den **senkrechten Wurf** und den **freien Fall** lassen sich die Quadraturen unter der Voraussetzung des quadratischen Widerstandsgesetzes vollständig ausführen. Man hat nämlich für den freien Fall, wenn man jetzt v und y positiv abwärts rechnet, statt der ersten Gleichung (1) $dv = (g - \varkappa v^2)\,dt$, woraus sogleich

$$v = \sqrt{\frac{g}{\varkappa}}\,\mathfrak{Tg}\left(t\sqrt{g\varkappa}\right), \qquad y = \frac{1}{\varkappa}\ln\mathfrak{Cof}\left(t\sqrt{g\varkappa}\right) = \frac{1}{2\varkappa}\ln\frac{1}{1 - v^2\frac{\varkappa}{g}} \tag{12}$$

folgt. Die Grenzgeschwindigkeit hat den endlichen Betrag $v_\infty = \sqrt{g/\varkappa}$. Ebenso läßt sich die Differentialgleichung des senkrechten Wurfes nach oben $dv = -(g + \varkappa v^2)\,dt$ behandeln und gibt insbesondere die Steigdauer t_1 und die Steighöhe y_1 zu

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{g\varkappa}}\operatorname{arctg}\left(v_0\sqrt{\frac{\varkappa}{g}}\right), \qquad y_1 = \frac{1}{2\varkappa}\ln\left(1 + v_0^2\frac{\varkappa}{g}\right). \tag{13}$$

Der Vergleich der letzten Formeln (12) und (13) zeigt, daß ein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 aufwärts geworfener Körper mit der Geschwindigkeit

$$v = v_0\sqrt{\frac{1}{1 + v_0^2\frac{\varkappa}{g}}} < v_0$$

zur Abwurfstelle zurückkommt.

Schließlich mag noch erwähnt sein, daß für sehr kleine fallende Körperchen der Luftwiderstand proportional zur ersten Potenz der Geschwindigkeit angenommen werden muß[1]; man erhält dann mit $f(v) = \lambda v$ ganz entsprechend die Gesetze

$$v = v_\infty\left(1 - e^{-\lambda t}\right), \qquad y = v_\infty\left[t - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)\right],$$

wobei $v_\infty = g/\lambda$ die Grenzgeschwindigkeit darstellt. Die Größe λ ist dadurch bestimmt, daß $1/\lambda$ diejenige Zeit mißt, in welcher ein im luftleeren Raum fallender Körper die Geschwindigkeit v_∞ erreicht hätte.

5. Die Zentralbewegung. Ein weiterer wichtiger Fall der Punktkinetik betrifft die sog. Zentralbewegung, die ein Massenpunkt unter dem Einfluß einer Kraft vollzieht, welche in der jeweiligen Verbindungslinie des Massenpunktes P mit einem festen „Zentrum" O wirkt. Es ist zweckmäßig, als Koordinaten hierbei die Entfernung r der Punkte O und P sowie den Winkel φ zu wählen, den der Fahrstrahl OP mit seiner Anfangslage ($t = 0$) bildet. Die Bewegung geht in einer **Ebene** vor sich, die durch den Vektor $\mathfrak{v}_0$ der Anfangsgeschwindigkeit und den Punkt O bestimmt ist (es sei denn, daß $\mathfrak{v}_0$ und O auf einer Geraden liegen: in diesem Falle verläuft die ganze Bewegung auf der Geraden). Nennt

[1] Vgl. ds. Handb. Bd. VII, Kap. 2.

man die Zentralkraft mf, wo f irgendeine (die nötigen mathematischen Voraussetzungen erfüllende) Funktion — nicht notwendig von r allein — sein kann, und beachtet man, daß die Bewegungsenergie $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ ist, so lauten die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art [Ziff. 2, Gleichung (7)]

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -f, \qquad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{1}$$

Hierbei ist f positiv gerechnet, wenn die Kraft von P nach O weist, also eine Anziehung bedeutet.

Die zweite Gleichung drückt die Verallgemeinerung des zweiten Keplerschen Gesetzes in der Form

$$r^2\dot{\varphi} = h \tag{2}$$

aus und besagt, daß die sog. Flächengeschwindigkeit $h/2$ (d. h. der Quotient dF/dt, wo dF die vom Fahrstrahl r in der Zeit dt überstrichene Fläche vorstellt) durch eine Zentralkraft nicht geändert werden kann.

Mit der aus (2) fließenden Beziehung $1/dt = h/r^2 d\varphi$ nimmt die erste Gleichung (1) die von BINET[1]) stammende Gestalt an

$$\frac{h^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = f, \tag{3}$$

welche einerseits dazu dient, zu vorgeschriebener Bahnkurve die Kraft mf zu finden, andererseits aber auch dazu, bei vorgeschriebener Kraft die Bahn der Bewegung zu bestimmen. Bei der Lösung der ersten Aufgabe ist NEWTON[2]) vom ersten Keplerschen Gesetz (Ziff. 6) aus zur Entdeckung des Gravitationsgesetzes gekommen.

Die Lösung der zweiten Aufgabe läßt sich auf Quadraturen zurückführen, wenn f nur eine Funktion von r ist. In diesem Falle kann man über die Bewegung allgemein noch folgende Aussagen machen, gleichviel, von welcher Form die Funktion $f(r)$ sein mag[3]): Die Bahnkurve ist symmetrisch zu jedem größten oder kleinsten Fahrstrahl r; die Bahngeschwindigkeit ist ihrem Betrage nach nur von r, nicht von φ abhängig, d. h. jedesmal die gleiche, so oft der Massenpunkt dieselbe Entfernung r vom Zentrum hat, nämlich gleich dem Quotienten aus der doppelten Flächengeschwindigkeit h und dem Lot vom Zentrum auf die augenblickliche Bahntangente (Energiesatz).

Das allgemeine Integral von (3) lautet jetzt mit den Integrationskonstanten a und φ_0

$$\varphi = \varphi_0 + \int\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2}{h^2}\int f(r)\,dr\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{dr}{r^2}. \tag{4}$$

Ist nach Ausführung der Quadraturen φ als Funktion von r gefunden und durch Umkehrung der Funktion r in φ ausgedrückt, so bestimmt die Gleichung (2) vermöge

$$t = t_0 + \frac{1}{h}\int r^2\,d\varphi \tag{5}$$

[1]) Über die Literatur zu dieser Gleichung vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, Art. 6 (STÄCKEL), S. 493.

[2]) I. NEWTON, Philosophiae naturalis principia mathematica, Buch I, Abschn. VIII. NEWTONS Untersuchungen sind später von J. BERTRAND und von G. DARBOUX weitergeführt worden; vgl. die abschließende Diss. von H. IHL, Kräfte, deren Bahnkurven Kegelschnitte sind, Gießen 1927.

[3]) Die Literatur über die Zentralbewegung nach verschiedensten Kraftgesetzen ist sehr umfangreich; vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, Art. 6 (STÄCKEL), S. 496ff.

auch noch den zeitlichen Ablauf der Bewegung. Jene Funktionsumkehrung wird mit Kreis- oder elliptischen Funktionen möglich, wenn f von der Form μr^n ist, wo n die Werte $5, 3, 1, 0, -2, -3, -4, -5, -7, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}$ besitzen darf[1]). Von physikalischer Bedeutung sind lediglich die Fälle $n = 1$, $n = -2$ und $n = -3$.

Der Fall $n = 1$ entspricht mit positivem μ einer leicht verwirklichbaren quasielastischen Kraft $mf(r) = m\mu r$ und liefert aus (4) und (5)

$$\frac{2c^2}{hr^2} = 1 + \sqrt{1-\varepsilon}\cos 2(\varphi - \varphi_0),$$

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0) = \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}\operatorname{tg}\left[\sqrt{\mu}\,(t - t_0)\right],$$

wo zur Abkürzung $\varepsilon = \frac{4\mu c^2}{h^2}$ gesetzt ist. Die erste dieser Gleichungen stellt eine Ellipse dar, deren Mittelpunkt das Kraftzentrum ist; die zweite besagt, daß die zum Bahnpunkte P gehörige exzentrische Anomalie mit der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\mu}$ umläuft, und dies bedeutet, daß die Projektionen des Bahnpunktes P auf die beiden Hauptachsen harmonische Schwingungen von der Kreisfrequenz $\sqrt{\mu}$ ausführen. In kartesischen Koordinaten x, y mit dem Ursprung im Zentrum kann man die Bewegungsgleichungen auch in der Form schreiben

$$x = a\cos(t\sqrt{\mu}), \qquad y = b\sin(t\sqrt{\mu}),$$

wo dann a und b die beiden Halbachsen der Ellipse sind.

Im Falle $n = 1$, aber negativem μ, entsprechend einer Abstoßungskraft, wäre die Bahn eine Hyperbel.

Die Fälle $n = -2$ und $n = -3$ spielen eine Rolle bei der nunmehr zu behandelnden Planetenbewegung.

6. Die Planetenbewegung[2]). Jeder Planet beschreibt, falls man den Sonnenmittelpunkt als festgehalten und die Einwirkung der übrigen Planeten als vernachlässigbar ansieht, eine Zentralbewegung um die Sonne nach dem Newtonschen Gesetz $f(r) = \mu/r^2$, wo μ gleich dem Produkt aus Sonnenmasse und Gravitationskonstante ist. Die Differentialgleichung dieser Bewegung [Ziff. 5, Gleichung (9)]

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2}$$

liefert mit zwei Integrationskonstanten e und φ_0 die Gleichung der Bahnkurve

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)\right]. \tag{1}$$

Diese Gleichung drückt das **erste Keplersche Gesetz** aus: Die Bahn ist ein Kegelschnitt von der numerischen Exzentrizität e, in dessen einem Brennpunkt die Sonne steht, wobei φ_0 das Azimut des Perihels bedeutet.

Bildet man den Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]\dot{\varphi}^2,$$

so folgt nach (1) und Ziff. 5, Gleichung (2), die Energiegleichung

$$v^2 - \frac{2\mu}{r} = \frac{\mu^2}{c^2}(e^2 - 1). \tag{2}$$

---

[1]) E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Deutsch von MITTELSTEN SCHEID, S. 86. Berlin 1924.

[2]) Über die reiche Literatur zu diesem klassischen Problem vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2, Art. 9 (HERGLOTZ) u. Art. 15 (SUNDMAN).

Würde der Planet aus einer Ruhelage in unendlicher Entfernung gegen die Sonne fallen, so hätte er in der Entfernung r von ihr die Geschwindigkeit $v' = \sqrt{2\mu/r}$ erreicht, und somit besagt die Gleichung (2): Die Bahn ist eine Hyperbel ($\varepsilon > 1$), Parabel ($\varepsilon = 1$) oder Ellipse ($\varepsilon < 1$), je nachdem die Bahngeschwindigkeit in irgendeinem Bahnpunkte größer, gleich oder kleiner als jene Fallgeschwindigkeit v' ist.

Weiterhin soll es sich nur noch um eine Ellipsenbahn handeln. Die große Halbachse a, auch die **mittlere Entfernung** des Planeten von der Sonne genannt, hat, wie aus (1) zu schließen, die Größe

$$a = \frac{k^2}{\mu(1 - \varepsilon^2)}, \tag{3}$$

so daß die Bahngeschwindigkeit (2) durch

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{4}$$

bestimmt ist, woraus für den Unterschied der Perihelgeschwindigkeit v_1 und der Aphelgeschwindigkeit v_2 folgt

$$v_1 - v_2 = \frac{2\varepsilon\mu}{k}.$$

Aus der Flächengeschwindigkeit $k/2 = dF/dt$ ergibt sich die Dauer T eines vollen Umlaufes zu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \tag{5}$$

Diese Gleichung drückt, da μ im ganzen Sonnensystem denselben Wert hat, das **dritte Keplersche Gesetz** aus.

Um den zeitlichen Verlauf der Bewegung zu überblicken, führt man zweckmäßigerweise die **exzentrische Anomalie** u des Bahnpunktes r, φ ein und findet mit

$$r = a(1 - \varepsilon\cos u), \qquad \cos\varphi = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos u} \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{u}{2} \tag{6}$$

aus Ziff. 5, Gleichung (5) die sog. **Keplersche Gleichung**

$$nt = u - \varepsilon\sin u. \tag{7}$$

Hierbei ist die Zeit sowie das Azimut φ vom Periheldurchgang aus gezählt, und es bedeutet

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{8}$$

die sog. **mittlere Bewegung**, d. h. den Mittelwert der Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ auf einem vollen Umlauf. Man nennt den Winkel nt die **mittlere Anomalie**, während das Azimut φ dann wohl auch die **wahre Anomalie** heißt.

Die Gleichung (7) in Verbindung mit (6) löst die Aufgabe, die Zeit als Funktion des Azimuts φ zu bestimmen. Die wichtigere Aufgabe, r und φ als Funktionen der Zeit auszudrücken, erfordert die Umkehrung der Funktion $u - \varepsilon\sin u$. Hierfür sind zahlreiche analytische und nomographische Verfahren ersonnen worden[1]). Hier sei nur erwähnt, daß für die sehr kleinen Exzentrizitäten

[1]) Vgl. E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik. S. 95.

der eigentlichen Planeten die Funktionsumkehr auf folgende, für die meisten Zwecke ausreichende Näherungsformeln führt[1])

$$u = nt + \varepsilon \sin nt, \qquad r = a(1 - \varepsilon \cos nt), \qquad \varphi = nt + 2\varepsilon \sin nt.$$

Schon von NEWTON[2]) ist auch die Frage beantwortet worden, in welcher Weise sich eine Planetenbahn abändert, wenn zu der Gravitationsbeschleunigung μ/r^2 noch ein mit der dritten Potenz von r umgekehrt proportionaler Zusatzbetrag ν/r^3 hinzutritt. Allgemein gehorcht die Bewegung unter der Zentralkraft $mf^*(r) = m[f(r) + \nu/r^3]$ der Differentialgleichung [Ziff. 5, Gleichung (5)]

$$\frac{h^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = f(r) + \frac{\nu}{r^3},$$

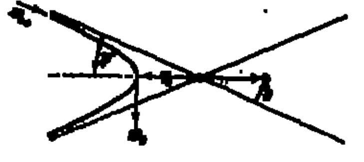
die man auf die Form bringen kann

$$\frac{(kh)^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d(k\varphi)^2} + \frac{1}{r}\right] = f(r) \qquad \text{mit} \qquad k = \sqrt{1 - \frac{\nu}{h^2}}.$$

War also $r = r(\varphi; h)$ die Lösung der ursprünglichen Gleichung, die zur Kraft $mf(r)$ gehörte, so lautet die Lösung dieser neuen Gleichung $r = r(k\varphi; kh)$, worin nach wie vor h die doppelte Flächengeschwindigkeit bedeutet. Wendet man diese Erkenntnis auf die Planetengleichung (1) an, indem man dort φ durch $k\varphi$ ersetzt, so sieht man, daß sich die Ellipse unter dem Einfluß einer kleinen Zusatzkraft $m\nu/r^3$ im Sinne ihres Umlaufs dreht; und zwar rückt bei jedem Umlauf das Perihel um das Azimut

$$\Delta\varphi_0 = 2\pi\left(\frac{1}{k} - 1\right) \approx \frac{\pi\nu}{h^2}$$

weiter. Von den Versuchen, auf diesem Wege (oder auch durch ähnlich wirkende Zusatzglieder mit noch höheren Potenzen von $1/r$) die Perihelbewegung des Planeten Merkur zu erklären, kann hier um so weniger die Rede sein, als diese Versuche durch das allgemeine Relativitätsprinzip ihre Erledigung gefunden haben[3]).


Abb. 2. Anlauf eines α-Teilchens gegen den Kern eines Atoms von hoher Ordnungszahl.

In der Elektrodynamik ist übrigens auch der Fall von Bedeutung, daß es sich um eine Abstoßungskraft $-\mu/r^2$ handelt [Anlauf eines α-Teilchens gegen den Kern eines Atoms von hoher Ordnungszahl[4])]. Die Bahn muß jetzt, wie (2) zeigt, stets eine Hyperbel sein (Abb. 2), und zwar genauer derjenige Ast, für den das Kraftzentrum der äußere Brennpunkt ist (wogegen der andere Hyperbelast der Bewegung unter einer Anziehungskraft vorbehalten bleibt). Hierbei bestehen zwischen der Exzentrizität ε, der Mindestgeschwindigkeit v_0 im zentrumnächsten Punkt (Scheitel) des Hyperbelastes, dem Fahrstrahl r_0 dieses Punktes, der Geschwindigkeit v_∞ in weitester Entfernung vom Zentrum und der Kraft μ auf die Einheit der Masse in der Einheit der Entfernung folgende Beziehungen:

$$r_0 v_0^2 = \mu(\varepsilon - 1), \qquad r_0 v_\infty^2 = \mu(\varepsilon + 1). \tag{9}$$

[1]) S. z. B. O. RAUSENBERGER, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Bd. I, S. 57. Leipzig 1888.
[2]) I. NEWTON, Philosophiae naturalis principia mathematica, Buch I, Abschn. IX.
[3]) S. Kap. 10, Ziff. 28 ds. Bd. des Handb.
[4]) Vgl. ds. Handb. Bd. XXII, Kap. 2.

Endlich gilt für den halben Asymptotenwinkel ψ und das Lot b vom Zentrum auf die Asymptoten die Gleichung von RUTHERFORD

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b v_\infty^2}{\mu}. \tag{10}$$

7. Die Planetenbewegung im widerstehenden Mittel. Da der interplanetarische Raum tatsächlich nicht vollkommen leer ist, so stellt sich der Bewegung jedes Planeten ein Widerstand entgegen, den man in der Form $\varkappa m f(v)$ ansetzen darf, wo $\varkappa$ eine sicher außerordentlich kleine Zahl und $f(v)$ eine nicht näher bekannte Funktion der Geschwindigkeit ist. Von der Funktion $f(v)$ kann man annehmen, daß sie mit $v = 0$ mindestens von erster Ordnung verschwindet, also die Gestalt $f(v) = v \cdot u(v)$ besitzt, wo $u(v)$ eine immer endliche, höchstens für $v = 0$ verschwindende Funktion bedeutet. Benützt man auch hier r und φ als Lagrangesche Koordinaten, so sind die Lagrangeschen Kräfte (Ziff. 2)

$$-\frac{m\mu}{r^2} - m\varkappa u \dot r, \qquad -m\varkappa u r^2 \dot\varphi,$$

und mithin lauten die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art [Ziff. 2, Gleichung (7)]

$$\ddot r - r\dot\varphi^2 = -\frac{\mu}{r^2} - \varkappa u \dot r, \qquad \frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) = -\varkappa u r^2 \dot\varphi.$$

Die Lösung[1]) dieser Bewegungsgleichungen mag hier auf den Fall beschränkt werden, daß erstens alle Größen, die von der Ordnung der zweiten und höherer Potenzen von $\varkappa$ sind, vernachlässigt werden dürfen, und daß zweitens die ungestörte Bewegung genau auf einem Kreise vom Halbmesser r_0 mit der festen Winkelgeschwindigkeit n verliefe. Setzt man mit Störungsgliedern ϱ und ω von der Größenordnung $\varkappa$ an

$$r = r_0 + \varrho, \qquad \dot\varphi = n + \omega,$$

so wird hinreichend genau $v = (r_0 + \varrho)(n + \omega)$ und $u = u_0 + u_0'(\varrho n + r_0\omega)$, unter u_0 und u_0' die Werte von u und seiner Ableitung für das Argument $v_0 = r_0 n$ verstanden. Beachtet man, daß für die ungestörte Bewegung das dritte Keplersche Gesetz [Ziff. 6, Gleichung (8)] gilt, so gehen die Bewegungsgleichungen jetzt über in

$$\ddot\varrho - 3n^2\varrho - 2r_0 n\omega = 0, \qquad 2n\dot\varrho + r_0\dot\omega + \varkappa r_0 n u_0 = 0$$

mit den Integralen

$$\varrho = -2\varkappa r_0 u_0 t, \qquad \omega = 3\varkappa n u_0 t.$$

Diese Integrale setzen voraus, daß zur Zeit $t = 0$ die gestörte Bewegung mit der ungestörten im Fahrstrahl r und im Betrag der Geschwindigkeit v übereinstimmt, und daß außerdem die radiale Geschwindigkeit $\dot\varrho$ bereits einen festen Wert erlangt hat. (Dieser Lösung könnte noch ein periodisches Glied von ϱ überlagert sein, dessen Amplitude von dem Anfangswert von $\dot\varrho$ abhinge.)

Für den Zuwachs der Geschwindigkeit findet man

$$\Delta v = \varrho n + r_0\omega = \varkappa v_0 u_0 t = \varkappa f(v_0) t.$$

Infolge des Widerstandes nimmt also die Entfernung des Planeten von der Sonne gleichmäßig ab; seine Winkelgeschwindigkeit aber und seine Umfangsgeschwindigkeit nehmen merkwürdigerweise trotz des Widerstandes gleichmäßig zu.

8. Die Bewegung im allgemeinen Kraftfelde. Die Bewegung eines Massenpunktes in einem vorgeschriebenen Kraftfelde läßt sich im allgemeinen nicht

[1]) J. L. LAGRANGE, Mécanique analytique. Bd. II, 2. Aufl., S. 165. Paris 1815.

auf Quadraturen zurückführen. Wohl aber gelingt die Lösung in wichtigen Sonderfällen; Beispiele hierfür geben die vorangegangenen Ziff. 3 bis 7. Ein weiterer lösbarer Fall liegt vor, wenn die Komponenten $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ des Kraftfeldes $\mathfrak{K}$ nach den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems jeweils nur Funktionen der zugehörigen einen Koordinate sind, so daß die Bewegungsgleichungen (4), Ziff. 2, lauten

$$m\ddot{x} = X(x), \qquad m\ddot{y} = Y(y), \qquad m\ddot{z} = Z(z).$$

Ihre Integrale sind

$$t = \int\left[\frac{2}{m}\int X\,dx + a\right]^{-\frac{1}{2}} dx + a' = \int\left[\frac{2}{m}\int Y\,dy + b\right]^{-\frac{1}{2}} dy + b'$$
$$= \int\left[\frac{2}{m}\int Z\,dz + c\right]^{-\frac{1}{2}} dz + c',$$

wo a, b, c, a', b', c' Integrationskonstanten bedeuten. Diese Gleichungen bestimmen nach Ausführung der Quadraturen und Funktionsumkehrung die Bewegung sowohl ihrem räumlichen wie ihrem zeitlichen Verlaufe nach.

LIOUVILLE[1]) hat eine noch wesentlich allgemeinere Klasse von Kraftfeldern angegeben, bei denen die Integration der Bewegungsgleichungen sich auf lauter Quadraturen zurückführen läßt. Dies ist nämlich möglich, wenn die Kraft $\mathfrak{K}$ ein Potential V besitzt, so daß also $\mathfrak{K} = -\operatorname{grad} V$ wird, und wenn es außerdem gelingt, ein Tripel von allgemeinen Koordinaten q_1, q_2, q_3 so zu finden, daß die Bewegungsenergie T und das Potential V sich durch irgendwelche Funktionen f_i, g_i, h_i eines Arguments in der Form darstellen lassen:

$$T = \sum f_i(q_i)\cdot\sum h_i(q_i)\,\dot{q}_i^2, \qquad V = \frac{\sum g_i(q_i)}{\sum f_i(q_i)}. \tag{1}$$

Führt man zunächst neue Veränderliche $q_i^* = \int\sqrt{h_i(q_i)}\,dq_i$ ein und läßt nachträglich dann wieder die Sterne sowohl bei q_i^* wie auch bei den neuentstandenen Funktionen f_i^*, g_i^* weg, so kommt statt T einfacher $T = \sum f_i(q_i)\cdot\sum \dot{q}_i^2$. Außerdem hat die Existenz eines Potentials zur Folge, daß das Integral der Energie in der Form $T + V = h$ gilt, wo h eine feste Zahl ist. Die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art [Ziff. 2, Gleichung (7)] aber lauten wegen $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$

$$2\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_k\sum f_i\right) - \frac{T}{\sum f_i}\frac{\partial}{\partial q_k}\sum f_i = -\frac{\partial V}{\partial q_k}. \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Multipliziert man diese Gleichungen je mit $\dot{q}_k\sum f_i$, so kommt mit Beachtung des Energieintegrals

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_k\sum f_i\right)^2 = \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}\left[(h - V)\sum f_i\right] = \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k}(h f_k - g_k) = \frac{d}{dt}(h f_k - g_k)$$

samt den ersten Integralen

$$\dot{q}_k\sum f_i = \sqrt{h f_k - g_k + a_k}, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

wo die drei Integrationskonstanten a_k gemäß der Energiegleichung der Bedingung $\sum a_i = 0$ gehorchen müssen. Die weitere Integration ergibt mit einem Parameter u

$$u = \int\frac{dq_1}{\sqrt{h f_1 - g_1 + a_1}} + b_1 = \int\frac{dq_2}{\sqrt{h f_2 - g_2 + a_2}} + b_2 = \int\frac{dq_3}{\sqrt{h f_3 - g_3 + a_3}} + b_3, \tag{2}$$

[1]) J. LIOUVILLE, Journ. de math. Bd. 14, S. 257. 1849.

wonach die Bahnkurve in Parameterform darstellbar geworden ist. Der zeitliche Ablauf der Bewegung wird dann vollends durch

$$t = \int \sum f_i \, d u \tag{5}$$

gefunden.

Übrigens läßt sich die Bewegung eines Massenpunktes bei gegebenem Kraftfelde stets auf graphischem Wege ermitteln, sobald der Vektor der Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ vorgeschrieben ist[1]). Durch ihn und die Kraftrichtung im Anfangspunkt P_0 ist die Schmiegungsebene der Bahn im Anfangspunkt zu legen. Dann ist nach der zweiten Gleichung (2) von Ziff. 2 auch die Bahnkrümmung $1/\varrho$ im Anfangspunkte durch v_0 und die Normalkomponente k_n der Kraft bestimmt. Man geht auf dem Krümmungskreis ein hinreichend kleines Stück Δs weiter bis zum Punkte P_1. Schreibt man die erste Gleichung (5) von Ziff. 2 in der Form $\Delta v^2 = \frac{2}{m} k_t \Delta s$, so ist damit auch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ im Punkte P_1 aus der Tangentialkraft k_t zu finden, so daß das ganze Verfahren nun im Punkte P_1 wiederholt werden kann. Man erhält so die Bahnkurve aus lauter kleinen Kreisbögen zusammengesetzt, kennt außerdem die Geschwindigkeit auf der ganzen Bahn und hat mithin nur noch das Integral $t = \int ds/v$ auszuwerten, um auch den zeitlichen Verlauf der Bewegung feststellen zu können. Das Verfahren ist besonders bei ebener Bewegung bequem durchzuführen, grundsätzlich aber auch im Raume möglich, nötigenfalls unter Zuziehung der Hilfsmittel der darstellenden Geometrie. Man macht sich leicht klar, daß auch das Unbestimmtwerden der Schmiegungsebene, falls Bahntangente und Kraftrichtung zusammenfallen, die Konstruktion nicht zu stören vermag.

Stets lösbar, wenn auch nicht immer eindeutig, ist die Umkehrung der Aufgabe, nämlich dasjenige Kraftfeld zu finden, in welchem eine vorgeschriebene Punktbewegung stattfinden kann. Von physikalischer Bedeutung ist natürlich nur der Fall, daß ein ganzes System von Bahnkurven gegeben wird, welches den Bereich des Kraftfeldes dicht überdeckt. Ist bei sämtlichen Bahnkurven auch der zeitliche Verlauf der Bewegung schon bekannt, so ist das Kraftfeld durch die Bewegungsgleichungen unmittelbar bestimmt. In der Regel wird aber der zeitliche Ablauf der Bewegung noch offen bleiben, und dann kann man im zweidimensionalen Falle das Kraftfeld, wie folgt, finden[2]).

Es sei $f(x, y) = c$ die durch einen Parameter dargestellte Bahnkurvenschar. Bezeichnet man partielle Ableitungen durch entsprechende Zeiger, so gilt $f_x \dot{x} + f_y \dot{y} = 0$, wonach mit einer positiven, mindestens einmal differentiierbaren, aber sonst willkürlichen Funktion $u(x, y)$

$$\dot{x} = +\sqrt{u}\, f_y, \qquad \dot{y} = -\sqrt{u}\, f_x$$

sein muß. Bildet man hieraus $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$, indem man sogleich wieder $\dot{x}$ und $\dot{y}$ durch die vorigen Ausdrücke ersetzt, so kommen die Kraftkomponenten

$$k_x = m[u(f_y f_{xy} - f_x f_{yy}) + \tfrac{1}{2} f_y (u_x f_y - u_y f_x)],$$
$$k_y = m[u(f_x f_{xy} - f_y f_{xx}) + \tfrac{1}{2} f_x (u_y f_x - u_x f_y)].$$

In ganz entsprechender Weise geht man im dreidimensionalen Falle von den Gleichungen

$$f(x, y, z) = c_1, \qquad g(x, y, z) = c_2$$

---

[1]) Lord Kelvin, Phil. Mag. (5) Bd. 34, S. 443. 1892; ferner vgl. man die Berichte in den Brit. Ass. Rep. von 1889, 1892 u. 1893.

[2]) Danielli, Giorn. di math. Bd. 18, S. 271. 1880.

der Bahnkurvenschar aus und findet, indem man außer der willkürlichen Funktion $u(x, y, z)$ die Abkürzungen

$$\xi = l_y \varepsilon_z - l_z \varepsilon_y, \qquad \eta = l_z \varepsilon_x - l_x \varepsilon_z, \qquad \zeta = l_x \varepsilon_y - l_y \varepsilon_x$$

einführt, die Kraftkomponente

$$k_x = m[u(\xi \varepsilon_x + \eta \varepsilon_y + \zeta \varepsilon_z) + \tfrac{1}{2} \xi (u_x \xi + u_y \eta + u_z \zeta)]$$

nebst den durch zyklische Vertauschung hieraus hervorgehenden Ausdrücken für k_y und k_z.

9. Die Bewegung um zwei und mehr Kraftzentren[1]. Wird ein Massenpunkt von zwei festen Kraftzentren mit Newtonschen Kräften μ/r^2 und μ'/r'^2 angezogen, so kann er eine **ebene Bewegung** vollziehen, die man am einfachsten mit elliptischen Koordinaten ξ und η beschreibt. Ist $2c$ der Abstand der beiden Kraftzentren, so hängen die kartesischen Koordinaten x, y mit den elliptischen zusammen durch

$$x = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi \cos\eta, \qquad y = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi \sin\eta,$$

so daß die Bewegungsenergie sowie das Potential

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \qquad V = -\frac{m\mu}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} - \frac{m\mu'}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}$$

sich in der Form darstellen

$$T = \frac{mc^2}{2}(\mathfrak{Cof}^2\xi - \cos^2\eta)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2), \qquad V = -\frac{m}{c}\,\frac{(\mu+\mu')\,\mathfrak{Cof}\,\xi + (\mu-\mu')\cos\eta}{\mathfrak{Cof}^2\xi - \cos^2\eta}.$$

Wie der Vergleich mit Ziff. 8, Gleichung (1), zeigt, ist das Problem in den elliptischen Koordinaten vom Liouvilleschen Typ. Somit lauten die Integrale [Ziff. 8, Gleichung (2) und (3)]

$$u = \int \frac{d\xi}{\sqrt{h\,\mathfrak{Cof}^2\xi + \frac{m}{c}(\mu+\mu')\,\mathfrak{Cof}\,\xi + \alpha}} + b_1,$$

$$u = \int \frac{d\eta}{\sqrt{-h\cos^2\eta + \frac{m}{c}(\mu-\mu')\cos\eta - \alpha}} + b_2.$$

Diese Integrale liefern ξ und η als elliptische Funktionen von u, womit dann auch der zeitliche Ablauf der Bewegung durch

$$t = c\sqrt{\frac{m}{2}}\int(\mathfrak{Cof}^2\xi - \cos^2\eta)\,du$$

gefunden ist.

Legendre[2]) und Charlier[3]) haben die Gesamtheit der möglichen ebenen Bahnen untersucht und unterscheiden folgende zwölf Klassen:

1. **Klasse.** Geradlinige Bewegung auf der Verbindungsgeraden der beiden Kraftzentren, wobei Zusammenstoß mit einem Kraftzentrum oder Entfernung ins Unendliche oder asymptotische Annäherung an einen zwischen den Zentren liegenden Punkt möglich ist.

---

[1]) Die hier gegebene Darstellung rührt von E. T. Whittaker her: Analytische Dynamik, S. 102. Die sonst übliche Darstellung, wie man sie in den meisten Lehrbüchern findet, geht von anderer Normierung der elliptischen Koordinaten aus und ist unnötig umständlich. Weitere Literatur findet man in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, Art. 6 (Stäckel), S. 497.

[2]) A. M. Legendre, Traité des fonctions elliptiques. Bd. I, S. 449. Paris 1825.

[3]) C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. Bd. I, S. 152. Leipzig 1902.

2. **Klasse.** Lemniskatenbewegung. Die Bahnkurve erfüllt, wenn die Bewegung nicht etwa periodisch ist, die ganze Fläche einer zu den Zentren als Brennpunkten gehörigen Ellipse überall dicht.

3. **Klasse.** Satellitenbewegung. Die Bahnkurve erfüllt, wenn die Bewegung nicht etwa periodisch ist, die ganze zwischen einer solchen Ellipse und dem einen Zweig einer konfokalen Hyperbel liegende konvexe Fläche überall dicht.

4. **Klasse.** Planetenbewegung. Die Bahnkurve erfüllt, wenn die Bewegung nicht etwa periodisch ist, die ganze zwischen zwei konfokalen Ellipsen liegende Fläche überall dicht.

5. **Klasse.** Divergente Pendelbewegung. Der Massenpunkt entfernt sich ins Unendliche, indem er in immer größeren pendelartigen Schwingungen zwischen den beiden Armen eines Hyperbelzweiges hin und herschwankt.

6. **Klasse.** Sinusoidbewegung. Der Massenpunkt entfernt sich ins Unendliche, indem er zwischen den zum selben Brennpunkt gehörigen Zweigen von zwei konfokalen Hyperbeln hin und her schwankt.

7. **Klasse.** Divergente Spiralbewegung. Die Bahnkurve umläuft die Verbindungsstrecke der beiden Kraftzentren spiralartig bis ins Unendliche.

8. **Klasse.** Konvergente Spiralbewegung. Die Bahnkurve kommt spiralartig aus dem Unendlichen und umläuft dabei die Verbindungsstrecke der beiden Kraftzentren, ohne sie je ganz zu erreichen.

9. **Klasse.** Konvergente Pendelbewegung. Die Bahnkurve liegt innerhalb einer konfokalen Ellipse und nähert sich in pendelartigen Schwingungen asymptotisch von der konvexen Seite her einer konfokalen Hyperbel. Sind die beiden Kraftzentren gleich stark, so gehört hierher insbesondere eine Pendelung auf dem Mittellot der Verbindungsstrecke der beiden Zentren.

10. **Klasse.** Asymptotisch-geradlinige Bewegung. Die Bahn durchkreuzt die Verbindungsstrecke der beiden Zentren und nähert sich asymptotisch einer dazu parallelen Geraden.

11. **Klasse.** Ellipsenbewegung. Die Bahnkurve ist irgendeine der konfokalen Ellipsen[1]).

12. **Klasse.** Hyperbelbewegung. Die Bahnkurve ist irgendeine der konfokalen Hyperbeln; und zwar entfernt sich der Massenpunkt ins Unendliche oder er vollzieht Schwingungen im Endlichen, je nachdem das zu dem Hyperbelzweig als Brennpunkt gehörige Kraftzentrum das stärkere oder schwächere ist.

Die **räumliche Zweizentrenbewegung** kann ganz ähnlich behandelt werden; die Mannigfaltigkeit der Bahnkurven ist natürlich noch viel größer[2]).

Dagegen ist es bisher nicht gelungen, die Lösung der Aufgabe für **mehr als zwei Zentren** auf Quadraturen zurückzuführen. Die wichtigste Erkenntnis spricht hier der Satz von Bonnet[3]) aus (von welchem die Klassen 11 und 12 der Zweizentrenbewegung besondere Fälle darstellen): Kann eine bestimmte Bahnkurve unter der Wirkung jeder einzelnen Zentralkraft beschrieben werden, so kann sie auch unter der Zusammenwirkung aller Zentralkräfte durchlaufen werden.

Es ist klar, daß hierbei alle Kraftzentren sowie auch die Bahnkurve $\varrho = f(\vartheta)$ in einer Ebene liegen müssen. Dann aber folgt die Richtigkeit des Satzes so-

[1]) Die Stabilität dieser Bewegung ist neuerdings untersucht worden von O. Przeworski, Crelles Journ. Bd. 155, S. 173. 1926.

[2]) W. Pauli jun., Ann. d. Phys. (4) Bd. 68, S. 203–208. 1922; K. F. Niessen, Zur Quantentheorie des Wasserstoffmolekülions. Dissert. Utrecht., Abschn. I. 1922.

[3]) O. Bonnet, Journ. de math. Bd. 9, S. 113. 1844.

fort aus Ziff. 2, Gleichung (3), indem man die einzelnen Bewegungsgleichungen addiert:

$$\frac{d}{ds}\sum T_i = \sum k_{ti}, \qquad \frac{2}{\varrho}\sum T_i = \sum k_{ni}.$$

Diese Gleichungen stellen die Bewegung auf der gleichen Bahn $\varrho = f(s)$ unter der Gesamtkraft $\sum \mathfrak{k}_i$ dar, wobei die Bewegungsenergie T gleich der Summe der Energien T_i der Bewegungen unter der Wirkung jeder einzelnen Zentralkraft $\mathfrak{k}_i$ für sich ist. Demnach gilt an jeder Stelle der Bahn für die Geschwindigkeit v

$$v^2 = \sum v_i^2,$$

falls v_i die Geschwindigkeit daselbst unter der Wirkung der Kraft $\mathfrak{k}_i$ allein wäre.

III. Die eingeschränkte Bewegung eines Massenpunktes.

10. Die Bewegung auf einer festen Kurve. Man geht in diesem Falle einer sog. **skleronomen Führung mit einem Freiheitsgrade** am besten von den natürlichen Gleichungen (5), Ziff. 2, aus, deren erste bei gegebener eingeprägter Kraft $\mathfrak{P}$ den Bewegungsablauf bestimmt, wonach dann die zweite und dritte Gleichung auch noch die Reaktionskraft $\mathfrak{F}$, d. h. die von der Führungskurve selbst ausgeübte Kraft senkrecht zur Bahntangente liefert. Wie man sieht, ist für den Verlauf der Bewegung nur die tangentiale Komponente k_t der eingeprägten Kraft maßgebend. Diese mag im allgemeinsten Falle von der Zeit t, vom Ort des Punktes, also von seiner durch die Bogenlänge s gemessenen Lage auf der Kurve, und überdies von seiner Geschwindigkeit v abhängen, also in der Form $k_t = mF(t, s, v)$ angesetzt werden, wo m die Masse bedeutet. Die Integration der Bewegungsgleichung $\ddot{s} = F$ kann auf Quadraturen zurückgeführt werden in den beiden auch physikalisch sehr wichtigen Fällen, daß F von der Form ist

$$F = f(t) - \alpha^2 s - 2\varepsilon v \qquad \text{oder} \qquad F = f(s) - \frac{\varepsilon}{2} v^2.$$

Das bemerkenswerteste Beispiel für die erste Form bildet die erzwungene Bewegung auf einer Kurve; das bekannteste Beispiel für die zweite Form stellt die Pendelbewegung oder allgemeiner die Bewegung auf einer Kurve unter dem Einfluß der Schwere dar. Diese Bewegungen sollen jetzt behandelt werden.

11. Die erzwungene Bewegung; die harmonische Schwingung. Auf einen Massenpunkt wirke längs seiner fest vorgeschriebenen Bahnkurve eine Zwangskraft $mf(t)$. Außerdem ist er möglicherweise durch eine quasielastische Kraft $m\alpha^2 s$ an eine Ruhelage $s = 0$ gebunden und erfahre bei seiner Bewegung einen mit der Geschwindigkeit v proportionalen Widerstand $2m\varepsilon v$, wo α^2 und ε gegebene Festwerte sind. Alsdann gehorcht er der Differentialgleichung

$$\ddot{s} + 2\varepsilon\dot{s} + \alpha^2 s = f(t). \tag{1}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist allemal von der Form

$$s = \bar{s}(t) + \bar{\bar{s}}(t). \tag{2}$$

Hier bedeutet das erste Glied $\bar{s}(t)$ die vom Zwang f ganz unabhängige, durch die Anfangswerte s_0 und v_0 bestimmte **Eigenbewegung** des Massenpunktes. Das zweite Glied $\bar{\bar{s}}(t)$ stellt die **Zwangsbewegung** dar, die, ihrerseits unabhängig von den Anfangsbedingungen, sich der Eigenbewegung überlagert.

Am einfachsten erledigt sich der Fall $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0$, wo also der Massenpunkt dem Zwang hemmungslos zu folgen hat. Eigenbewegung und Zwangsbewegung sind dargestellt durch die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \bar{s} &= s_0 + v_0 t, \\ \bar{\bar{s}} &= \int_0^t\int_0^t f(t)\,dt^2 \qquad \text{oder} \qquad \bar{\bar{s}} = \int_0^t (t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Eigenbewegung ist hier natürlich gleichförmig; die Zwangsbewegung aber ist keinesfalls ein einfaches Abbild des Zwanges selbst, sondern wird von der Trägheit des Massenpunktes wesentlich beeinflußt. Beispielsweise ruft eine harmonische Zwangskraft $m f(t) = c\cos(\gamma t - \delta)$ die Zwangsbewegung

$$\bar{\bar{s}} = \frac{c}{m\gamma^2}\left[\cos\delta + \gamma t\sin\delta - \cos(\gamma t - \delta)\right]$$

hervor, welche mit wachsender Zwangsamplitude c zwar an Stärke zunimmt, aber um so geringer bleibt, je größer die Masse m ist und je höher die Frequenz γ des Zwanges steigt. Außerdem ist die Zwangsbewegung gegenüber dem Zwang in ihrer Phase um 180° verschoben und besitzt im allgemeinen ein mit der Zeit anwachsendes „säkulares" Glied. Dieses säkulare Glied verschwindet nur dann, d. h. der Zwang ändert die mittlere Geschwindigkeit nur dann nicht, wenn er sofort mit seiner vollen Stärke einsetzt ($\delta = 0$).

Kommt Dämpfung hinzu ($\varepsilon \neq 0$), so hat man statt (3) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \bar{s} &= s_0 + \frac{v_0}{2\varepsilon}\left(1 - e^{-2\varepsilon t}\right), \\ \bar{\bar{s}} &= e^{-2\varepsilon t}\int_0^t e^{2\varepsilon t}\int_0^t f(t)\,dt^2 \qquad \text{oder} \qquad \bar{\bar{s}} = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \left[1 - e^{-2\varepsilon(t-\tau)}\right] f(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Die Eigenbewegung klingt nach dem Punkte $s_0 + v_0/2\varepsilon$ hin ab. Die zu einer harmonischen Zwangskraft $m f(t) = c\cos(\gamma t - \delta)$ gehörende Zwangsbewegung besitzt jetzt kein säkulares Glied und ist gegenüber dem Zwang in der Phase um $180° - \psi$ verschoben, wo $\operatorname{tg}\psi = 2\varepsilon/\gamma$ wird. Auch die Amplitude der Zwangsschwingung wird durch die Dämpfung herabgesetzt.

Ist schließlich auch noch eine rücktreibende Kraft $m\alpha^2 s$ vorhanden, so hat man mit $k^2 = \alpha^2 - \varepsilon^2$

$$\begin{aligned} \bar{s} &= e^{-\varepsilon t}\left[s_0\cos kt + \frac{v_0 + \varepsilon s_0}{k}\sin kt\right], \\ \bar{\bar{s}} &= \frac{1}{k}\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\sin k(t-\tau)\cdot f(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Für den Fall, daß $\alpha^2 < \varepsilon^2$, also k imaginär wird, hat man die Kreisfunktionen cos und sin durch die Hyperbelfunktionen Cof und Sin, und k^2 durch $k^2 = \varepsilon^2 - \alpha^2$ zu ersetzen. Für den Fall, daß $\alpha^2 = \varepsilon^2$ ist, liefert ein Grenzübergang die Formeln

$$\begin{aligned} \bar{s} &= e^{-\varepsilon t}\left[s_0 + (v_0 + \varepsilon s_0)t\right], \\ \bar{\bar{s}} &= \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Die Eigenbewegung $\bar{s}$ ist im Falle schwacher Dämpfung ($\varepsilon^2 < \alpha^2$) periodisch, und zwar eine harmonische Schwingung von der Frequenz k, welche kleiner ist als die Eigenfrequenz α ohne Dämpfung. Die Amplitude nimmt im Falle der Dämpfung ab nach Maßgabe des Faktors $e^{-\varepsilon t}$. Für das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender größter Ausschläge $\bar{s}_n$ und $\bar{s}_{n+1}$ nach derselben Seite gilt

$$\ln \frac{\bar{s}_n}{\bar{s}_{n+1}} = 2\pi \frac{\varepsilon}{k}$$

(sog. logarithmisches Dekrement). Beobachtet man die Frequenz k und das logarithmische Dekrement, so kann man α und ε berechnen.

Im Falle starker Dämpfung $\varepsilon^2 \geqq \alpha^2$ ist die Eigenbewegung aperiodisch, und zwar kann höchstens eine Bewegungsumkehr eintreten, ehe die asymptotische Annäherung an die Ruhelage ($s = 0$) beginnt. Stößt man den Massenpunkt aus der Ruhelage, so kehrt er im Augenblicke

$$t' = \frac{1}{2k} \ln \frac{\varepsilon + k}{\varepsilon - k}$$

um. Für das Verhältnis aus dem zur Zeit t' erreichten Ausschlag s' und demjenigen s'' zur Zeit $2t'$ gilt

$$\ln \frac{2\varepsilon s'}{\alpha s''} = \varepsilon t'.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen, die für den Grenzfall $\varepsilon = \alpha$ die Form $t' = 1/\varepsilon$ und $\ln \frac{2s'}{s''} = 1$ annehmen, gewinnt man durch Beobachtung von t' und $\frac{s'}{s''}$ die Werte α und ε.

Die Zwangsbewegung $\bar{\bar{s}}$ gehorcht beispielsweise im Falle $\varepsilon^2 > \alpha^2$ (im Falle $\varepsilon^2 < \alpha^2$ wäre nur die Vertauschung der Hyperbelfunktionen gegen die Kreisfunktionen vorzunehmen) wieder für eine harmonische Zwangskraft $m f(t) = m c \cos \gamma t$ dem Gesetz

$$\bar{\bar{s}} = c' \cos(\gamma t - \delta) - c' e^{-\varepsilon t}\left[\cos\delta \operatorname{Cof} kt + \frac{\gamma \sin\delta + \varepsilon\cos\delta}{k} \operatorname{Sin} kt\right],$$

und dies ist, nach Abklingen des mit $e^{-\varepsilon t}$ behafteten zweiten Gliedes, eine harmonische Schwingung von der Frequenz γ des Zwanges mit der Phasenverschiebung δ, welche aus

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\varepsilon\gamma}{\alpha^2 - \gamma^2}$$

folgt. Die Amplitude der Zwangschwingung ist

$$c' = \frac{c}{m\sqrt{(\alpha^2 - \gamma^2)^2 + 4\varepsilon^2\gamma^2}}.$$

Diese Amplitude wird dann am größten (Resonanzfall), nämlich

$$c'_{\max} = \frac{c}{2 m \varepsilon \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2}},$$

wenn die Zwangsfrequenz γ mit der Eigenfrequenz α der ungedämpften Schwingung durch die Beziehung

$$\gamma^2 = \alpha^2 - 2\varepsilon^2$$

zusammenhängt. Diese Beziehungen sind wichtig für die Theorie der Registrierapparate.[1])

[1]) Vgl. Kap. 9, Abschn. XI ds. Bd. des Handb.

Ist keine Dämpfung vorhanden ($\varepsilon = 0$), so kommt im Falle der Resonanz

$$\bar{s} = \frac{ct}{2\alpha m}\sin\alpha t,$$

wonach die Amplitude der Zwangschwingung jetzt mit der Zeit gleichförmig anwächst.

12. Das ebene punktförmige (mathematische) Pendel; Bewegungen auf Kurven im Schwerefeld. Die längs der Bahnkurve wirksame Kraft $m f(s)$ sei nun nicht mehr eine Funktion der Zeit t, sondern des Ortes s, also nicht mehr ein äußerer Zwang, sondern eine von der Gestalt und von der Lage der Bahn im Kraftfelde abhängige Kraft. Hierher gehört insbesondere die Bewegung unter dem Einfluß der Schwere; ist nämlich φ die Neigung der Bahntangente gegen eine wagerechte Ebene, so ist $f(s) = g\sin\varphi$, wobei φ durch die Kurvengestalt als Funktion von s bestimmt ist. Der Massenpunkt erfahre bei seiner Bewegung möglicherweise noch einen Widerstand, der etwa mit dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sein mag und dann zu $\frac{1}{2}m\varepsilon v^2$ angesetzt werden kann. Die Bewegung gehorcht jetzt der Differentialgleichung

$$\ddot{s} \pm \frac{\varepsilon}{2}\dot{s}^2 = f(s), \tag{1}$$

welche man auch auf die Form bringen kann

$$\frac{dv^2}{ds} \pm \varepsilon v^2 = 2f(s).$$

Hierbei gilt bei positivem ε das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem $\dot{s}$ positiv oder negativ ist. Das zu den Anfangswerten s_0 und v_0 gehörige erste Integral

$$v^2 = v_0^2 e^{\mp\varepsilon(s-s_0)} + 2e^{\mp\varepsilon s}\int_{s_0}^{s} e^{\pm\varepsilon s} f(s)\,ds \tag{2}$$

liefert die Geschwindigkeit als Funktion der Bogenlänge s, wonach dann vollends der Zusammenhang zwischen s und t durch eine Quadratur

$$t = \int_{s_0}^{s}\frac{ds}{v} \tag{3}$$

gefunden wird.

Der wichtigste Sonderfall betrifft die Bewegung auf einem in lotrechter Ebene liegenden Kreise vom Halbmesser l. Da man hierbei zur Vermeidung der Reibung an Stelle einer kreisförmigen Führungskurve in der Regel eine Stange von der Länge l verwendet, die sich um ihr eines Ende in einem Gelenk von wagerechter Achse drehen kann und am anderen Ende den Massenpunkt m trägt, gegen dessen Masse die Stangenmasse vernachlässigbar sein soll, so spricht man von einem (p u n k t f ö r m i g e n oder m a t h e m a t i s c h e n) P e n d e l[1]. Wie später[2]) gezeigt wird, verhält sich jedes wirkliche Pendel von nicht vernachlässigbarer Stangenmasse kinematisch wie ein ganz bestimmtes mathematisches Pendel, so daß die folgenden Ergebnisse (mit Ausnahme der Berechnung des Gelenkdruckes) auch für die wirklichen Pendel gelten.

---

[1]) Die klassischen Ergebnisse der Pendeltheorie verdankt man G. GALILEI, Discorsi usw. Leiden 1638; deutsch in Ostwalds Klassikern d. exakt. Wiss. Bd. 11, S. 75 u. 83; CH. HUYGENS, Horologium oscillatorium. Paris 1673; deutsch in Ostwalds Klassikern d. exakt. Wiss. Bd. 192; L. EULER, Mechanica sive motus scientia. Petersburg 1736.

[2]) S. Kap. 8 Ziff. 8 ds. Bd. des Handb.

Es ist zweckmäßig, an Stelle des Bogens s zunächst den Neigungswinkel φ der Pendelstange gegen die Lotlinie einzuführen, also $ds = l\,d\varphi$ und $f(s) = -g\sin\varphi$ zu setzen. Sieht man von Bewegungswiderständen vorläufig ab ($\varepsilon = 0$), so nimmt (1) die Form an

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{4}$$

Läßt man die Bewegung mit $\varphi_0 = 0$ und der Geschwindigkeit $v_0 \neq 0$ im tiefsten Punkte beginnen, so liefert (2)

$$v^2 = v_0^2 - 2gl + 2gl\cos\varphi. \tag{5}$$

Führt man weiter an Stelle von φ die neue Veränderliche $x = \sin\frac{\varphi}{2}$ ein, so geht diese Gleichung über in

$$\dot{x}^2 = \frac{g}{l}(1 - x^2)\left(\frac{v_0^2}{4gl} - x^2\right). \tag{6}$$

Man hat hier offenbar zwei Fälle zu unterscheiden: je nachdem der vom Anfangsstoß abhängige Ausdruck $v_0^2/4gl$ ein echter oder unechter Bruch ist, wird $\dot{\varphi} = 0$ für einen reellen oder für keinen reellen Ausschlag φ. Im ersten Falle ist die Bewegung des Pendels oszillatorisch (sog. **Librationsbewegung**), im zweiten Falle überschlägt es sich (sog. **Rotationsbewegung**).

a) **Oszillatorische Pendelbewegung.** Man setzt $v_0^2/4gl = k^2 < 1$ und hat dann als Lösung[1]) der Gleichung (6) die Bewegungsgleichung des Pendels

$$\sin\frac{\varphi}{2} = x = k\,\mathrm{sn}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}};\, k\right). \tag{7}$$

Dies ist eine Schwingung mit der Amplitude

$$\varphi_1 = 2\arcsin k = 2\arcsin\frac{v_0}{\sqrt{4gl}}$$

und der Schwingungsdauer

$$T = 4\mathrm{K}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

wo K das zum Modul k gehörige vollständige elliptische Integral erster Gattung bedeutet. Da der Modul von der Amplitude abhängt, so tut dies auch die Schwingungsdauer T. Für nicht zu große Amplituden φ_1 ist diese Abhängigkeit allerdings nur unwesentlich, wie aus folgender Tafel hervorgeht; diese gibt den Ausdruck $\Delta(\varphi_1) = \frac{2}{\pi}\mathrm{K} - 1$ an, mit Hilfe dessen man die Schwingungsdauer auch in der Form schreiben kann

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,[1 + \Delta(\varphi_1)].$$

φ_1	$\Delta(\varphi_1)$
0°	0,0000
10°	0,0019
20°	0,0076
30°	0,0174
40°	0,0313
50°	0,0498
60°	0,0732
70°	0,1022
80°	0,1375
90°	0,1804
120°	0,3729
150°	0,7682
180°	∞

In erster Näherung ist, unabhängig von der Amplitude,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(Galilei-Huygensches Gesetz vom **Isochronismus kleiner Pendelschwingungen**), und der Fehler dieser Formel bleibt bis zu Ausschlägen von 22° kleiner als 1%; die zweite Näherung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + 0{,}0019\left(\frac{\varphi_1}{10}\right)^2\right],$$

wo φ_1 in Bogengraden auszudrücken ist, gibt die Schwingungsdauer noch bei Ausschlägen von 70° bis auf 1% richtig an. Das Bewegungsgesetz (7) selbst

[1]) Vgl. die Lehrbücher der elliptischen Funktionen.

kann für kleine Amplituden in der Form $\varphi = \varphi_1 \sin\left(t\sqrt{g/l}\right)$ geschrieben werden, wonach die Schwingung um so genauer als harmonisch angesehen werden darf, je kleiner die Ausschläge sind.

b) **Rotatorische Pendelbewegung.** Man setzt jetzt $4gl/v_0^2 = k^2 < 1$ und hat als Integral von (6)

$$\sin\frac{\varphi}{2} = x = \operatorname{sn}\left(\frac{t}{k}\sqrt{\frac{g}{l}};\, k\right).$$

Dies ist eine Umlaufbewegung; die Dauer eines vollen Umlaufes beträgt

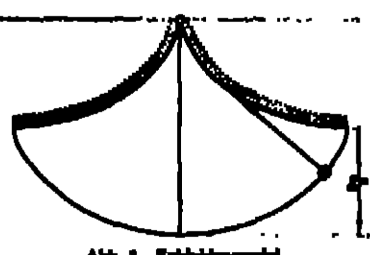
$$T = 4kK\sqrt{\frac{l}{g}};$$

die oberste Stelle wird mit der Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 4gl}$ durchschritten.

Im Grenzfall, daß $k = 1$ wird, artet die Lösung aus in

$$\sin\frac{\varphi}{2} = x = \mathfrak{Tg}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

der oberste Punkt wird jetzt nur noch asymptotisch nach unendlich langer Zeit mit der Geschwindigkeit Null erreicht (sog. **Limitationsbewegung**).


Abb. 3. Zykloidenpendel.

Die **Führungskraft** k_f, die sich als Zug in der Pendelstange und demgemäß als Beanspruchung des Gelenkes äußert, ist sowohl im oszillatorischen wie im rotatorischen Falle dargestellt durch $k_f = m\left(\frac{v^2}{l} + g\cos\varphi\right)$, wofür man nach (5) auch schreiben darf

$$k_f = \frac{m}{l}\left(v_0^2 - 2gl + 3gl\cos\varphi\right).$$

Ersetzt man die Kreisbahn durch eine Zykloide, welche von einem Punkt des Umfanges eines unterhalb einer waagerechten Geraden abrollenden Kreises vom Halbmesser r beschrieben wird, so entsteht das sog. **Zykloidenpendel**[1]). Weil die Evolute einer solchen Zykloide eine mit dieser kongruente Zykloide ist, welche gegen jene nach oben um $2r$, nach der Seite um einen halben Zykloidenbogen verschoben ist, so kann man das Zykloidenpendel (Abb. 3) durch ein vollkommen biegsames Band verwirklichen, das an der stofflich ausgebildeten Evolutenzykloide abrollt. Die Schwingungsdauer des Zykloidenpendels ist **unabhängig von der Größe der Amplitude**, nämlich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}.$$

Man nennt die Zykloide wegen dieser Eigenschaft auch **Tautochrone**[2]).

In diesem Zusammenhang mag erwähnt werden, daß die auf die geschilderte Weise entstandene Zykloide zugleich auch unter allen Kurven, mit denen man zwei ihrer Punkte sonst noch verbinden könnte, diejenige ist, auf der ein Massenpunkt infolge seiner Schwere, jedoch ohne Reibung, von dem höher gelegenen dieser beiden Punkte zu dem tiefer gelegenen in der kürzesten Zeit gelangen

[1]) Vgl. Chr. Huygens, Horologium oscillatorium. Paris 1673; deutsch in Ostwalds Klassikern d. exakt. Wiss. Bd. 192, S. 27.

[2]) Wie I. Newton (Philosophiae naturalis principia mathematica, Buch II, Abschn. VI) bewiesen hat, bleibt dieser Tautochronismus auch noch bei einem zur Geschwindigkeit proportionalen Widerstand erhalten.

würde. Wegen dieser Eigenschaft heißt die Zykloide auch **Brachistochrone**[1]). Der obere Punkt ist dabei stets eine Spitze der Zykloide; der untere darf auch jenseits des unteren Scheitels der Kurve liegen, jedoch keinesfalls durch eine weitere Spitze vom oberen getrennt sein.

Schließlich soll hier noch die **Bewegung des Pendels im widerstehenden Mittel** bei quadratischem Widerstandsgesetz, jedoch nur für kleine Ausschläge, behandelt werden[2]). Mit $f(s) = -g\varphi = -\frac{g}{l}s$ geht (2) über in

$$v^2 = \frac{2g}{l\varepsilon^2}\left[(1 \mp \varepsilon s) - (1 \mp \varepsilon s_n)\,e^{\mp\varepsilon(s - s_n)}\right]. \tag{8}$$

Die Zeit ist dabei vom n-ten Ausschlag s_n gerechnet, und zwar gilt das obere oder das untere Vorzeichen, je nachdem s_n ein negativer oder ein positiver Ausschlag war. Entwickelt man die rechte Seite der Gleichung nach Potenzen von s und s_n und behält die Glieder bis zur zweiten Ordnung bei, so geht sie über in $v^2 = \frac{g}{l}(s_n^2 - s^2)$, woraus sich die Dauer einer Viertelschwingung zu

$$\frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

berechnet. Die Schwingungsdauer wird demgemäß wenigstens in erster Näherung nicht durch die Bewegungswiderstände beeinflußt, ein Ergebnis, dessen große physikalische Bedeutung einleuchtet.

Zur Berechnung der Amplituden s_n etwa aus der Anfangsamplitude s_1 geht man folgendermaßen vor. Schreibt man Gleichung (8) kurzweg in der Form $v^2 = a e^{\varepsilon s} + b(1 + \varepsilon s)$, so gilt für zwei aufeinanderfolgende größte Ausschläge s_n (positiv) und s_{n+1} (negativ)

$$a e^{\varepsilon s_n} = -b(1 + \varepsilon s_n), \qquad a e^{\varepsilon s_{n+1}} = -b(1 + \varepsilon s_{n+1}),$$

woraus man durch Entfernen von a und b die Beziehung herleitet

$$\varepsilon s_n - \ln(1 + \varepsilon s_n) = \varepsilon s_{n+1} - \ln(1 + \varepsilon s_{n+1}).$$

Zeichnet man also die Kurve

$$y = \varepsilon s - \ln(1 + \varepsilon s)$$

(Abb. 4) in einem kartesischen Koordinatensystem $(\varepsilon s, y)$, so gehört zu zwei aufeinanderfolgenden Ausschlägen s_n und s_{n+1} je die gleiche Ordinate y. Die Amplituden s_i bestimmen sich demgemäß aus s_1 wie folgt: Man sucht auf dem rechten Kurvenast den Punkt mit der Abszisse εs_1 und findet damit auf dem linken Ast in gleicher Höhe den Punkt εs_2. Entsprechend dem jetzt eintretenden Vorzeichenwechsel von s trägt man εs_2 nach rechts auf, gewinnt damit links εs_3 usf. Da der linke Ast die lotrechte Asymptote $\varepsilon s = -1$ hat, so muß der Betrag des zweiten und aller folgenden Ausschläge kleiner als $1/\varepsilon$ sein, wie groß auch der erste Ausschlag s_1 gewesen sein mag.

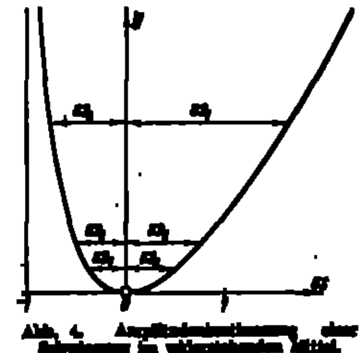


Abb. 4. Amplitudenbestimmung einer Schwingung im widerstehenden Mittel.

14. Die Bewegung auf einer bewegten Kurve. Obwohl die sog. Lagrangeschen Gleichun-

[1]) Diese Eigenschaft der Zykloide wurde von G. W. Leibniz entdeckt; vgl. W. Schell, Theorie der Bewegung und Kräfte. Bd. I, S. 408–411. Leipzig 1879.

[2]) Nach einer von R. v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, S. 188. Leipzig u. Berlin 1914, für Schwingungen von Flüssigkeitssäulen entwickelten Methode.

gen erster Art [Ziff. 2, Gleichung (6)] die Bewegung eines Massenpunktes auch auf beweglichen Kurven umfassen, so ist es doch fast stets viel zweckmäßiger, solche Aufgaben (sog. rheonome Führung mit einem Freiheitsgrad) auf die Gleichungen für die Bewegung auf festen Kurven [Ziff. 2, Gleichung (5)] dadurch zurückzuführen, daß man sich auf den Standpunkt eines mit der Kurve bewegten Beobachters stellt und den bereits früher[1]) nachgewiesenen Zusammenhang zwischen der von diesem Beobachter bemerkten Relativbeschleunigung $\mathfrak{w}_r$ und der wirklichen Beschleunigung $\mathfrak{w}_w$ beizieht, nämlich in Vektorform

$$\mathfrak{w}_w = \mathfrak{w}_r + \mathfrak{w}_f - \mathfrak{w}_c. \qquad (1)$$

Dabei ist die Führungsbeschleunigung $\mathfrak{w}_f$ die tatsächliche Beschleunigung desjenigen Kurvenpunktes, der sich soeben mit dem auf der Kurve laufenden Massenpunkt deckt; ferner ist $\mathfrak{w}_c$ die Coriolisbeschleunigung.

Besteht die Bewegung der als starr vorausgesetzten Kurve aus der Translation $\mathfrak{v}_0$ eines mit der Kurve starr verbundenen Bezugspunktes O zusammen mit einer Drehung um eine durch O gehende Achse mit dem Vektor $\mathfrak{o}$ der Winkelgeschwindigkeit ω, und ist $\mathfrak{r}$ der Fahrstrahl von O nach dem Massenpunkt, so gilt[2])

$$\mathfrak{w}_f = \dot{\mathfrak{v}}_0 + [\dot{\mathfrak{o}}\mathfrak{r}] + [\mathfrak{o}[\mathfrak{o}\mathfrak{r}]],$$

$$\mathfrak{w}_c = 2[\mathfrak{v}_r\mathfrak{o}],$$

unter $\mathfrak{v}_r$ die Relativgeschwindigkeit des Massenpunktes auf seiner Kurve verstanden. Da die Gesamtkraft $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^e + \mathfrak{k}^r = m\mathfrak{w}_w$ ist, so hat man zufolge (1) die folgende Gleichung für die **Relativbewegung**:

$$m\mathfrak{w}_r = \mathfrak{k} - m\mathfrak{w}_f + m\mathfrak{w}_c. \qquad (2)$$

Die rechts stehenden Scheinkräfte $-m\mathfrak{w}_f$ und $+m\mathfrak{w}_c$ werden wohl auch die **Führungskraft** und die **Corioliskraft** genannt. Bei Drehungen der Kurve ist in der Führungskraft insbesondere stets auch die **Fliehkraft** $-m[\mathfrak{o}[\mathfrak{o}\mathfrak{r}]]$ mit enthalten.

Von den hierher gehörenden Aufgaben sind insbesondere diejenigen behandelt, wo die bewegte Kurve in einer sich drehenden Ebene liegt. Wir begnügen uns mit folgenden zwei typischen Fällen.

a) **Bewegung eines Massenpunktes im Schwerefeld auf einer Kurve, die in einer lotrechten, sich um eine lotrechte Achse gleichförmig drehenden Ebene liegt** [Urbild des **Fliehkraftreglers**[3])]. Ist φ die Neigung der Kurventangente gegen die Drehachse (Abb. 5), r der Abstand des Massenpunktes von der Drehachse und also $s_t = r\,\mathrm{ctg}\,\varphi$ die Subtangente und $s_n = r\,\mathrm{tg}\,\varphi$ die Subnormale, so liefert die Zerspaltung der Gleichung (2) in ihre natürlichen Komponenten nach Tangenten-, Haupt- und Binormalenrichtung die drei Gleichungen

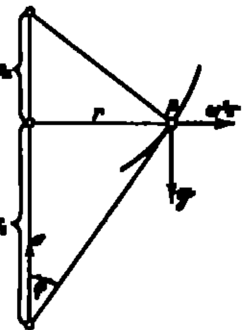


Abb. 5.

$$\dot v_r = r\omega^2\sin\varphi - g\cos\varphi = \omega^2\cos\varphi\left(s_n - \frac{g}{\omega^2}\right),$$

$$K_h^r = m[r\omega^2\cos\varphi + g\sin\varphi] = m\omega^2\sin\varphi\left(s_t + \frac{g}{\omega^2}\right),$$

$$K_b^r = 2m\omega v_r\sin\varphi.$$

Die erste dieser drei Gleichungen bestimmt die Bewegung, die zweite und dritte liefern die Reaktionskraft

[1]) S. Kap. 5, Ziff. 26 ds. Bd. des Handb.
[2]) S. Kap. 5, Ziff. 25 u. 26 ds. Bd. des Handb.
[3]) S. Kap. 9, Abschn. IV ds. Bd. des Handb.

der Kurve, also den Druck des Massenpunktes gegen die Kurve. Diejenigen Kurvenpunkte P^*, für welche $s_n = g/\omega^2$ ist, sind **Gleichgewichtslagen**; solche können nur da vorkommen, wo die Kurve mit zunehmenden r ansteigt. Das Gleichgewicht ist dort stabil, indifferent oder labil, je nachdem in der Umgebung von P^* die Subnormale von unten nach oben abnimmt, gleichbleibt oder zunimmt. Eine Parabel vom Parameter $p = g/\omega^2$ hat die unveränderliche Subnormale p und stellt somit, falls ihre Achse mit der Drehachse zusammenfällt, diejenige Kurve vor, auf der der Massenpunkt an jeder Stelle liegen bleiben oder sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit vorwärtsbewegen kann.

b) **Bewegung auf einer um einen ihrer Punkte gleichförmig sich drehenden, eine wagerechte Ebene beschreibenden Geraden.** Die Führungsbeschleunigung mit dem Betrag $\omega^2 r$, wo r der Abstand des Massenpunktes vom Drehpunkt, ist hier stets nach dem Drehpunkt hin gerichtet. Wirkt in der Geraden eine eingeprägte Kraft $mf(t, r)$, und läßt man außerdem eine der Reaktionskraft N proportionale Reibung zu, so lauten die Gleichungen für die Relativbewegung und für die Reaktionskraft

$$\ddot r + 2\varepsilon \dot r - \omega^2 r = f(t, r), \qquad N = 2m\omega\dot r. \tag{3}$$

Erster Unterfall: Die eingeprägte Kraft $mf(t)$ hängt nur von der Zeit ab, ist also ein äußerer Zwang. Jetzt zerspaltet sich die Lösung der ersten Gleichung (3) wieder in die Eigenbewegung r und die Zwangsbewegung $\bar r$, und zwar ist mit der Abkürzung $h^2 = \varepsilon^2 + \omega^2$

$$r = e^{-\varepsilon t}\left[r_0 \mathfrak{Cof}\, ht + \frac{\dot r_0 + \varepsilon r_0}{h}\mathfrak{Sin}\, ht\right], \qquad \bar r = \frac{1}{h}\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\mathfrak{Sin}\, h(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau.$$

Die relative Eigenbewegung verläuft wegen $h > \varepsilon$ radial auswärts mit immer wachsender Beschleunigung: der Massenpunkt wird durch die Fliehkraft auswärts geschleudert. Die tatsächliche Eigenbewegung ist eine Spirale. Für die Zwangsbeschleunigung gilt das schon früher (Ziff. 11) Gesagte. Dabei ist nur α^2 durch $-\omega^2$ zu ersetzen, wonach jetzt Resonanzen nicht mehr auftreten können.

Zweiter Unterfall: Die eingeprägte Kraft $mf(r)$ hängt nur von der Lage des Punktes auf der Geraden ab. Ist keine Reibung vorhanden ($\varepsilon = 0$), so läßt sich für jede beliebige Form von $f(r)$ das Integral der Bewegung angeben:

$$t = \int_{r_0}^{r}\left[v_0^2 + 2\int_{r_0}^{r}[\omega^2 r + f(r)]\,dr\right]^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Wichtiger ist der Fall, daß Reibung vorhanden, dafür aber die Kraft quasielastisch, etwa eine Federkraft, also von der Form $-m\alpha^2(r - r_0)$ ist [Urbild des **Federreglers**[1])]. Die Bewegungsgleichung lautet nun

$$\ddot r + 2\varepsilon\dot r - \omega^2 r = -\alpha^2(r - r_0). \tag{4}$$

Solange $\alpha^2 \neq \omega^2$ bleibt, kann man diese Gleichung durch Einführen einer neuen Veränderlichen $\varrho = r - \frac{\alpha^2 r_0}{\alpha^2 - \omega^2}$ auf die Gestalt bringen.

$$\ddot\varrho + 2\varepsilon\dot\varrho + (\alpha^2 - \omega^2)\varrho = 0.$$

Für starke Federn ($\alpha^2 > \omega^2$) ist die Bewegung von der Art der in Ziff. 11 untersuchten Eigenbewegungen (harmonische Schwingung mit der Frequenz $\sqrt{\alpha^2 - \omega^2 - \varepsilon^2}$ um die Nullage $\varrho = 0$, falls $\alpha^2 > \omega^2 + \varepsilon^2$; aperiodische Be-

[1]) S. Kap. 9, Abschn. IV ds. Bd. des Handb.

wegung gegen $\varrho = 0$ falls $\alpha^2 \leq \omega^2 + \varepsilon^2$). Für schwache Fesseln ($\alpha^2 < \omega^2$) ist die Bewegung von der Art der Eigenbewegung des soeben erledigten ersten Unterfalles (Hinausschleudern durch die Fliehkraft). Schließlich im Grenzfall $\alpha^2 = \omega^2$ wird das Integral von (4)

$$r = r_0 + \frac{\alpha^2 r_0}{2\varepsilon} t + \frac{2\varepsilon v_{0r} - \alpha^2 r_0}{4\varepsilon^2} (1 - e^{-2\varepsilon t}),$$

falls $\varepsilon \neq 0$ ist, und

$$r = r_0 + v_{0r} t + \frac{\alpha^2 r_0}{2} t^2,$$

falls $\varepsilon = 0$ ist. Dies ist ohne Dämpfung eine gleichförmig beschleunigte radiale Bewegung auswärts; mit Dämpfung nähert sich die Relativgeschwindigkeit asymptotisch dem Wert $\alpha^2 r_0/2\varepsilon$.

14. Die Bewegung auf einer festen Fläche. Ist ein Massenpunkt bei seiner Bewegung an eine feste Fläche gebunden (sog. skleronome Führung mit zwei Freiheitsgraden), so empfiehlt es sich in der Regel, auf die natürlichen Gleichungen (5), Ziff. 2, zurückzugreifen, jedoch die zweite zu zerspalten in ihre Komponenten nach den Richtungen derjenigen beiden Bahnnormalen, von denen die erste in der Tangentialebene der Fläche liegt, die zweite mit der Flächennormalen zusammenfällt. Sind K_f^e und K_n^e die beiden entsprechenden Komponenten der eingeprägten Kraft $\mathfrak{K}^e$ und ψ der Winkel zwischen der Flächennormale und der Hauptnormale der Bahnkurve, so hat man also

$$m\dot v = K_t^e, \qquad m\frac{v^2}{\varrho}\sin\psi = K_f^e, \qquad m\frac{v^2}{\varrho}\cos\psi = K_n^e + K^r. \tag{1}$$

Bei gegebener eingeprägter Kraft $\mathfrak{K}^e$ reichen die beiden ersten Gleichungen zur Bestimmung der Geschwindigkeit und der Bahnkurve aus, weil diese ja auf der Fläche verlaufen soll, durch deren Gestalt eine weitere Beziehung zwischen dem Krümmungshalbmesser ϱ jeder Bahnkurve und dem Winkel ψ von vornherein vorgeschrieben ist. Die dritte Gleichung liefert dann vollends auch noch die senkrecht zur Fläche gerichtete Reaktionskraft $\mathfrak{K}^r$ der Fläche.

Sind keine eingeprägten Kräfte vorhanden, so spricht man wohl auch von einer „kräftefreien" Bewegung und hat dafür nach (1) $v =$ konst. und $\psi = 0$. Die Bewegung erfolgt also mit unveränderlicher Geschwindigkeit auf einer Kurve, deren Hauptnormale allenthalben mit der Flächennormalen zusammenfällt: diese Kurven sind geodätische Linien der Fläche[1]).

Ist die Fläche abwickelbar, so erinnert man sich der Tatsache, daß bei Abwicklung der Fläche in eine Ebene der Ausdruck $\sin\psi/\varrho$ erhalten bleibt. Infolgedessen kann man die Bahn in der Abwicklung einfach dadurch erhalten, daß man das auf der Fläche liegende Kraftfeld (K_t^e, K_f^e) mit abwickelt. Ist die Fläche beispielsweise ein Zylinder mit lotrechten Erzeugenden und die einzige eingeprägte Kraft die Schwere, so wird die Bahn in der Abwicklung eine Wurfparabel (Ziff. 3), deren Achse die Richtung der abgewickelten Erzeugenden hat. Durch Wiederaufwickeln der Ebene auf den Zylinder entsteht die wirkliche Bahnkurve. Ist die Fläche ein gerader Kreiskegel mit lotrechter Achse und der Öffnung 2α, die eingeprägte Kraft wiederum die Schwere, so entsteht in der Abwicklung die Bahn einer Zentralbewegung mit einer Kraft vom festen Betrag $mg\cos\alpha$; das Zentrum ist die abgewickelte Kegelspitze. Diese Bewegung läßt sich mit Hilfe von elliptischen Funktionen darstellen (vgl. Ziff. 5).

[1]) Dieser Satz stammt von L. EULER, Mechanica sive motus scientia. Bd. II, § 813. Der Satz ist wichtig geworden für die Begründung der Hertzschen Mechanik, insofern die geodätischen Kurven zugleich die geradesten Linien einer Fläche sind; vgl. Kap. 2, Ziff. 17 ds. Bd. des Handb.

15. Die Bewegung auf einer Drehfläche; das punktförmige Raumpendel. Ist die Fläche eine Drehfläche $r = f(z)$, und besitzt die eingeprägte Kraft ein Potential $V(z)$, welches symmetrisch hinsichtlich der zur z-Achse gewählten Drehachse der Fläche sein soll, so benützt man am besten die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art [Ziff. 2, Gleichung (7)]. Mit Zylinderkoordinaten z, r, φ wird die Bewegungsenergie $T = \frac{1}{2} m(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$. Da mithin $\partial T/\partial\varphi = 0$ und außerdem auch $Q_\varphi = 0$ ist, so bleibt der Ausdruck $\partial T/\partial\dot{\varphi}$ während der ganzen Bewegung fest; also ist

$$r^2\dot{\varphi} = h, \tag{1}$$

wo (wie schon ähnlich in Ziff. 5) h die doppelte Flächengeschwindigkeit der Projektion des Fahrstrahls auf eine Ebene $z =$ konst. bedeutet. Der Energiesatz erfordert $T + V = mk$, wo k ein zweiter Festwert ist, der die Stärke des die Bewegung einleitenden Anfangsstoßes mißt. Aus der expliziten Energiegleichung

$$m\left\{[1 + f'^2(z)]\dot{z}^2 + \frac{h^2}{f^2(z)}\right\} + 2V(z) = 2mk$$

folgt

$$t = \int_{z_0}^{z} \sqrt{\frac{1 + f'^2(z)}{2k - \frac{2}{m}V(z) - \frac{h^2}{f^2(z)}}}\, dz \tag{2}$$

und, nachdem hieraus durch Funktionsumkehrung z als Funktion von t ermittelt ist,

$$\varphi = \varphi_0 + h\int_0^t \frac{dt}{f^2(z)}. \tag{3}$$

Das bekannteste Beispiel[1]) ist das **punktförmige Raumpendel** (**sphärische Punktpendel**)[2]), verwirklichbar durch eine um ein festes Kugelgelenk drehbare Stange, deren Masse vernachlässigbar ist gegen die am freien Stangenende sitzende, der Schwere unterworfene Pendelmasse. Weist die positive z-Achse aus dem Kugelgelenkmittelpunkt aufwärts, und ist l die Pendellänge, so kommt wegen $V(z) = mgz$ statt (2) und (3)

$$t = l\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{Z(z)}}, \qquad \varphi = \varphi_0 + hl\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{Z(z)}}, \tag{4}$$

wobei zur Abkürzung

$$Z(z) = 2(k - gz)(l^2 - z^2) - h^2$$

gesetzt ist. Hiernach sind die Zeit t und das Azimut φ als elliptische Integrale erster und dritter Gattung in z dargestellt. Auf die rein mathematische Angelegenheit der Auswertung und Umkehrung dieser Integrale braucht hier nicht näher eingegangen zu werden. Die wesentlichen Eigenschaften der Bewegung lassen sich schon aus den Integralen selbst ablesen.

Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß die Bewegung in der Höhe z_0, wo $|z_0| < l$ ist, mit wagerechtem Anfangsstoß beginnt, so daß infolge der ersten

[1]) Über die Literatur der bisher gelösten Probleme vgl. Enzykl. d. math. Wiss. IV, Bd. 1, Art. 6 (Stäckel), S. 504.

[2]) Eine sehr klare Darstellung der Theorie dieses Pendels findet man bei A. Gray, Treatise on gyrostatics and rotational motion, Kap. 15. London 1918. Die Lösung in der heute üblichen Form stammt von A. Tissot, Journ. de math. (1) Bd. 17, S. 88. 1852. Weitere Literatur zum Problem des punktförmigen Raumpendels findet man in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, Art. 6 (Stäckel), S. 505ff; den dort aufgezählten Arbeiten ist insbesondere noch diejenige von F. R. Moulton, Palermo Rend. Circ. Mat. Bd. 32, S. 338. 1911 hinzuzufügen.

Gleichung (4) $Z(z_0) = 0$ wird. Führt man den hieraus sich ergebenden Wert von h in die Funktion $Z(z)$ ein, so nimmt sie die Gestalt an

$$Z(z) = 2g\,(z_0 - z)(z - z_1)(z_2 - z),$$

wobei z_1 und z_2 zwei leicht auch in h, l und z_0 auszudrückende Längen sind, die den Ungleichungen gehorchen: $-l < z_1 < 0$ und $z_2 > l$ sowie $z_0 + z_1 < 0$. Man schließt vollends rasch auf folgendes Aussehen der Bahnkurve: Die Pendelmasse bewegt sich zwischen dem oberen Grenzkreis $z = z_0$ und dem unteren $z = z_1$ auf einer Kurve hin und her, welche diese beiden Grenzkreise berührt, sich zwar im allgemeinen nicht schließt, aber durchaus periodisch verläuft; die Bahn ist zeitlich und räumlich symmetrisch zu jeder Meridianebene durch einen obersten oder untersten Bahnpunkt; der untere Grenzkreis $z = z_1$ gehört stets der unteren Halbkugel an und liegt näher beim unteren Kugelpol $z = -l$ als der obere Grenzkreis $z = z_0$ beim oberen Kugelpol $z = l$; in der senkrechten Projektion auf eine wagerechte Ebene ähnelt die Bahn einer Ellipse, die sich in Richtung der Bewegung mit einer festen Winkelgeschwindigkeit ω dreht, welche um so kleiner ist, je tiefer bei gegebenem oberem Werte z_0 der untere Wert z_1 liegt; und zwar fällt die Differenz der Azimute der Projektionen eines obersten und eines untersten Punktes stets zwischen 90° und 180° [Abb. 6 zeigt die Horizontalprojektion, Abb. 7 die räumliche Form einer Bahnkurve[1])].

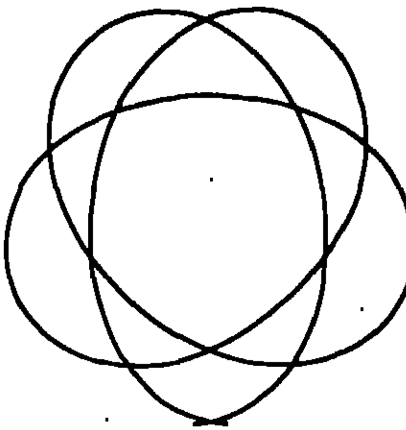


Abb. 6. Horizontalprojektion der Bahn des punktförmigen Raumpendels.

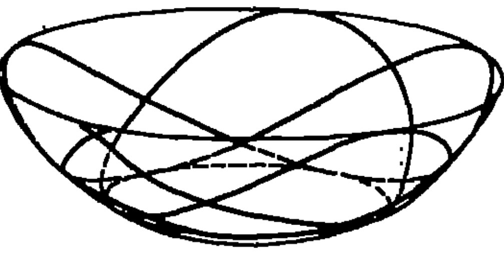


Abb. 7. Perspektivische Darstellung der Bahn des punktförmigen Raumpendels.

Liegen die beiden begrenzenden Parallelkreise z_0 und z_1 nahe beim unteren Kugelpol, so hat man es mit einem Raumpendel von kleinem Ausschlage zu tun und findet dann als Bahn in erster Näherung eine Ellipse, welche in derselben Weise durchlaufen wird, wie bei einer vom unteren Kugelpol aus wirkenden quasielastischen anziehenden Zentralkraft (Ziff. 5), wo $\mu = g/l$ zu setzen wäre. Die Umlaufdauer ist $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. In zweiter Näherung findet man, daß sich die Ellipse im Bewegungssinne mit der Winkelgeschwindigkeit[2])

$$\omega = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\alpha_0\alpha_1 \tag{5}$$

dreht, wo α_0 und α_1 die in Richtung der beiden Ellipsenhauptachsen gemessenen Winkelamplituden, d. h. die halben Öffnungswinkel der beiden Kreiskegel sind,

[1]) Experimentell aufgenommene Bahnen sind in dem Buche von A. G. WEBSTER, The dynamics usw., 3. Aufl., S. 50. 1925 wiedergegeben.

[2]) Vgl. R. GRAMMEL, Die mechanischen Beweise für die Bewegung der Erde, S. 23–25. Berlin 1922. Je nach dem Genauigkeitsgrad der Näherungsrechnung findet sich in der Literatur statt des Faktors $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ auch der Faktor [illegible] und [illegible].

welche auf den Parallelkreisen z_0 und z_1 stehen und ihre Spitze im Kugelmittelpunkt haben.

Von den Sonderfällen des Raumpendels ist außer dem bereits in Ziff. 12 erledigten Fall $h = 0$ des ebenen Pendels noch das sog. **Kegelpendel** erwähnenswert, bei welchem die Pendelstange einen geraden Kreiskegel mit lotrechter Achse, die Pendelmasse also einen wagerechten Parallelkreis beschreibt, der übrigens unter dem Kugeläquator liegen muß. Damit dies eintrete, muß die Gleichung $Z = 0$ eine Doppelwurzel $z = z_0 = z_1$ besitzen, wozu ein die doppelte Flächengeschwindigkeit $h = (l^2 - z_0^2)\sqrt{g/|z_0|}$ erzeugender Anfangsstoß gehört. Im Hinblick auf (1) folgt daraus die Umlaufsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{|z_0|}{g}},$$

also ebenso groß wie die Schwingungsdauer eines ebenen punktförmigen Pendels von der Länge $|z_0|$ bei unendlich kleinen Ausschlägen. Die Zugkraft in der Pendelstange hat hier den einfachen Wert $mg/\cos\alpha$, wo α der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist.

16. Die Bewegung auf einer bewegten Fläche. Man kann die Bewegung eines Massenpunktes auf einer selbst irgendwie bewegten Fläche (sog. **rheonome Führung mit zwei Freiheitsgraden**) in eine Bewegung auf fester Fläche dadurch verwandeln, daß man, wie schon bei bewegten Kurven (Ziff. 13), den wirklichen Kräften die von der Bewegung der Fläche herrührenden Scheinkräfte $-m\mathfrak{w}_f$ und $+m\mathfrak{w}_c$ hinzufügt. Wir verzichten auf die Wiedergabe der zahlreichen in der Literatur behandelten Beispiele, die im wesentlichen nur mathematisches Interesse erwecken.

IV. Die Relativbewegung eines Massenpunktes auf der sich drehenden Erde.

17. Die Bewegung relativ zu einem bewegten Raum. Die allgemeine Relativbewegung eines Massenpunktes kann nach zwei Methoden behandelt werden. Entweder ermittelt man seine Absolutbewegung und leitet daraus kinematisch[1]) seine Relativbewegung her; oder man fügt wieder den wirklichen Kräften die vom bewegten Raum herrührenden Scheinkräfte hinzu. Ist der bewegte Raum insbesondere die Erde, so sind die Scheinkräfte nach Ziff 13

$$-m\dot{\mathfrak{v}}_0, \qquad m[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{o}}], \qquad m\big[\mathfrak{o}[\mathfrak{r}\mathfrak{o}]\big], \qquad 2m[\mathfrak{v}_r\mathfrak{o}],$$

wobei $\mathfrak{v}_0$ den Geschwindigkeitsvektor des Erdmittelpunktes, $\mathfrak{r}$ den Fahrstrahl vom Erdmittelpunkt nach der Masse m, $\mathfrak{v}_r$ die Relativgeschwindigkeit der Masse m gegen die Erde und $\mathfrak{o}$ den Vektor der Erddrehung vom Betrage

$$\omega = \frac{2\pi}{86164}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

bedeutet. Die erste Scheinkraft, $-m\dot{\mathfrak{v}}_0$, herrührend von der Krümmung der Erdbahn und der Ungleichförmigkeit der Bewegung um die Sonne, und ebenso die zweite Scheinkraft, $m[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{o}}]$, herrührend von der Ungleichförmigkeit der Erddrehung sowie von Präzession und Nutation der Erdachse[2]), können, da für jeden Nachweis zu klein, außer Betracht bleiben. Von der Fliehkraft $m\big[\mathfrak{o}[\mathfrak{r}\mathfrak{o}]\big]$ darf ebenfalls abgesehen werden, falls man als Schwerevektor schon gleich die auf der Erdoberfläche senkrechte Resultante aus Gravitationskraft und Flieh-

[1]) S. Kap. 5 ds. Bd. des Handb. [2]) S. Kap. 8, Ziff. 33 ds. Bd. des Handb.

kraft ansieht und die ganz geringe Krümmung der Feldlinien dieses Schwerevektors mit zunehmender Höhe über der Erdoberfläche außer acht lassen will. Beschränkt man sich überdies auf die allein nachweisbaren Effekte erster Ordnung in ω, so ist es für die Corioliskraft $2m[\mathfrak{v}, \mathfrak{o}]$ gestattet, den Vektor $\mathfrak{o}$ (Abb. 8) für jeden Punkt A der Erdoberfläche mit der geographischen Breite φ in eine Vertikaldrehung $\mathfrak{o}_1$ vom Betrag $\omega\cos\varphi$ und eine Azimutaldrehung $\mathfrak{o}_2$ vom Betrag $\omega\sin\varphi$ zu zerspalten und die Wirkung jeder dieser beiden Drehungen für sich zu untersuchen.

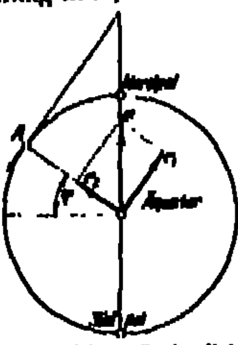


Abb. 8. Kinematik der Erddrehung.

18. Die Eötvössche Wage; der Schienendruck. Die von der Vertikaldrehung $\mathfrak{o}_1$ hervorgerufene Corioliskraft ist bei waagerechter Bewegung $\mathfrak{v}_r$ lotrecht gerichtet und hat den Betrag $2mv_r\omega\cos\varphi\sin\vartheta$, unter ϑ den Winkel zwischen der Nordrichtung und dem Vektor $\mathfrak{v}_r$ verstanden. Und zwar wirkt diese Kraft aufwärts oder abwärts, je nachdem $\mathfrak{v}_r$ eine östliche oder eine westliche Komponente besitzt, und äußert sich in einem Gewichtsverlust oder Gewichtsgewinn, der für einen 1 kg schweren Körper bei einer Geschwindigkeit von 1 m/sec nach Osten oder Westen in unseren Breiten rund 10 mg ausmacht.

Auf diese Gewichtsunterschiede hat Eötvös[1]) hingewiesen anläßlich der von Hecker bei Fahrten auf hoher See gemachten Schweremessungen. Nach dem Vorschlage von Eötvös führt man den Versuch im Laboratorium am besten mit Hilfe eines Wagebalkens aus, der (Abb. 9) an seinen beiden Enden gleiche Massen trägt und um eine waagerechte Achse stabil schwingen kann. Setzt man das Stativ des Wagebalkens auf eine Drehscheibe und läßt diese um die lotrechte Achse umlaufen, so bewegen sich die Massen abwechslungsweise nach Osten und nach Westen; ihre Gewichte pulsieren im Rhythmus der Drehung und veranlassen den Wagebalken zu Schwingungen um seine waagerechte Achse. Diese sind gut zu beobachten, wenn sie in Resonanz mit den Eigenschwingungen des Wagebalkens gesetzt werden.



Abb. 9. Eötvössche Wage zum Nachweis der Erddrehung.

Im Gegensatz zur Vertikaldrehung $\mathfrak{o}_1$ erzeugt die Azimutaldrehung $\mathfrak{o}_2$ bei Bewegung auf waagerechter erdfester Bahn eine von der Bewegungsrichtung unabhängige, auf der nördlichen Halbkugel stets nach der rechten, auf der südlichen Halbkugel stets nach der linken Bahnseite gerichtete Corioliskraft vom Betrage $2mv_r\omega\sin\varphi$. Diese äußert sich bei Eisenbahnen in erhöhtem Druck auf die rechte bzw. linke Schiene, bei Flußläufen in verstärkter Ausspülung des rechten bzw. linken Ufers [v. Baersches Gesetz[2])].



Abb. 10. Wurf nach Osten und nach Westen.

19. Wurf und Fall. Wirft man einen Körper in der Ostwestebene E des Beobachtungsortes A (Abb. 10), und zwar das eine Mal ostwärts, das andere Mal mit derselben Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und unter derselben Elevation α westwärts, so hat man infolge der Vertikaldrehung $\mathfrak{o}_1$ zu den Vektoren $\mathfrak{v}$ jeweils

[1]) R. Eötvös, Ann. d. Phys. (4) Bd. 59, S. 743. 1919; vgl. auch D. Pekár, Naturwissensch. Bd. 7, S. 329. 1919.

[2]) Über die Literatur hierzu vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, Art. 6 (Stäckel), S. 487.

den ostwärts gerichteten Vektor $\mathfrak{u}$ vom Betrage $u = R\omega\cos\varphi$ hinzuzufügen (wo R der Erdhalbmesser ist), um die wahre Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_o$ bzw. $\mathfrak{v}_w$ zu erhalten, und zwar ist dann $v_o > v_w$ und $\alpha_o < \alpha_w$. Die Körper beschreiben, soweit vom Luftwiderstand abgesehen werden darf, Bögen von Keplerellipsen (Ziff. 6), deren Brennpunkt die Erdmitte O ist (Abb. 11 als Erweiterung von Abb. 10 mit gleicher Zeichenebene E). Diese Ellipsen sind verschieden und müssen auch von einem erdfesten, die Drehung mitmachenden Beobachter aus verschieden erscheinen.

Wirft man den Körper andererseits vom Äquator aus nord- bzw. südwärts, so eilt er infolge der ihm durch die Erddrehung $\mathfrak{o}$ mitgegebenen westöstlichen Umfangsgeschwindigkeit zu östlicheren Meridianen, erleidet also eine scheinbare Seitenablenkung nach rechts bzw. links. Derselbe Effekt wird bei äquatorfernen Abschußorten durch die Vertikaldrehung $\mathfrak{o}_1$ allein erzeugt, ist aber für die gewöhnlich erreichbaren Wurfweiten klein von zweiter Ordnung und wird stark übertönt von einer stets westlichen Abtrift, die davon herrührt, daß sich der vom Erdmittelpunkt zum fliegenden Geschoß gezogene Fahrstrahl auf Grund des zweiten Keplerschen Gesetzes (Ziff. 5) langsamer in westöstlicher Richtung dreht, als der ursprüngliche Fahrstrahl vom Erdmittelpunkt nach dem Abschußpunkt dies infolge der Vertikaldrehung $\mathfrak{o}_1$ tut (man denke an den Sonderfall eines senkrechten Wurfs nach oben!). Dazu tritt bei allen äquatorfernen Orten der nördlichen bzw. südlichen Halbkugel noch jeweils eine Rechts- bzw. Linksablenkung infolge der Azimutaldrehung $\mathfrak{o}_2$, die sich darin äußert, daß sich der vom Abschußpunkt zum fliegenden Geschoß gezogene Fahrstrahl mit der Winkelgeschwindigkeit $-\mathfrak{o}_2$ gegen die Erdoberfläche zu drehen scheint.

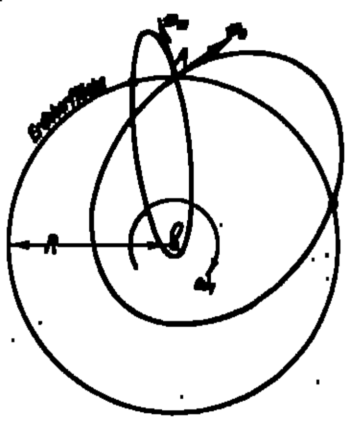


Abb. 11. Wurf nach Osten und nach Westen.

Die nach Ziff. 17 ohne Luftwiderstand leicht zu entwickelnde Theorie[1]) liefert für einen Wurf in beliebiger Himmelsrichtung eine Wurfweitenvergrößerung

$$\Delta x_n = \frac{4}{3}\frac{v^3}{g^2}(4\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha\sin\vartheta\cdot\omega\cos\varphi \qquad (1)$$

und eine Rechtsablenkung

$$x_r = \frac{4}{3}\frac{v^3}{g^2}\sin^2\alpha\,(-\sin\alpha\cos\vartheta\cdot\omega\cos\varphi + 3\cos\alpha\cdot\omega\sin\varphi), \qquad (2)$$

wenn v und α die Abschußgeschwindigkeit und -elevation und ϑ das von Norden aus ostwärts positiv gerechnete Azimut der Schußrichtung ist. Der Luftwiderstand stört diese Ergebnisse nicht unerheblich[2]).

Schleudert man einen Körper insbesondere genau lotrecht aufwärts, so sollte ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand der Wiederaufschlagpunkt nach (1) um die Strecke

$$x_w = \frac{4}{3}\frac{v^3}{g^2}\omega\cos\varphi = \frac{4}{3}h t_1\omega\cos\varphi = \frac{1}{6}g t_1^3\omega\cos\varphi = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\,\omega\cos\varphi$$

westwärts von der Abschußstelle liegen, wenn h die Wurfhöhe und t_1 die Wurfdauer sind.

1) S. D. Poisson, Journ. de l'École Polyt. Bd. 16, H. 26. 1838.
2) Vgl. C. Cranz, Ballistik, 5. Aufl. § 53.

Im Gegensatz zum senkrechten Wurf nach oben zeigt der freie Fall nach unten eine schon von NEWTON vermutete, von LAPLACE[1]) ohne Luftwiderstand mit der Falldauer t_0 zu

$$x_0 = \frac{2}{3} h t_0 \omega \cos\varphi = \frac{1}{3} g t_0^3 \omega \cos\varphi = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\,\omega \cos\varphi$$

berechnete östliche Ablenkung, die bei 80 m Fallhöhe rund 1 cm beträgt. Obwohl diese Ablenkung, da mit wachsender Falldauer zunehmend, durch den Luftwiderstand vergrößert werden muß, so haben doch zahlreiche Fallversuche[2]) (GUGLIELMINI 1790—1792, BENZENBERG 1802, SCHLEBUSCH 1804, REICH 1831, HALL 1903, FLAMMARION 1903) wegen viel zu großer Streuung bisher kein ganz befriedigendes Ergebnis gezeitigt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die einzelne fallende Kugel wenigstens östlich vom Lotpunkt auftrifft, verhält sich zur Gewißheit selbst bei den besten Versuchen nur wie 2 : 3.

Das wirksamste Mittel zur Vergrößerung der Falldauer ist die Verwendung der Atwoodschen Fallmaschine. Ist g' die bei dieser erreichte Schwerebeschleunigung, so zeigt die Theorie, daß die östliche Ablenkung den Betrag

$$x_0 = \frac{2g'}{g + 2g'}\, h t_0 \omega \cos\varphi$$

besitzen muß. Ein von HAGEN[3]) 1912 mit der Atwoodschen Maschine angestellter Fallversuch hat dieses Ergebnis bis auf einen Fehler von 1% bestätigt.

Übrigens verlangt die Theorie jeweils auch eine südliche Ablenkung beim fallenden Körper, und zwar vom Betrag

$$x_s = \frac{1}{6} g t_0^4 \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi ,$$

der, da proportional mit ω^2, für den Nachweis viel zu klein ist.

20. Das Foucaultsche und Bravaissche Pendel. Auch bei einem punktförmigen Pendel, dessen Schwingungen von einem erdfesten Beobachter wahrgenommen werden, muß sich die Azimutaldrehung $\mathfrak{o}_3$ im wesentlichen in einer scheinbaren Relativdrehung $-\mathfrak{o}_3$ des Pendels gegen die Erde äußern. Würde die Pendelmasse aus ihrer Ruhelage A durch einen genau zentralen wagerechten Stoß hinausgeworfen, so könnte sich ihre Bewegung von der eines Geschosses nur dadurch unterscheiden, daß noch eine Kraft hinzukommt, die für kleine Amplituden a dem Ausschlag proportional ist, die Bewegung also immer wieder zur Umkehr bringt, ohne aber die räumliche Stellung der Schwingungsebene anzutasten. Solange die Erhebung der Pendelmasse aus der wagerechten Ebene nur gering bleibt, ist der Vorgang, wie die strenge Theorie[4]) zeigt, von der Vertikaldrehung $\mathfrak{o}_1$ nahezu unabhängig, und mithin muß sich die Schwingungsebene scheinbar mit der Geschwindigkeit $\omega \sin\varphi$ drehen, nämlich im Sinne *NOSW* auf der nördlichen Halbkugel, im Sinne *NWSO* auf der südlichen. Der Betrag dieser scheinbaren Drehung, abgemessen auf dem Umfange eines wagerechten Kreises K um A vom Halbmesser a (Abb. 12, welche die Horizontalprojektion der Bewegung gibt, gesehen von einem erdfesten Beobachter), macht in 24 Stunden den Weg $2\pi a \sin\varphi$ aus, und dies ist der Längenunterschied zweier irdischer Parallelkreise, wovon der eine durch den Mittelpunkt A, der andere durch den Nord- oder Südpunkt des Kreises K geht.

---

1) P. S. DE LAPLACE, Mécanique céleste 1805, S. 300.

2) Über die Literatur zu diesen Versuchen vgl. J. G. HAGEN, La rotation de la terre, S. 22. Rom 1911.

3) J. G. HAGEN, La rotation de la terre, 2. Anhang, S. 29.

4) Vgl. J. G. HAGEN, La rotation de la terre, S. 55. Die Theorie ist als Sonderfall auch enthalten in Kap. 8, Ziff. 42 ds. Bd. des Handb.

Tatsächlich ist es unmöglich, den Anstoß auf die Pendelkugel genau genug zentral auszuführen. Vielmehr pflegt man die Pendelmasse in ihrer äußersten Lage B so loszulassen, daß sie gegen die Erde keine Anfangsgeschwindigkeit besitzt. Man gibt so dem Pendel die ganze Drehgeschwindigkeit der Erde mit und hat es jetzt, strenger genommen, nicht mehr mit einem ebenen, sondern mit einem

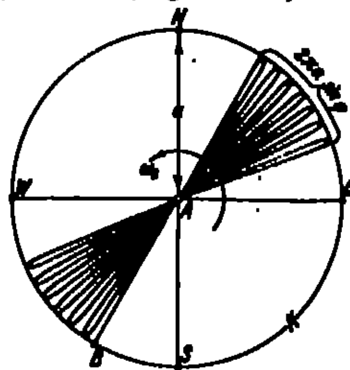


Abb. 12. Relativbewegung des zentral angestoßenen Foucaultschen Pendels.

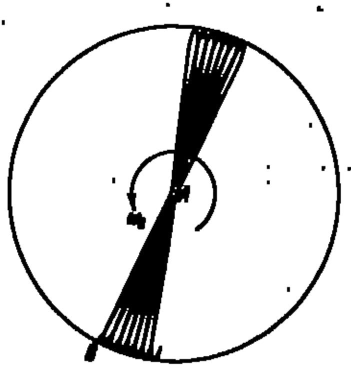


Abb. 13. Absolutbahn des seitlich losgelassenen Foucaultschen Pendels.

Raumpendel zu tun; dessen Bahn besteht bei kleinen Ausschlägen nahezu aus einer Ellipse, die sich im Sinne des Anfangsstoßes langsam dreht (Abb. 13, Bewegung, gesehen von einem die Bewegung des Punktes A, aber nicht die Erddrehung mitmachenden Beobachter). Diese Ellipsendrehung erfolgt [vgl. Ziff. 15, Gleichung (5)] im vorliegenden Falle mit der Winkelgeschwindigkeit[1]) $\omega' = \frac{3}{8}\left(\frac{s}{l}\right)^2 \omega \sin\varphi$, falls l die Pendellänge bedeutet. Die Schwingungsbahn, gesehen von der Erde aus (Abb. 14), scheint sich also jetzt mit dem Betrag $\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{s}{l}\right)^2\right] \omega \sin\varphi$ gegen die Erde zu drehen. Das Korrektionsglied ω' muß bei allen quantitativen Versuchen wohl berücksichtigt werden. Um es möglichst zu verkleinern, wird man entweder, wie FOUCAULT[2]) 1851, die Pendellänge sehr groß oder, wie KAMERLINGH-ONNES[3]) 1879, die Amplitude s sehr klein wählen.

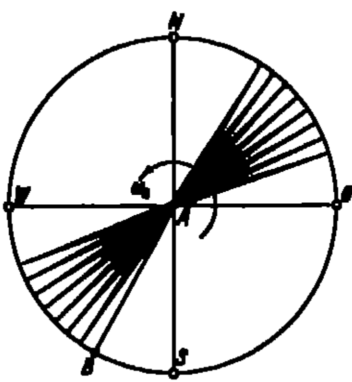


Abb. 14. Relativbahn des seitlich losgelassenen Foucaultschen Pendels.

Die Beweiskraft des Foucaultschen Versuches wird dadurch beeinträchtigt, daß ihm die Umkehrbarkeit fehlt, welche allein alle systematischen Fehler auszumitteln erlaubt. Diesen Mangel vermeidet das Bravaissche Kegelpendel[4]), bei welchem die Pendelmasse einen wagerechten Kreis beschreibt, und zwar einmal im Sinne von σ_0, das andere Mal im entgegengesetzten Sinne. In beiden Fällen ergeben sich verschiedene scheinbare Umlaufsdauern, da die beiden schein-

[1]) S. die Fußnote 2) von S. 334.

[2]) L. FOUCAULT, Recueil des travaux scientifiques; herausgeg. von C. M. GARIEL u. J. BERTRAND, S. 378. Paris 1878. Über die Geschichte des Versuches vgl. J. G. HAGEN, La rotation de la terre, S. 42ff.

[3]) Über die genauere Theorie des Kamerlingh-Onnesschen Pendels s. Kap. 8, Ziff. 42 ds. Bd. des Handb.

[4]) A. BRAVAIS, C. R. Bd. 32, S. 166. 1851 u. Bd. 33, S. 195. 1851.

baren Winkelgeschwindigkeiten ε_1 und ε_2 sich aus der wahren Winkelgeschwindigkeit ε_0 des umlaufenden Kegelpendels zu $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \omega \sin\varphi$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 - \omega \sin\varphi$ berechnen, woraus

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2\omega \sin\varphi$$

folgt.

Die Pendel von FOUCAULT und BRAVAIS bilden lediglich die beiden Endglieder einer ganzen Reihe von Versuchsmöglichkeiten, nämlich der allgemeinen Schwingungen des Raumpendels (Ziff. 15). Deren Beeinflussung durch die Erddrehung ist von KAMERLINGH-ONNES sehr genau untersucht worden.

V. Die Bewegung der Punktsysteme.

21. Der Punkthaufen. Handelt es sich um ein System von n frei beweglichen Massenpunkten, so mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden: es sei m_i die Masse und $\mathfrak{i}_i$ der Impuls des i-ten Massenpunktes, $\mathfrak{r}_i$ sein Fahrstrahl von einem beliebig gewählten raumfesten Bezugspunkt O aus, $\mathfrak{k}_i$ der Vektor der auf m_i ausgeübten „äußeren", d. h. nicht von den anderen Massenpunkten herrührenden Kraft, endlich $\mathfrak{f}_{ik}$ die „innere" Kraft, welche der k-te Massenpunkt auf den i-ten ausübt, wobei nach dem Wechselwirkungsgesetz $\mathfrak{f}_{ik} = -\mathfrak{f}_{ki}$ ist.

Die Bewegungsgleichungen (1) von Ziff. 3 lauten für die n Massenpunkte

$$\frac{d\mathfrak{i}_i}{dt} = m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{k}_i + \sum_k \mathfrak{f}_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

Ihre vektorielle Summierung führt mit dem Gesamtimpuls $\mathfrak{J} = \sum \mathfrak{i}_i$ und mit der äußeren Gesamtkraft $\mathfrak{K} = \sum \mathfrak{k}_i$ auf die Gleichung

$$\dot{\mathfrak{J}} = \mathfrak{K}. \tag{2}$$

Wird mit $m = \sum m_i$ die Gesamtmasse des Systems und mit $\mathfrak{r}_s = \frac{\sum m_i \mathfrak{r}_i}{m}$ der Fahrstrahl nach dem Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) bezeichnet, so ist

$$\mathfrak{J} = m\dot{\mathfrak{r}}_s \qquad \text{und also} \qquad m\ddot{\mathfrak{r}}_s = \mathfrak{K}. \tag{3}$$

Diese beiden Gleichungen drücken den sog. Schwerpunktsatz des Punkthaufens aus: Der Impuls eines Punkthaufens berechnet sich so, wie wenn sämtliche Massen im Massenmittelpunkt vereinigt wären, und der Massenmittelpunkt bewegt sich unabhängig von den inneren Kräften so, als ob alle äußeren Kräfte, parallel mit sich verschoben, an ihm angriffen.

Führt man ferner bezüglich des raumfesten Punktes O das Impulsmoment $\mathfrak{d}_i = [\mathfrak{r}_i \mathfrak{i}_i]$ sowie das äußere Kraftmoment $\mathfrak{m}_i = [\mathfrak{r}_i \mathfrak{k}_i]$ und deren vektorielle Summen $\mathfrak{S} = \sum \mathfrak{d}_i$ und $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{m}_i$ ein, so lassen sich den $n + 1$ Gleichungen (1) und (2) ebenso viele entsprechend gebaute an die Seite stellen. Wegen $[\dot{\mathfrak{r}}_i \mathfrak{i}_i] = 0$ folgt nämlich aus (1)

$$\dot{\mathfrak{d}}_i = [\mathfrak{r}_i \mathfrak{k}_i] + \Big[\mathfrak{r}_i \sum_k \mathfrak{f}_{ik}\Big] \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

und daraus wieder durch Summierung

$$\dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{M}. \tag{5}$$

Die Gleichung (5) führt [da in ihr der Satz (2) von Ziff. 5 als Sonderfall enthalten ist] häufig den Namen des (allgemeinen) Flächensatzes des Punkthaufens und besagt insbesondere, daß das Impulsmoment durch die inneren Kräfte $\mathfrak{f}_{ik}$ nicht beeinflußt wird.

Das Impulsmoment $\mathfrak{S}$ bezüglich eines beliebigen (festen oder beweglichen) Punktes O hängt mit demjenigen $\mathfrak{S}_s$ bezüglich des Massenmittelpunktes zusammen durch

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_s + [\mathfrak{r}_s \mathfrak{J}]. \tag{6}$$

Ist der **Bezugspunkt beweglich** und $\dot{\mathfrak{r}}_0 = \mathfrak{v}_0$ seine augenblickliche Geschwindigkeit, so ist $\mathfrak{S}$ zu ersetzen durch $\mathfrak{S} + [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{J}]$ und $\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{M} + [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{K}]$, und dann muß die Gleichung (5) mit Beachtung von (2) in der Form

$$\dot{\mathfrak{S}} + [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{J}] = \mathfrak{M} \tag{7}$$

geschrieben werden. Wenn der bewegliche Bezugspunkt allerdings der **Massenmittelpunkt** ist, so sind die Vektoren $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{J}$ parallel, und dann kommt man wieder auf (5) zurück:

$$\dot{\mathfrak{S}}_s = \mathfrak{M}_s. \tag{8}$$

Diese Feststellung ist deswegen wichtig, weil häufig die Bewegung des Punkthaufens sowieso mit Vorteil auf den Massenmittelpunkt bezogen wird, der keineswegs in Ruhe zu sein braucht. Selbst wenn er sich ungleichförmig bewegt, so behält der Flächensatz, auf ihn bezogen, seine Gültigkeit in der Form (8).

Multipliziert man die Gleichungen (1) skalar mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}_i = \dot{\mathfrak{r}}_i$ und addiert dann, so kommt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_i m_i \dot{\mathfrak{r}}_i^2 - \sum_i\sum_k \mathfrak{f}_{ik}\dot{\mathfrak{r}}_i = \sum_i \mathfrak{k}_i \mathfrak{v}_i. \tag{9}$$

Hier steht rechts die Leistung $N = \sum \mathfrak{k}_i \mathfrak{v}_i$ aller äußeren Kräfte. Haben die inneren Kräfte $\mathfrak{f}_{ik}$ ein Potential V, so ist

$$dV = -\sum_i\sum_k \mathfrak{f}_{ik}\, d\mathfrak{r}_i, \tag{10}$$

und dann geht (9) über in den sog. **Energiesatz** des Punkthaufens

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum m_i \dot{\mathfrak{r}}_i^2 + \frac{dV}{dt} = N, \tag{11}$$

welcher zeigt, daß die Leistung der äußeren Kräfte teils zur Änderung der Bewegungsenergie $\frac{1}{2}\sum m_i \dot{\mathfrak{r}}_i^2$, teils zur Änderung der Lagenenergie V verbraucht wird.

23. Der abgeschlossene Punkthaufen. Ist das System der Einwirkung **äußerer Kräfte** entzogen, so sind $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{S}_s$ und überdies, bei Beschränkung auf feste Bezugspunkte, auch $\mathfrak{S}$ der Zeit nach unveränderliche Vektoren.

Die Unveränderlichkeit des Impulsvektors $\mathfrak{J}$ sagt aus, daß der Massenmittelpunkt sich nun dauernd geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt (den Fall der Ruhe mit eingeschlossen), und dieser Sachverhalt wird mitunter als **Schwerpunktssatz** (im engeren Sinne) bezeichnet.

Ebenso nennt man die Unveränderlichkeit des Drehimpulsvektors $\mathfrak{S}_s$ oft den **Flächensatz** (im engeren Sinne). Dieser Satz besagt, daß die Projektionen der vom Massenmittelpunkt nach den Massenpunkten eines abgeschlossenen Systems gezogenen Fahrstrahlen auf eine durch den Massenmittelpunkt gelegte Ebene E von bestimmter Raumstellung in jeweils gleichen Zeiten insgesamt jeweils die gleichen Flächen überstreichen, nämlich so, daß die gesamte Flächengeschwindigkeit gleich der halben Projektion des Vektors $\mathfrak{S}_s$ auf die Ebene E ist.

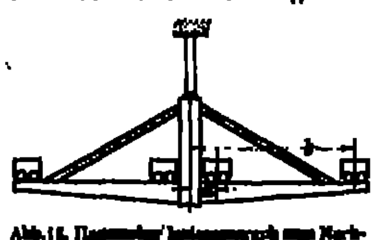
Unter den Ebenen E ist diejenige mit der größten Flächengeschwindigkeit ausgezeichnet; sie steht senkrecht auf dem Vektor $\mathfrak{S}_s$ und heißt nach ihrem Entdecker LAPLACE die **unveränderliche Ebene**. (Sie wird nur dann unbestimmt, wenn $\mathfrak{S}_s = 0$ ist.) Die Flächengeschwindigkeit für jede den Vektor $\mathfrak{S}_s$ enthaltende Ebene verschwindet.

Die Vektoren $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{S}_s$ sind für einen Punkthaufen kennzeichnende (wenn auch dessen Bewegung keineswegs vollständig bestimmende) Größen. Insbesondere mißt $\mathfrak{S}_s$, anschaulich ausgedrückt, immer eine gewisse, in der Bewegung

des Punkthaufens nachweisbare Drehung. Der feste Vektor $\mathfrak{S}$, für den der Flächensatz in ganz ähnlicher Weise ausgesprochen werden kann, besitzt jene anschauliche Bedeutung nicht notwendig, jedoch wenigstens allemal dann, wenn der Massenmittelpunkt ruht, so daß für jeden beliebigen Bezugspunkt $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_M$ wird.

Während durch innere Kräfte die Bewegung des Massenmittelpunktes in keiner Weise beeinflußbar ist, können schon innere Kräfte allein eine Schwenkung des Punkthaufens um seinen Massenmittelpunkt bewerkstelligen [Beispiel: die stets auf die Füße fallende Katze[1])] oder sogar die Drehgeschwindigkeit des ganzen Haufens ändern (jedoch nur so, daß hierbei $\mathfrak{S}_M$ fest bleibt).

23. Der Isotomeograph. Eine wichtige Anwendung bildet der auf eine Anregung von Poinsot[2]) zurückgehende Isotomeograph von Hagen[3]) zum Nachweis der Erddrehung. Auf einem wagerechten, bifilar aufgehängten Balken (Abb. 15) können zwei große Zusatzmassen symmetrisch von der Balkenmitte zu den Balkenenden und zurück bewegt werden. Ist m die Summe dieser Zusatzmassen, a ihr innerster, b ihr äußerster Abstand von der Balkenmitte und ruht der Balken anfänglich gegen die Erde, wenn die Zusatzmassen innen sitzen, so muß eine durch innere Kräfte allein bewirkte Verschiebung der Zusatzmassen in ihre äußerste Lage die ursprünglich vorhandene Absolutdrehgeschwindigkeit des Balkens vom Betrag der Azimutaldrehung $\omega\sin\varphi$ der Erde (Ziff. 17) so ändern, daß der ursprünglich dem System von der Erde mitgegebene Drehimpuls $\mathfrak{S}_M$ erhalten bleibt. So entsteht eine Relativdrehung des Balkens gegenüber der Erde mit einer im Sinne $NOSW$ positiv gerechneten Winkelgeschwindigkeit, die sich zu


Abb. 15. Hagens Isotomeograph zum Nachweis der Erddrehung.

$$\frac{(b^2-a^2)m}{b^2m+A_0}\,\omega\sin\varphi$$

berechnet, falls man dabei das festbleibende Trägheitsmoment A_0 des Balkens berücksichtigt. Eine noch etwas stärkere Relativdrehung im Sinne $NWSO$ entsteht, wenn man die Zusatzmassen von außen nach innen laufen läßt (im Nenner steht dann a^2m+A_0). Der Versuch ist von Hagen mit großem Erfolg durchgeführt worden. Auf dem gleichen Grundsatz beruht auch ein schon früher mit flüssigen Massen angestellter Versuch von Tumlirz[4]).

24. Das n-Körperproblem. Sind weiterhin keine äußeren Kräfte vorhanden, und sind die inneren Kräfte $\mathfrak{f}_{ik}$ nur von den gegenseitigen Entfernungen r_{ik} der Massenpunkte abhängig, so gibt es für die inneren Kräfte ein Potential [Ziff. 21 Gleichung (10)]

$$V = -\sum_{ik}{}' \int f_{ik}\,dr_{ik},$$

wo f_{ik} den Absolutwert der Kraft $\mathfrak{f}_{ik}$, positiv bei Anziehung, negativ bei Abstoßung, bedeutet und die Summe über jedes Wertepaar i, k nur einmal zu nehmen ist. Die Bewegung des so eingeschränkten Systems zu untersuchen,

[1]) Über die Literatur zu diesem seinerzeit berühmten Problem vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, Art. 6 (Stäckel), S. 529ff.
[2]) L. Poinsot, C. R. Bd. 32, S. 206, 1851.
[3]) J. G. Hagen, La rotation de la terre, S. 13 sowie 2. Anhang, S. 9; ZS. f. Instrkde. Bd. 40, S. 65, 1920.
[4]) O. Tumlirz, Wiener Ber. Bd. 117, S. 819, 1908.

bildet den Inhalt des sog. n-**Körperproblems**, eine Bezeichnung, die insbesondere dann gebräuchlich ist, wenn das Potential die Form

$$V = -\sum_{ik}' \frac{\mu_{ik}}{r_{ik}}$$

besitzt, d. h. die inneren Kräfte Newtonsche Gravitationskräfte oder Coulombsche elektro- oder magnetostatische Kräfte sind.

Die Bewegung des Systems besitzt $3n$ Freiheitsgrade, ihre Beschreibung ist gleichbedeutend mit der Integration von $3n$ skalaren Differentialgleichungen zweiter Ordnung oder, was damit gleichwertig ist, mit der Integration einer einzigen skalaren Differentialgleichung von der Ordnung $6n$. Der Schwerpunktsatz in der Form

$$\mathfrak{J} = \text{konst. Vektor} \qquad \text{oder} \qquad \sum m_i \mathfrak{r}_i = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} t,$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ feste Vektoren sind, stellt sechs skalare Integrale des Systems vor. Der Flächensatz in der Form

$$\mathfrak{S}_S = \text{konst. Vektor} \qquad \text{oder} \qquad \sum m_i [\mathfrak{r}_i \dot{\mathfrak{r}}_i] = \mathfrak{c}$$

bildet mit dem festen Vektor $\mathfrak{c}$ drei weitere skalare Integrale. Hierzu kommt jetzt noch der Energiesatz [Ziff. 21, Gleichung (11)]

$$\tfrac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathfrak{r}}_i^2 + V + h = 0 \qquad (1)$$

als zehntes skalares Integral mit der Konstanten h. Wie die Theorie der Differentialgleichungen lehrt[1]), läßt sich mit Hilfe der so gewonnenen zehn Integrale das ursprüngliche System von der $6n$-ten auf die $(6n - 10)$-te Ordnung herabdrücken. Eine Erniedrigung um je eine weitere Ordnung gelingt dadurch, daß man die Zeit t, weil sie in den Differentialgleichungen nicht explizit auftritt, eliminieren kann, und daß man, weil die absolute Lage des Punktsystems im Raum ohne Bedeutung ist, eine zyklische Koordinate einführen kann (wie schon beim Einkörperproblem, der Zentralbewegung, Ziff. 5, wo φ die zyklische Koordinate war). Mithin muß sich das Differentialgleichungssystem des n-Körperproblems auf die Ordnung $6n - 12$ zurückführen lassen.

Damit ist im Falle $n = 2$ des Zweikörperproblems die Lösung gewährleistet. Dieser Fall ist aber auch der einzige geblieben, in welchem die allgemeine Lösung mit den heutigen analytischen Hilfsmitteln in geschlossener Form gelingt.

25. Das Zweikörperproblem. Anstatt das Zweikörperproblem nach der in Ziff. 24 geschilderten Methode zu lösen, ist es zweckmäßig, es auf das schon erledigte Einkörperproblem zurückzuführen[2]). Dies gelingt in doppelter Weise, und zwar auch für den allgemeinen Fall, daß die Kraft eine beliebige (die nötigen mathematischen Voraussetzungen erfüllende) Funktion der gegenseitigen Entfernung r der beiden Massenpunkte ist.

Zunächst ist festzustellen, daß die (im allgemeinen nicht ebene) Bewegung beider Punkte in der zugehörigen **unveränderlichen Ebene** erfolgt, welche, sich parallel bleibend, durch den Massenmittelpunkt geht, sich also im allgemeinen mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiterbewegt. Man findet diese Ebene bei gegebener Anfangsbewegung, indem man die (im allgemeinen windschiefen) Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ der Anfangsgeschwindigkeiten von den Massenpunkten m_1 und m_2 aus aufträgt und die Endpunkte dieser Vektoren durch eine Gerade g verbindet. Legt man durch die beiden Massenpunkte eine Ebene parallel zu dieser

---

[1]) Über die gruppentheoretische Bedeutung dieser zehn Integrale vgl. Kap. 3, Ziff. 9 ds. Bd. des Handb.

[2]) I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, Buch I, Abschn. XI.

Geraden g, so ist diese Ebene die unveränderliche. Wegen seiner gleichförmigen Bewegung darf man sich den Massenmittelpunkt und damit auch die unveränderliche Ebene weiterhin auf Ruhe transformiert denken. (Die genannte Konstruktion der unveränderlichen Ebene ist nur dann nicht eindeutig, wenn die Gerade g parallel zur Verbindungslinie der beiden Massenpunkte läuft; aber dann ist die Bewegung eben und als unveränderliche Ebene natürlich die Bewegungsebene anzusehen.)

Ist $\mathfrak{f}(r)$ der Vektor der Kraft auf den Punkt m_2 und also $-\mathfrak{f}(r)$ derjenige auf m_1, so entsteht aus den Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{\mathfrak{r}}_1 = -\mathfrak{f}(r), \qquad m_2\ddot{\mathfrak{r}}_2 = \mathfrak{f}(r)$$

sofort für den Abstandsvektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1$ die Beziehung

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,\mathfrak{f}(r), \tag{1}$$

welche besagt, daß jeder der beiden Massenpunkte relativ zum andern als Zentrum eine Zentralbewegung (Ziff. 5) unter dem Einfluß einer Kraft beschreibt, welche im Verhältnis der Summe der beiden Massen zur Masse des Zentrums größer ist als die tatsächlich wirkende Kraft.

Aber nicht nur diese gegenseitige Relativbewegung, sondern auch die Absolutbewegung in der (ruhend gedachten) unveränderlichen Ebene ist eine Zentralbewegung. Wählt man nämlich den Massenmittelpunkt zum Bezugspunkt der beiden Fahrstrahlen, so kann man wegen $r = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\,r_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\,r_2$ die Bewegungsgleichungen in der Form schreiben

$$m_1\ddot{\mathfrak{r}}_1 = -\mathfrak{f}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\,r_1\right), \qquad m_2\ddot{\mathfrak{r}}_2 = \mathfrak{f}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\,r_2\right). \tag{2}$$

Sie sagen dann aus, daß jeder der beiden Massenpunkte auch um den Massenmittelpunkt als Zentrum eine Zentralbewegung unter dem Einfluß einer nur vom Abstand r_1 bzw. r_2 der Massenpunkte vom Massenmittelpunkt abhängigen Kraft beschreibt.

Im Falle des Newtonschen Anziehungsgesetzes

$$f = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (\gamma \text{ die Gravitationskonstante})$$

verläuft sowohl die gegenseitige Relativbewegung als auch die Absolutbewegung um den Massenmittelpunkt in Keplerbahnen (Ziff. 6).

Bezieht man die Bewegung auf den Sonnenmittelpunkt als Masse m_1, so ist für einen Planeten m_2 die in Ziff. 6 benützte Zahl $\mu = \gamma m_1$ gemäß (1) zu ersetzen durch $\gamma m_1 (1 + m_2/m_1)$, wonach insbesondere für die Umlaufzeit von m_2 [Ziff. 6, Gleichung (3)] folgt

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a_2^3}{\gamma m_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}}.$$

Der Faktor $(1 + m_2/m_1)$ drückt den Einfluß der Tatsache aus, daß der Sonnenmittelpunkt jetzt nicht mehr als festgehalten angesehen wird. Für das Verhältnis der Umlaufzeiten zweier Planeten m_2 und m_3, deren gegenseitige Anziehungskraft im Vergleich mit derjenigen nach der Sonne vernachlässigt werden mag, kommt

$$T_2^2 : T_3^2 = \frac{a_2^3}{1 + \frac{m_2}{m_1}} : \frac{a_3^3}{1 + \frac{m_3}{m_1}} \tag{3}$$

als genauerer Ausdruck des dritten Keplerschen Gesetzes. Würde man sich auf den (allerdings nicht unmittelbar beobachtbaren) Massenmittelpunkt von Sonne m_1 und Planeten m_2 beziehen, so wäre μ für die Bewegung des Planeten zu ersetzen durch $\gamma m_1/\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2$, eine nach dem Muster von (5) gebildete Proportion hätte aber von diesem Standpunkt aus keinen Sinn.

Für die Elektrodynamik ist wieder auch der Fall wichtig, daß es sich um eine Abstoßungskraft handelt (Anlauf eines α-Teilchens gegen den Kern eines Atoms von niedriger Ordnungszahl). Schreibt man diese Kraft in der Form $\varkappa/r^2$, wo $\varkappa$ die (im wesentlichen den Ladungen proportionale) Kraft in der Entfernungseinheit bedeutet, so kann man die früheren Ergebnisse (Ziff. 6) übertragen, indem man für die gegenseitige Relativbewegung die frühere Größe μ durch $\varkappa\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$ ersetzt.

Bedeutungsvoll ist hier namentlich der von RUTHERFORD näher untersuchte Fall, daß die Masse m_2 (α-Teilchen) aus großer Entfernung mit der Geschwindigkeit v_∞ gegen die ursprünglich ruhende Masse m_1 (Kern) heranfliegt[1]). Zunächst gilt hier für den halben Asymptotenwinkel ψ der relativen Hyperbelbahn gemäß Ziff. 6, Gleichung (10)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{b v_\infty^2}{\varkappa}.$$

Die Absolutbahnen sind in Abb. 16 dargestellt. Die Masse m_1 setzt sich in Bewegung und nähert sich mit der Geschwindigkeit

$$u_\infty = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_\infty\cos\psi$$

Abb. 16. Anlauf eines α-Teilchens gegen den Kern eines Atoms von niedriger Ordnungszahl.

einer Asymptote, welche parallel zur reellen Hauptachse der relativen Hyperbelbahn liegt. Die Masse m_2 dagegen beschreibt eine hyperbelähnliche Bahn, wobei sie sich mit der Geschwindigkeit

$$u'_\infty = v_\infty\sqrt{1-\frac{4m_1m_2\cos^2\psi}{(m_1+m_2)^2}}$$

ebenfalls einer Asymptote nähert, welche mit der Anfangsrichtung v_∞ einen Winkel ϑ bildet, der größer als die frühere Ablenkung 2ψ wird und durch

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{m_1\sin 2\psi}{m_1\cos 2\psi - m_2}$$

bestimmt ist.

Im Falle zentraler Anfangsbewegung ($b=0$) vereinfachen sich diese Beziehungen in $\psi=0$, $\vartheta=0$ und

$$u_\infty = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_\infty,\qquad u'_\infty=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_\infty,$$

und man kann zeigen, daß diese Werte nicht nur unabhängig von $\varkappa$ sind, sondern auch noch bei allgemeinem Kraftgesetz $f(r)$ gültig bleiben. Sie stellen so zugleich die Grundformeln des mechanischen Stoßes vollkommen elastischer,

1) Wir folgen der Darstellung von C. H. MÜLLER u. G. PRANGE, Allgemeine Mechanik, S. 273. Hannover 1923. Vgl. auch ds. Handb. Bd. XXII, Kap. 2.

nahezu punktförmiger Massen dar unter der Voraussetzung, daß die Masse m_1 vor dem Stoße ruhte, eine Einschränkung, von der man sich durch eine einfache Transformation auf ein bewegtes Bezugssystem ohne weiteres befreien kann.[1]

26. Überblick über das Dreikörperproblem. Das Dreikörperproblem[2] ist die berühmteste Aufgabe der Punktmechanik. Die außerordentlichen Schwierigkeiten, die sich ihrer Lösung von Anfang an entgegenstellten, bildeten im Hinblick auf die große astronomische Wichtigkeit des Problems einen ungewöhnlich starken Anreiz für die bedeutendsten Forscher, und so liegt die Lösung heute, wenn auch keineswegs in geschlossener Form, doch in weitem Umfang auswertbar vor, und auch die wirkliche Gestalt der Bahnkurven kann wenigstens in den einfacheren Fällen gezeichnet werden.

Die Lösung hat mit der Zurückführung der Bewegungsgleichungen auf ein System von möglichst niedriger Ordnung zu beginnen (Ziff. 24). Die Integration gelingt im allgemeinen nur durch Reihen. Die so gewonnene Lösung reicht zwar dazu aus, den tatsächlichen Verlauf der Bewegung für einen beschränkten Zeitraum zu verfolgen; sie gibt aber noch keine Auskunft über den Charakter der Bahnkurven. Auch die Beschränkung auf den Fall, daß die drei Punkte in einer Ebene bleiben (sog. ebenes Dreikörperproblem), beseitigt diese Schwierigkeit nicht.

Man hat daher eine weitere Einschränkung vorgenommen, indem man die Bahnen der beiden ersten Massen als unbeeinflußbar durch die dritte Masse, also durch die Gesetze des Zweikörperproblems (Ziff. 25) bestimmt, vorschrieb, so daß dann nur noch die Bahn der dritten Masse unter der Einwirkung der von den beiden anderen Massen ausgeübten Kräfte zu berechnen bleibt. Der besondere Fall, daß hierbei die Bahnen der beiden ersten Massen kreisförmig sind, und daß zudem die dritte Masse in der Ebene dieser Kreisbahnen läuft, heißt das eingeschränkte Dreikörperproblem (problème restreint). Für diesen Fall ist nicht nur die Integrationstheorie, die hier wohl auch als Störungstheorie (im engeren Sinne) bezeichnet wird, vollständig erledigt; vielmehr ist es auch gelungen, wenigstens die Klassen der relativ periodischen Bahnen mit ziemlicher Vollständigkeit aufzufinden, d. h. derjenigen Bahnen des dritten Körpers, die, betrachtet von einem mit den beiden ersten Körpern umlaufenden Beobachter, geschlossen sind.

Auch beim nicht eingeschränkten ebenen Dreikörperproblem sind einige, allerdings bisher nur verhältnismäßig wenige, periodische Bahnen entdeckt worden.

Im Rahmen des Newtonschen Gravitationsgesetzes ist das eingeschränkte Dreikörperproblem in guter Annäherung durch das System von Sonne, Jupiter und einem Planetoiden verwirklicht. Andere, ganz auf die Astronomie zugeschnittene Arten von eingeschränkten Dreikörperproblemen, wie z. B. das Sonne-Erde-Mond-Problem, sollen hier nicht behandelt werden.

27. Reduktion des ebenen Dreikörperproblems. Für die Zurückführung der Differentialgleichungen des Dreikörperproblems auf ein System von möglichst niedriger Ordnung (nämlich auf die sechste Ordnung beim räumlichen und sogar auf die vierte Ordnung beim ebenen Problem) sind viele Wege bekannt. Auch

---

[1] Ausführlicheres hierüber in Bd. VI ds. Handb.

[2] Über die Literatur zum Dreikörperproblem vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2[2], Art. 12 (WHITTAKER), S. 513. Gute Darstellungen des Dreikörperproblems findet man bei C. L. CHARLIER, Die Mechanik des Himmels. Bd. I, S. 219. Leipzig 1902; und bei E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik. Deutsch von F. u. K. MITTELSTEN SCHEID. S. 360. Berlin 1924.

hier, wie bei anderen Aufgaben der Dynamik, kann entweder die vektorielle („Eulersche") oder die skalare („Lagrange-Hamiltonsche") Methode bevorzugt werden.

Als Beispiel für die erste Methode soll das ebene Dreikörperproblem behandelt werden. Das ursprüngliche System [Ziff. 21, Gleichung (1)]

$$\left.\begin{aligned} m_1 \dot{\mathfrak{v}}_1 &= \mathfrak{f}_{12}(r_{12}) - \mathfrak{f}_{31}(r_{31}),\\ m_2 \dot{\mathfrak{v}}_2 &= \mathfrak{f}_{23}(r_{23}) - \mathfrak{f}_{12}(r_{12}),\\ m_3 \dot{\mathfrak{v}}_3 &= \mathfrak{f}_{31}(r_{31}) - \mathfrak{f}_{23}(r_{23}) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

von zwölfter Ordnung kann vermittels des Schwerpunktsatzes um vier, vermittels des Flächensatzes um zwei Einheiten, also insgesamt auf die sechste Ordnung, erniedrigt werden. Wird zum Bezugspunkt der als ruhend vorausgesetzte Massenmittelpunkt genommen, so gilt für die Fahrstrahlen $\mathfrak{r}_i$ und für die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_i = \dot{\mathfrak{r}}_i$ der drei Punkte

$$m_1 \mathfrak{r}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2 + m_3 \mathfrak{r}_3 = 0, \tag{2}$$

$$m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2 + m_3 \mathfrak{v}_3 = 0, \tag{3}$$

$$m_1[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{v}_1] + m_2[\mathfrak{r}_2 \mathfrak{v}_2] + m_3[\mathfrak{r}_3 \mathfrak{v}_3] = \mathfrak{G}_s, \tag{4}$$

wo $\mathfrak{G}_s$ ein auf der Ebene der drei Punkte senkrechter, fester und durch die Anfangsbedingungen gegebener Vektor ist.

Es handelt sich nun lediglich darum, die Lage und Geschwindigkeit der drei Punkte durch solche Vektoren darzustellen, welche in Verbindung mit den Gleichungen (2) bis (4) einerseits die Ortsvektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ bestimmen und andererseits das System (1) in ein System sechster Ordnung überführen. Derartige Vektoren sind beispielsweise[1]) die relativen Fahrstrahlen $\mathfrak{r}_{31}, \mathfrak{r}_{23}$ und die absoluten Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$.

Erstens nämlich ergibt die Gleichung (2) zusammen mit den Definitionsgleichungen $\mathfrak{r}_{31} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_{23} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3$ für die Ortsvektoren die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \frac{(m_2+m_3)\,\mathfrak{r}_{31} - m_2 \mathfrak{r}_{23}}{m_1+m_2+m_3},\\ \mathfrak{r}_2 &= \frac{(m_1+m_3)\,\mathfrak{r}_{23} - m_1 \mathfrak{r}_{31}}{m_1+m_2+m_3},\\ \mathfrak{r}_3 &= -\frac{m_1 \mathfrak{r}_{31} + m_2 \mathfrak{r}_{23}}{m_1+m_2+m_3}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Zweitens gilt in einem Raume, der die Drehung $\mathfrak{o}$ vom Betrag ω der Strecke $m_3 m_1$ mitmacht, mit Rücksicht auf (3) und (4)

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{r}}_{31} &= \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_3 - [\mathfrak{o}\,\mathfrak{r}_{31}] = \frac{m_1+m_3}{m_3}\mathfrak{v}_1 + \frac{m_2}{m_3}\mathfrak{v}_2 - [\mathfrak{o}\,\mathfrak{r}_{31}],\\ \dot{\mathfrak{r}}_{23} &= \mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_3 - [\mathfrak{o}\,\mathfrak{r}_{23}] = \frac{m_1}{m_3}\mathfrak{v}_1 + \frac{m_2+m_3}{m_3}\mathfrak{v}_2 - [\mathfrak{o}\,\mathfrak{r}_{23}],\\ m_1 \dot{\mathfrak{v}}_1 &= \mathfrak{f}_{12}(r_{12}) - \mathfrak{f}_{31}(r_{31}) - m_1[\mathfrak{o}\,\mathfrak{v}_1],\\ m_2 \dot{\mathfrak{v}}_2 &= \mathfrak{f}_{23}(r_{23}) - \mathfrak{f}_{12}(r_{12}) - m_2[\mathfrak{o}\,\mathfrak{v}_2]. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Außerdem darf man Gleichung (4) gemäß Ziff. 21, Gleichung (6), worin jetzt $\mathfrak{J} = 0$ zu setzen ist, in der Weise umschreiben, daß man den beweglichen Punkt m_3 zum Bezugspunkt wählt:

$$m_1[\mathfrak{r}_{31}\mathfrak{v}_1] + m_2[\mathfrak{r}_{23}\mathfrak{v}_2] = \mathfrak{G}_s. \tag{7}$$

[1]) Die hier bevorzugte Darstellung scheint sich trotz ihrer Einfachheit in der Literatur nirgends zu finden; die Endgleichungen (10) bis (12) hat aber schon E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik, § 161, angegeben. Über andere Reduktionen vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2[2], Art. 12 (WHITTAKER), S. 519.

Da der Vektor $\mathfrak{r}_{12}$ sich ohne weiteres in $\mathfrak{r}_{31}$ und $\mathfrak{r}_{32}$ ausdrücken läßt ($\mathfrak{r}_{12} = \mathfrak{r}_{32} - \mathfrak{r}_{31}$), so stellen die Gleichungen (6) zunächst ein noch mit $\mathfrak{o}$ behaftetes System von offenbar achter Ordnung dar. Tatsächlich läßt sich aber dieses System durch Abspalten unwesentlicher Komponenten leicht auf die sechste Ordnung überführen.

Bezeichnet man nämlich allgemein mit a' bzw. a'' die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{a}$ parallel bzw. senkrecht zur Strecke $m_3 m_1$, so sieht man ohne weiteres, daß in dem System (6) die Differentialgleichung für die identisch verschwindende Komponente r_{31}'' als unwesentlich wegbleiben kann. Ferner hat man gemäß (5)

$$m_1 v_1'' + m_2 v_2'' + m_3 (v_1'' - r_{31}'\omega) = 0$$

und kann also sowohl in (6) als auch in (7) die Komponente v_1'' in r_{31}', v_2'' und ω ausdrücken; dann aber fällt aus dem System (6) die Differentialgleichung für v_1'' ebenfalls heraus, und außerdem liefert (7) wegen $[\mathfrak{r}_{31}\mathfrak{v}_1] = \mathfrak{e}\, r_{31}' v_1''$ (wo $\mathfrak{e}$ ein zur Bahnebene senkrechter Einheitsvektor ist) auch noch den Vektor $\mathfrak{o}$ als Funktion von r_{31}', v_1', $\mathfrak{r}_{32}$, $\mathfrak{v}_2$, womit das System (6) in der Tat auf die sechste Ordnung gebracht ist. Dieses System stellt nach dem heutigen Stand der Theorie die einfachste Form der Differentialgleichungen des ebenen Dreikörperproblems dar. Eine weitere Reduktion auf die vierte Ordnung auf Grund des Energiesatzes und durch Elimination der Zeit ist zwar möglich, bringt aber für die weitere Integration des Systems im allgemeinen keine Vorteile.

Führt man die angedeuteten Rechnungen durch und wählt als Kraft die Newtonsche Gravitation, so lautet das System explizit:

$$\left.\begin{aligned}
\dot r_{31}' &= \frac{m_1+m_3}{m_3} v_1' + \frac{m_2}{m_3} v_2',\\
\dot r_{32}' &= \frac{m_1}{m_3} v_1' + \frac{m_2+m_3}{m_3} v_2' + r_{32}''\omega,\\
\dot r_{32}'' &= \frac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_3} v_2'' + \left(\frac{m_1}{m_1+m_3} r_{31}' - r_{32}'\right)\omega,\\
\dot v_1' &= -\gamma \frac{m_2(r_{31}'-r_{32}')}{[(r_{31}'-r_{32}')^2 + r_{32}''^2]^{3/2}} - \gamma \frac{m_3}{r_{31}'^2} + \left(\frac{m_3}{m_1+m_3} r_{31}'\omega - \frac{m_2}{m_1+m_3} v_2''\right)\omega,\\
\dot v_2' &= \gamma \frac{m_1(r_{31}'-r_{32}')}{[(r_{31}'-r_{32}')^2 + r_{32}''^2]^{3/2}} - \gamma \frac{m_3 r_{32}'}{[r_{32}'^2 + r_{32}''^2]^{3/2}} + v_2''\omega,\\
\dot v_2'' &= -\gamma \frac{m_1 r_{32}''}{[(r_{31}'-r_{32}')^2 + r_{32}''^2]^{3/2}} - \gamma \frac{m_3 r_{32}''}{[r_{32}'^2 + r_{32}''^2]^{3/2}} - v_2'\omega,
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

und hier ist noch der Wert von

$$\omega = \frac{m_1+m_3}{m_1 m_3 r_{31}'^2}\left[k + m_2 (r_{32}'' v_2' - r_{32}' v_2'')\right] + \frac{m_2}{m_3}\frac{v_2''}{r_{31}'} \quad (9)$$

eingesetzt zu denken, wobei k den Betrag von $\mathfrak{G}_s$ darstellt. Nach Integration des Systems (8) folgt das Azimut φ des Fahrstrahls $\mathfrak{r}_{31}$ aus (9) durch einfache Quadratur

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^t \omega\, dt.$$

Da alsdann mit r_{31}', φ, r_{32}', r_{32}'' die Vektoren $\mathfrak{r}_{31}$ und $\mathfrak{r}_{32}$ als Funktionen der Zeit völlig bestimmt sind, so liefern die Gleichungen (5) schließlich die Ortsvektoren der drei Massen.

Es mag noch bemerkt werden, daß das System (8) und (9) sich ohne weiteres in der kanonischen Form [Ziff. 2, Gleichung (8)] schreiben läßt.

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{und} \qquad \omega \equiv \dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial k}, \quad (10)$$

falls man

$$\left.\begin{aligned} r'_{31} &= q_1, & m_1 v'_1 &= p_1, \\ r'_{32} &= q_2, & m_2 v'_2 &= p_2, \\ r''_{32} &= q_3, & m_2 v''_2 &= p_3 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

setzt und die Hamiltonsche Funktion

$$\left.\begin{aligned} H = &-\gamma\frac{m_2 m_3}{\sqrt{q_2^2+q_3^2}} - \gamma\frac{m_3 m_1}{q_1} - \gamma\frac{m_1 m_2}{\sqrt{(q_1-q_2)^2+q_3^2}} \\ &+ \frac{m_1+m_3}{2m_1 m_3}\left[p_1^2 + \frac{(q_3 p_2 - q_2 p_3 - k)^2}{q_1^2}\right] + \frac{m_2+m_3}{2m_2 m_3}(p_2^2+p_3^2) \\ &+ \frac{1}{m_3}\left[p_1 p_2 - \frac{p_3}{q_1}(q_3 p_2 - q_2 p_3 - k)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

einführt.

In ganz ähnlicher Weise ist es möglich, beim räumlichen Dreikörperproblem in vektorieller Gestalt ein System von der achten Ordnung anzuschreiben. Ein solches System soll jetzt nach der skalaren Methode hergeleitet werden.

28. Reduktion des allgemeinen Dreikörperproblems. Man kann die Differentialgleichungen [Ziff. 27, Gleichung (1)] des Problems von vornherein in der kanonischen Form schreiben

$$\dot q_i = \frac{\partial H_i}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots 9) \qquad (1)$$

falls man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem *Oxyz* die Komponenten der Fahrstrahlen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ der Reihe nach mit q_1 bis q_9, die Komponenten der Impulse $m_1\mathfrak{v}_1, m_2\mathfrak{v}_2, m_3\mathfrak{v}_3$ der Reihe nach mit p_1 bis p_9 bezeichnet und — mit Beschränkung auf Gravitationskräfte — die Gesamtenergie als Hamiltonsche Funktion

$$\begin{aligned} H = &-\frac{\gamma m_2 m_3}{\sqrt{(q_4-q_7)^2+(q_5-q_8)^2+(q_6-q_9)^2}} \\ &-\frac{\gamma m_3 m_1}{\sqrt{(q_7-q_1)^2+(q_8-q_2)^2+(q_9-q_3)^2}} \\ &-\frac{\gamma m_1 m_2}{\sqrt{(q_1-q_4)^2+(q_2-q_5)^2+(q_3-q_6)^2}} \\ &+\frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2m_1}+\frac{p_4^2+p_5^2+p_6^2}{2m_2}+\frac{p_7^2+p_8^2+p_9^2}{2m_3} \end{aligned}$$

einführt.

Dieses System von 18. Ordnung wird zunächst der Berührungstransformation[1])

$$q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \qquad p'_i = \frac{\partial W}{\partial q'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots 9)$$

mit

$$W = \sum_{i=1}^{9} p_i q'_i + (p_1+p_4)q'_7 + (p_2+p_5)q'_8 + (p_3+p_6)q'_9$$

unterworfen, wobei es nach bekannten Sätzen der allgemeinen Dynamik[2]) seine kanonische Gestalt bewahrt. Die transformierte Hamiltonsche Funktion H' enthält die Koordinaten q'_7, q'_8, q'_9 nicht mehr, so daß p'_7, p'_8, p'_9 unveränderliche Werte besitzen, die man ohne weiteres Null setzen darf. Hiernach läuft der Zeiger i in den Gleichungen (1) nur noch von 1 bis 6 und das System ist auf die

[1]) H. Poincaré, C. R. Bd. 123, S. 1031. 1896; über zahlreiche andere Reduktionsarten vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2², Art. 12 (Whittaker), S. 515.
[2]) S. Kap. 3, Ziff. 3 ds. Bd. des Handb.

zwölfte Ordnung reduziert. Die Gleichungen $p_7' = p_8' = p_9' = 0$ stellen nichts anderes als den Schwerpunktsatz dar.

Dieses neue System wird der weiteren Berührungstransformation[1])

$$q_i' = \frac{\partial W'}{\partial p_i'}, \qquad p_i'' = \frac{\partial W'}{\partial q_i''} \qquad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

mit

$$W' = p_1'(q_1''\cos q_5'' - q_2''\cos q_6''\sin q_5'') + p_2'(q_1''\sin q_5'' + q_2''\cos q_6''\cos q_5'') + p_3' q_2''\sin q_6''$$
$$+ p_4'(q_3''\cos q_5'' - q_4''\cos q_6''\sin q_5'') + p_5'(q_3''\sin q_5'' + q_4''\cos q_6''\cos q_5'') + p_6' q_4''\sin q_6''$$

unterworfen, wobei es wiederum seine Gestalt behält. In der transformierten Hamiltonschen Funktion H'' kommt aber q_5'' nicht mehr vor, so daß — und dies ist hier der Ausdruck des Flächensatzes — p_5'' einen festen Wert h besitzt, welcher einfach gleich dem Betrag des Impulsmoments $\mathfrak{C}_s$ ist, wenn man die xy-Ebene von Anfang an mit der unveränderlichen Ebene des Systems zusammenfallen läßt. Davon zu unterscheiden ist die augenblickliche Ebene der drei Punkte m_1, m_2, m_3 selbst. Es zeigt sich, daß p_6'' die Komponente von $\mathfrak{C}_s$ in Richtung der sog. Knotenlinie, d. h. der Schnittlinie jener beiden Ebenen, und demgemäß gleich Null ist, wogegen die Komponente von $\mathfrak{C}_s$ senkrecht zur augenblicklichen Ebene $m_1 m_2 m_3$ gleich

$$h\cos q_6'' = p_2'' q_1'' - p_1'' q_2'' + p_4'' q_3'' - p_3'' q_4''$$

wird, so daß also q_6'' als Funktion der übrigen Veränderlichen bestimmt ist. Da sich außerdem die Systemgleichung $\dot q_5'' = \partial H/\partial h$ durch Quadratur integrieren läßt, sobald die übrigen Gleichungen integriert sind, so fallen die beiden Gleichungen $i = 5$ und $i = 6$ aus dem kanonischen System heraus, welches folglich auf die achte Ordnung gebracht ist. Läßt man bei den neuen Koordinaten q_i'' und p_i'' überall die Striche weg, so lautet es

$$\dot q_i = \frac{\partial H''}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H''}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

mit der neuen Hamiltonschen Funktion

$$\left.\begin{aligned} H'' = &-\gamma\frac{m_1 m_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - \gamma\frac{m_2 m_3}{\sqrt{q_3^2 + q_4^2}} - \gamma\frac{m_1 m_2}{\sqrt{(q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2}} \\ &+ \frac{m_1 + m_3}{2m_1 m_3}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3}(p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{m_3}(p_1 p_3 + p_2 p_4) \\ &+ \frac{[m_1(m_2 + m_3)q_2^2 + m_2(m_1 + m_3)q_4^2 - 2m_1 m_2 q_2 q_4][h^2 - (p_2 q_1 - p_1 q_2 + p_4 q_3 - p_3 q_4)^2]}{2m_1 m_2 m_3 (q_1 q_4 - q_2 q_3)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Da die Hamiltonsche Funktion die Zeit t nicht explizit enthält, so lautet[2]) der Energiesatz [Ziff. 24, Gleichung (1)]

$$H'' + h = 0,$$

wo h ein Festwert ist. Löst man diese Gleichung etwa nach p_1 auf, so möge sich ergeben

$$p_1 + K(p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4, h) = 0,$$

und die kanonischen Gleichungen gehen über in[3])

$$\frac{dq_i}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \qquad (i = 2, 3, 4) \tag{4}$$

$$\frac{dt}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial h}. \tag{5}$$

---

[1]) E. T. Whittaker, Analytische Dynamik, § 158.
[2]) S. Kap. 3, Ziff. 2 ds. Bd. des Handb. [3]) S. Kap. 3, Ziff. 4 ds. Bd. des Handb.

Die letzte Gleichung (5) liefert durch einfache Quadratur den zeitlichen Ablauf der Bewegung, sobald das System (4) für sich integriert ist; dieses System ist jetzt nur noch von der sechsten Ordnung. Allerdings ist die Funktion K, wie man aus (3) sieht, recht umständlich gebaut, so daß das System achter Ordnung (2) dem System sechster Ordnung (4) bei der weiteren Integration tatsächlich vorzuziehen ist.

Ist demnach auf Grund der Integrale des Schwerpunkts-, Flächen- und Energiesatzes die Reduktion auf die sechste Ordnung gelungen, so erweist sich eine weitere Zerspaltung des Systems (4) als unmöglich. Eine solche Zerspaltung kann nach dem heutigen Stand der Integrationstheorie im allgemeinen nur dann vorgenommen werden, wenn weitere Integrale des Systems von vornherein bekannt sind. Nun hat aber BRUNS[1]) 1887 nachgewiesen, daß außer den genannten Integralen keine weiteren, davon wesentlich verschiedenen und in den Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten algebraischen Integrale existieren, ein Satz, der von POINCARÉ[2]) 1889 dahin verallgemeinert werden konnte, daß auch keine weiteren Integrale möglich sind, welche eindeutige analytische Funktionen der Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten wären. Hiernach ist es aussichtslos, die Integration des Systems durch weitere Reduktion zu versuchen; man muß zu Reihenentwicklungen greifen.

29. Integration des Dreikörperproblems. Die Integration durch Reihen ist nach verschiedenen Methoden geleistet worden. Die anschaulichste dieser Methoden geht auf DELAUNAYS Mondtheorie zurück und ist von TISSERAND und WHITTAKER auf das Dreikörperproblem zugeschnitten worden[3]). Sie soll im folgenden in großen Zügen dargestellt werden; die tatsächliche Durchführung erfordert einen ungewöhnlich großen Aufwand an Rechenarbeit.

Die Delaunaysche Methode fußt darauf, daß es gelingt, die Bewegungsgleichungen in kanonischer Form

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (1)$$

darzustellen, und zwar mit einer Hamiltonschen Funktion H, welche periodisch in den Impulskoordinaten p_i und also in eine verallgemeinerte Fouriersche Reihe mit (von q_i abhängigen) Koeffizienten a entwickelbar ist:

$$H = a_{0000} + \sum a_{jklm} \cos(j p_1 + k p_2 + l p_3 + m p_4), \qquad (2)$$

wo die Summe über alle Kombinationen von Quadrupeln ganzer Zahlen j, k, l, m läuft und nur die eine Kombination $j = k = l = m = 0$ auszuschließen ist. Kanonische Veränderliche von solcher Eigenschaft sind z. B. folgendermaßen zu gewinnen. Man suche die zur Bewegung der beiden Massen m_1 und m_2 gehörigen intermediären Ellipsen, d. h. diejenigen Keplerellipsen, die jeder der Punkte m_1 und m_2 um m_0 beschreiben würde, wenn von der Zeit t an die Störung durch die andere der beiden Massen m_1 und m_2 aufhören würde. Sind a_1 und a_2 die großen Halbachsen, e_1 und e_2 die numerischen Exzentrizitäten, n_1 und n_2 die mittleren Bewegungen (Ziff. 6), t_1^* und t_2^* die Zeiten der Periheldurchgänge, und φ_1 und φ_2 die Azimute der Perihele gegenüber den Knotenlinien, d. h. den

---

[1]) H. BRUNS, Leipziger Ber. 1887, S. 1. Eine sehr klare Darstellung gibt E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik, 14. Kap.

[2]) H. POINCARÉ, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Bd. I, Kap. 5. Paris 1892; vgl. auch die allgemeinen Ausführungen in Kap. 4, Ziff. 16 ds. Bd. des Handb.

[3]) C. E. DELAUNAY, Theorie du mouvement de la lune. Paris 1860/67; F. TISSERAND, Ann. de l'observ. de Paris, mém. 18. 1885; E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik, § 187 bis 189.

Schnittlinien der Bahnebenen mit der durch die Masse m_3 gelegten unveränderlichen Ebene, so stellen[1]) die Größen

$$q_1 = \sqrt{a_1}, \quad q_3 = \sqrt{a_1(1-e_1^2)}, \quad p_1 = \varphi_1, \quad p_3 = n_1(t - t_1^*),$$
$$q_2 = \sqrt{a_2}, \quad q_4 = \sqrt{a_2(1-e_2^2)}, \quad p_2 = \varphi_2, \quad p_4 = n_2(t - t_2^*)$$

solche kanonischen Veränderlichen vor, die allerdings nur dann unbeschränkt brauchbar sind, wenn die Masse m_3 vergleichsweise groß und daher die gesuchten Bahnen von m_1 und m_2 wenigstens angenähert vom Planetentyp sind. (Über die kinetische Bedeutung der q_i siehe Ziff. 31.) Die wirkliche Herstellung des kanonischen Systems (1) und (2) ist dann verhältnismäßig einfach[2]); überdies wird in diesem Falle a_{0000} das wichtigste Glied der Reihe (2) (vgl. Ziff. 31, wo die Transformation für das eingeschränkte Dreikörperproblem explizit durchgeführt werden wird).

Wären die periodischen Glieder der Reihe (2) nicht vorhanden, so wäre die Integration des kanonischen Systems (1) durch einfache Quadraturen zu leisten. Der Gedanke DELAUNAYs besteht nun darin, von diesen periodischen Gliedern nach und nach alle zahlenmäßig bedeutenden durch geeignete kanonische Transformationen der Veränderlichen [d. h. solche Transformationen, die das kanonische System (1) wieder in ein ebensolches kanonisches System überführen] zu beseitigen, bis schließlich nur noch solche periodische Glieder übrigbleiben, welche gegen das transformierte nichtperiodische Glied a_{0000} vernachlässigbar klein sind. Man kann dies auch so ausdrücken: das allgemeine Problem wird durch wiederholte Transformation der Veränderlichen mit hinreichender Näherung auf ein statisches (oder stationäres) zurückgeführt.

Ist das wichtigste periodische Glied etwa $a_{n_1n_2n_3n_4}\cos\psi$, wo $\psi = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + n_4p_4$ gesetzt ist, so versucht man die Berührungstransformation

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i' + \frac{\partial W}{\partial p_i} = q_i' + n_i\frac{dW}{d\psi},\\ p_i' &= p_i + \frac{\partial W}{\partial q_i'} \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (3)$$

und bestimmt die noch offene Funktion $W(q_1, q_2, q_3, q_4, \psi)$ so, daß der Ausdruck $a_{0000} + a_{n_1n_2n_3n_4}\cos\psi$ die neuen Veränderlichen p_i' nicht mehr enthält, also einfach als konstantes Glied a_{0000}' der neuen Reihe für H angesehen werden kann. Dies geschieht so, daß man in die Gleichung

$$a_{0000} + a_{n_1n_2n_3n_4}\cos\psi = a_{0000}' \qquad (4)$$

die neuen Koordinaten q_i' gemäß (3) einsetzt und hieraus $dW/d\psi$ als Funktion von $\cos\psi$ ermittelt und durch eine Fouriersche Reihe

$$\frac{dW}{d\psi} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\psi \qquad (5)$$

darstellt, deren Koeffizienten b ausrechenbare Funktionen von $q_1', \ldots q_4'$ und a_{0000}' sind. Um weiterhin keine mit ψ anwachsenden, sondern nur rein periodische Glieder zu bekommen, bestimmt man die noch willkürliche Größe a_{0000}' so, daß b_0 verschwindet; d. h. man berechnet a_{0000}' als Funktion von $q_1', \ldots q_4'$ aus der Gleichung $b_0 = 0$.

Damit sind auch die Koeffizienten b bekannte Funktionen von $q_1', \ldots q_4'$ geworden, die Funktion W ist durch Integration der Reihe (5) ermittelt, und

[1]) Der innere Grund hierfür ist in Kap. 4, Ziff. 9 dieses Bandes entwickelt.
[2]) Vgl. E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik, § 186.

damit ergeben sich gemäß (5) auch die Transformationsformeln explizit in der Form

$$q_i = q_i' + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\psi', \qquad p_i = p_i' + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin n\psi', \tag{6}$$

wo c_n und d_n berechenbare Funktionen von $q_1', \ldots q_4'$ sind und $\psi' = n_1 p_1' + n_2 p_2' + n_3 p_3' + n_4 p_4'$ gesetzt ist. Jetzt aber läßt sich die transformierte Hamiltonsche Funktion auf die Gestalt bringen

$$H' = a'_{0000} + \sum a'_{jklm} \cos(j p_1' + k p_2' + l p_3' + m p_4'),$$

wo das Glied mit dem Zeiger $n_1 n_2 n_3 n_4$ zufolge (4) in das nichtperiodische a'_{0000} eingegangen und also in der Reihe verschwunden ist.

Die Wiederholung des Verfahrens führt nach und nach alle wichtigen periodischen Glieder in den nichtperiodischen Teil von H ein, so daß der übrigbleibende periodische Teil vernachlässigt werden kann. Die zuletzt erhaltenen kanonischen Veränderlichen seien mit $\alpha_1, \ldots \alpha_4$, $\beta_1, \ldots \beta_4$ bezeichnet; dann zeigt das kanonische System

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \qquad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

(wo H jetzt also nur noch von $\alpha_1, \ldots \alpha_4$, nicht mehr von $\beta_1, \ldots \beta_4$ abhängt), daß die Größen α_i Festwerte und die Größen β_i lineare Funktionen der Zeit sind. Die aufeinanderfolgenden Transformationen (6) bilden, wie leicht einzusehen ist, eine Gruppe, und somit muß sich schließlich ergeben

$$q_i = A^i_{0000} + \sum A^i_{jklm} \cos(j\beta_1 + k\beta_2 + l\beta_3 + m\beta_4),$$
$$p_i = \beta_i + \sum B^i_{jklm} \sin(j\beta_1 + k\beta_2 + l\beta_3 + m\beta_4),$$

wo die Koeffizienten A^i und B^i Funktionen von $\alpha_1, \ldots \alpha_4$ sind. Mit der expliziten Bestimmung dieser Funktionen ist das Problem rechnerisch gelöst, und es sind dann auch die Koordinaten der drei Massen durch rein trigonometrische Reihen ohne säkulare (d. h. mit der Zeit anwachsende) Glieder dargestellt.

Andere Methoden zur Integration des Dreikörperproblems haben Poincaré und Lindstedt[1]) entwickelt; hierbei werden Reihen von ganz bestimmter Bauart verwendet und die Glieder wachsender Ordnung nach und nach bestimmt (vgl. Ziff. 32, wo diese Methode für das eingeschränkte Dreikörperproblem durchgeführt werden wird).

Die Konvergenzfrage der Reihen ist ausführlich untersucht worden[2]). Eine anschauliche Darstellung der allgemeinen Bewegung im Dreikörperproblem haben die Reihen bisher nicht gebracht. Wohl aber sind seit langem besondere Bewegungsarten bekannt, über die jetzt noch zu berichten ist.

30. Periodische Lösungen des Dreikörperproblems. Schon Lagrange[3]) hat zwei stationäre Lösungen des ebenen Dreikörperproblems gefunden. Man wird auf die erste dieser Lösungen geführt, wenn man sich die Frage vorlegt, ob die drei Massenpunkte während ihrer Bewegung stets denselben gegenseitigen Abstand $r_{23} = r_{31} = r_{12} = r$ beibehalten, also dauernd in den Ecken eines (möglicherweise veränderlichen, jedenfalls nicht ruhenden) gleichseitigen Dreiecks

[1]) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles. Bd. II; A. Lindstedt, C. R. Bd. 47, S. 1276 u. 1353. 1883. Die älteren Reihenentwicklungen mit säkularen Gliedern können jetzt als veraltet angesehen werden.

[2]) Vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2², Art. 12 (Whittaker), S. 549.

[3]) J. L. Lagrange, Oeuvres. Bd. VI, S. 229.

liegen können. Die drei Bewegungsgleichungen nehmen, falls dies möglich ist, im Rahmen des Newtonschen Gravitationsgesetzes die Form an

$$\ddot{\mathfrak r}_i = \frac{\gamma}{r^3}\left(m_j \mathfrak r_{ij} + m_k \mathfrak r_{ik}\right), \tag{1}$$

wo i, j, k die drei Kombinationen der Zahlen 1, 2, 3 sind. Nimmt man den ruhend gedachten Massenmittelpunkt zum Bezugspunkt der Fahrstrahlen $\mathfrak r_i$, so ist gemäß Definition des Massenmittelpunktes

$$\mathfrak r_i = -\frac{m_j \mathfrak r_{ij} + m_k \mathfrak r_{ik}}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad \text{und} \qquad r_i^2 = \frac{m_j^2 + m_j m_k + m_k^2}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}\, r^2,$$

so daß die Bewegungsgleichungen (1) übergehen in

$$\ddot{\mathfrak r}_i = -\gamma\,(m_1 + m_2 + m_3)\,\frac{\mathfrak r_i}{r^3} = -\gamma\,\frac{(m_j^2 + m_j m_k + m_k^2)^{\frac{3}{2}}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}\,\frac{\mathfrak r_i}{r_i^3}. \tag{2}$$

Hält man r fest, so hat man hier die Differentialgleichung einer ebenen Kreisbewegung der drei Massenpunkte um ihren gemeinsamen Massenmittelpunkt mit der gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit ω, die der Beziehung



$$\omega^2 r^3 = \gamma\,(m_1 + m_2 + m_3) \tag{3}$$

gehorchen muß. Diese Bewegung wird als die Lagrangesche Lösung der äquidistanten Massenpunkte oder Dreieckspunkte des Dreikörperproblems bezeichnet. Für drei gegebene Massen gibt es eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit solcher Lösungen.

Abb. 17. Stationäre Zentralbewegung dreier gravitierender Massen.

Wie die zweite Form der rechten Seite von Gleichung (2) zeigt, ist die Erweiterung dieser stationären Lösungen die ebene Zentralbewegung der drei Punkte in (zueinander ähnlichen) Kegelschnitten um den Massenmittelpunkt M als gemeinsamen Brennpunkt. Das gleichseitige Dreieck $m_1 m_2 m_3$ führt jetzt außer seiner Drehung Pulsationen aus von größter Erweiterung in der gemeinsamen Aphelstellung der drei Massen bis zu kleinster Verengerung in deren gemeinsamer Perihelstellung (Abb. 17).

Eine zweite stationäre Lösung des Dreikörperproblems besteht darin, daß die drei Punkte an eine Gerade festgeheftet sind, welche sich in einer Ebene mit unveränderlicher Winkelgeschwindigkeit ω um den Massenmittelpunkt dreht. Diese Bewegung wird die Lagrangesche Lösung der kollinearen Massenpunkte des Dreikörperproblems genannt. Nach Ziff. 13 lauten, von einem mitumlaufenden Beobachter aus gesehen, die Gleichungen dieser Bewegung, wenn die Punkte auf ihrer Geraden in der Reihenfolge $m_1 m_2 m_3$ angeordnet sind,

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 r_1 &= \gamma\left[\frac{m_2}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{13}^2}\right],\\ \omega^2 r_2 &= \gamma\left[-\frac{m_1}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{23}^2}\right],\\ \omega^2 r_3 &= \gamma\left[-\frac{m_1}{r_{13}^2} - \frac{m_2}{r_{23}^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Gleichungen besitzen in der Tat bei gegebenen Massen und bei vorgeschriebener Winkelgeschwindigkeit ω stets eine eindeutige, verwirklichbare

Lösung. Man bildet nämlich aus ihnen für den Quotienten $s = r_{23}/r_{12}$ die Gleichung fünften Grades

$$(m_1+m_2)s^5+(3m_1+2m_2)s^4+(3m_1+m_2)s^3-(m_2+3m_3)s^2-(2m_2+3m_3)s-(m_2+m_3)=0.$$

Diese Gleichung liefert für alle positiven Massen genau einen reellen, und zwar positiven Wert von s, so daß die drei Abstände r_{ik} schon durch die Massen m_1, m_2, m_3 bis auf einen Proportionalitätsfaktor ϱ bestimmt sind:

$$r_{12} = \varrho, \qquad r_{23} = s\varrho, \qquad r_{13} = (1+s)\varrho.$$

Hiernach werden die drei Größen $x_i = r_i\varrho^2$ als eindeutige Funktionen von ω durch die Bewegungsgleichungen (4) geliefert. Da aber $x_1 - x_3 = r_{13}\varrho^2 = \varrho^3$ ist, so sind damit auch der reelle Wert von ϱ und folglich die Größen r_i gefunden. Die Mannigfaltigkeit dieser stationären Lösungen des Dreikörperproblems ist bei gegebenen Massen also ebenfalls einfach unendlich.

Auch hier kann die Lösung dahin erweitert werden[1]), daß die drei Massen zwar kollinear bleiben, daß aber ihre Abstände r_{ik} und die Winkelgeschwindigkeit ω periodische Funktionen der Zeit werden. Eine andere Erweiterung, bei der die Punkte aufhören, kollinear zu sein, hat Strömgren[2]) gefunden und aufgezeichnet [Abb. 18, welcher das Massenverhältnis $m_1:m_2:m_3 = 1:2:1$ zugrunde liegt, ist in ihrer Ebene um den Massenmittelpunkt (m_2^0) gleichmäßig rotierend zu denken; die Punkte m_1^0, m_2^0, m_3^0 stellen die Lagrangesche stationäre Lösung dar].

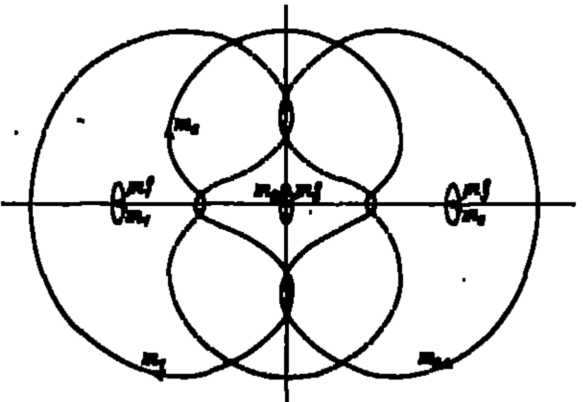


Abb. 18. Strömgrensche relativperiodische Lösung des allgemeinen Dreikörperproblems.

Man kann beweisen[3]), daß es außer den Lagrangeschen keine weiteren stationären Lösungen des Dreikörperproblems gibt. Dagegen ist die Mannigfaltigkeit der (in der allgemeinen Lösung Ziff. 29 enthaltenen) periodischen Lösungen sehr groß[4]), jedoch bis jetzt keineswegs erschöpfend behandelt worden.

31. Transformation des eingeschränkten Dreikörperproblems. Es ist beim eingeschränkten Dreikörperproblem üblich, die drei Massen mit S, J und P (Sonne, Jupiter und Planetoid) zu bezeichnen, als Entfernungseinheit die Strecke SJ, als Masseneinheit die Summe der Massen von S und J und als Zeiteinheit diejenige zu wählen, für welche alsdann die Gravitationskonstante γ den Wert 1 annimmt. Ist μ die Masse J und also $1-\mu$ die Masse S, so sind demnach $1-\mu$ und μ die Abstände der Massen J und S von ihrem gemeinsamen Massenmittelpunkt O, der als ruhend vorausgesetzt wird. Die Strecke SJ dreht sich um O mit der voraussetzungsgemäß unveränderlichen Geschwindigkeit ω. Sind $\mathfrak{r}_{SP}$ und $\mathfrak{r}_{JP}$ die Fahrstrahlen von S und J nach P, und ist $\mathfrak{r}$ der Fahrstrahl von O nach P, so ist die Bewegungsgleichung des Punktes P von verschwindender Masse

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{1-\mu}{r_{SP}^3}\mathfrak{r}_{SP} - \frac{\mu}{r_{JP}^3}\mathfrak{r}_{JP}. \tag{1}$$

[1]) E. T. Whittaker, Analytische Dynamik, S. 422.
[2]) E. Strömgren, Astron. Nachr. Bd. 182, S. 169. 1909.
[3]) E. T. Whittaker, Analytische Dynamik, S. 420.
[4]) S. Encykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2², Art. 12 (Whittaker), S. 526.

Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch O zugrunde, bezeichnet die Koordinaten von P mit q_1, q_2 und seine Geschwindigkeitskomponenten mit p_1, p_2, so kann man die Gleichung (1) als kanonisches System schreiben:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

wo die Hamiltonsche Funktion

$$H = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \Phi(q_1, q_2, t) \tag{3}$$

wird und die (durch die Masse von P geteilte) potentielle Energie Φ durch den Ausdruck

$$\Phi = -\frac{1-\mu}{r_{SP}} - \frac{\mu}{r_{JP}}$$

mit

$$r_{SP}^2 = [q_1 - \mu\cos\omega t]^2 + [q_2 - \mu\sin\omega t]^2,$$

$$r_{JP}^2 = [q_1 + (1-\mu)\cos\omega t]^2 + [q_2 + (1-\mu)\sin\omega t]^2$$

gegeben ist (falls man die positive q_1-Achse zur Zeit $t = 0$ mit der Achse JS zusammenfallen läßt).

Es erweist sich als vorteilhaft, an Stelle der künstlichen Koordinaten q_i, p_i andere, dem Problem angepaßte Koordinaten einzuführen[1]). Solche sind beispielsweise die Bestimmungsstücke und die mittlere Anomalie derjenigen (sog. intermediären) Bahnellipse, welche der Punkt P von der Zeit t an beschreiben würde, wenn er von diesem Augenblick an nur noch durch eine einzige Masse 1 nach dem Ursprung O hin gezogen würde. Ist wieder a die große Halbachse dieser Ellipse, ε die numerische Exzentrizität, n die mittlere Bewegung, t_0 die Zeit des Perihel-durchgangs, $\varphi - \varphi_0$ die wahre Anomalie und φ_0 das Azimut des Perihels gegen die positive q_1-Achse, so wählt man als natürliche Koordinaten die Größen

$$q_1' = n(t - t_0), \qquad q_2' = \varphi_0, \qquad p_1' = \sqrt{a}, \qquad p_2' = \sqrt{a(1-\varepsilon^2)}.$$

Da nach Ziff. 6, Gleichung (3) (worin jetzt $\mu = 1$ zu setzen ist) $p_2' = k$ wird, so ist p_2' einfach die doppelte Flächengeschwindigkeit dieser intermediären Keplerbewegung. Ähnlich hängt p_1' mit der Gesamtenergie $H_0 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{r}$ der intermediären Bewegung zusammen: nach Ziff. 6, Gleichung (4) wird nämlich

$$H_0 = -\frac{1}{2a} = -\frac{1}{2p_1'^2}.$$

Die Transformationsformeln zwischen q_i, p_i und q_i', p_i' sind elementar herzuleiten, wenn man die exzentrische Anomalie u zu Hilfe nimmt. Man findet zufolge Ziff. 6, Gleichung (6), und weil $p_i = \dot{q}_i$ und nach Ziff. 6, Gleichung (7) und (8) $\dot{u} = 1/r\sqrt{a}$ ist,

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= -p_1'\sqrt{p_1'^2 - p_2'^2}\cos q_2' + p_1'(p_1'\cos q_2'\cos u - p_2'\sin q_2'\sin u),\\
q_2 &= -p_1'\sqrt{p_1'^2 - p_2'^2}\sin q_2' + p_1'(p_1'\sin q_2'\cos u + p_2'\cos q_2'\sin u),\\
p_1 &= -\frac{p_1'\cos q_2'\sin u + p_2'\sin q_2'\cos u}{p_1'(p_1' - \sqrt{p_1'^2 - p_2'^2}\cos u)},\\
p_2 &= -\frac{p_1'\sin q_2'\sin u - p_2'\cos q_2'\cos u}{p_1'(p_1' - \sqrt{p_1'^2 - p_2'^2}\cos u)}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dabei ist noch die exzentrische Anomalie u mit der mittleren Anomalie q_1' durch die Keplersche Gleichung [Ziff. 6, Gleichung (7)]

$$q_1' = u - \varepsilon\sin u$$

[1]) H. POINCARÉ, Acta math. Bd. 13, S. 1. 1890.

verknüpft, aus welcher sich die in den Transformationsformeln (4) auftretenden Glieder $\cos u$ und $\sin u$ als Fouriersche Reihen von q_1' berechnen lassen, deren Koeffizienten Besselsche Funktionen von $e=\sqrt{1-(p_2'/p_1')^2}$ sind:

$$\cos u = -\frac{e}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu^2} \frac{dJ_\nu(\nu e)}{de} \cos \nu q_1',$$

$$\sin u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu e} J_\nu(\nu e) \sin \nu q_1'.$$

Die Tranformation (4) erweist sich als eine kanonische, so daß die Bewegungsgleichungen (2), in den neuen Koordinaten q_i', p_i' geschrieben, ihre Gestalt behalten. Dabei wird die umgerechnete Hamiltonsche Funktion H' nach wie vor die Zeit explizit enthalten [vgl. (3)], aber offensichtlich können die Koordinaten $q_2' \equiv \varphi_2$ und die Zeit t nur in der Verbindung $q_2' - \omega t$ vorkommen, weil doch die Anfangsrichtung der Strecke JS (die positive ξ_1-Achse) vollständig willkürlich ist, und die Azimute φ_2 nur relativ zu dieser Richtung gemessen sind. Führt man also neue Veränderliche

$$q_1'' = q_1', \qquad q_2'' = q_2' - \omega t, \qquad p_1'' = p_1', \qquad p_2'' = p_2' \tag{5}$$

und eine neue Hamiltonsche Funktion

$$H'' = H' - \omega p_2'' \tag{6}$$

ein, so geht das kanonische System über in

$$\dot q_i'' = \frac{\partial H''}{\partial p_i''}, \qquad \dot p_i'' = -\frac{\partial H''}{\partial q_i''}, \qquad (i = 1, 2) \tag{7}$$

und H'' enthält die Zeit nicht mehr explizit, so daß $H'' =$ konst. ein erstes Integral der Bewegung darstellt. Man nennt es nach seinem Entdecker das **Jacobische Integral des eingeschränkten Dreikörperproblems**[1]).

Dieses Integral hat eine einfache anschauliche Bedeutung. Da die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ von P, gemessen in einem die Drehung ω (Drehvektor $\mathfrak{o}$) mitmachenden Raum mit der Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zusammenhängt durch[2])
$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} - [\mathfrak{o}\mathfrak{r}]$, so wird

$$\tfrac{1}{2}v'^2 = \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 - \mathfrak{v}[\mathfrak{o}\mathfrak{r}].$$

Das dritte Glied der rechten Seite ist gleich $-\omega p_2'$, wo, wie früher bemerkt, p_2' die doppelte Flächengeschwindigkeit der intermediären Bahn bedeutet. Mithin wird

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \omega p_2' = \tfrac{1}{2}v'^2 - \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2$$

und also nach (3) und (6)

$$H'' = \tfrac{1}{2}v'^2 - \tfrac{1}{2}\omega^2 r^2 + \Phi. \tag{8}$$

Das erste Glied der rechten Seite stellt die im rotierenden System gemessene kinetische Energie dar, das zweite die potentielle Energie des Fliehkraftfeldes, das dritte die potentielle Energie der Gravitation, und das Jacobische Integral drückt demgemäß den Energiesatz im rotierenden System aus. Dieses Integral hätte also von vornherein angeschrieben werden können. Es ist, wie POINCARÉ[3]) bewiesen hat, das einzige in den Koordinaten algebraische Zwischenintegral des Problems.

---

[1]) C. G. J. JACOBI, C. R. Bd. 3, S. 59. 1836.
[2]) S. Kap. 3, Ziff. 26 ds. Bd. des Handb. [3]) S. Fußnote 2) auf S. 351.

Da, wie die Transformationsformeln (4) zeigen, q_1 und q_2 periodische Funktionen von q_1' und q_2' und damit auch von q_1'' und q_2'' mit der Periode 2π sind, so gilt dies auch von H'', so daß die in Ziff. 29 angegebene Delaunaysche Integrationsmethode auf das kanonische System (7) ohne weiteres anwendbar ist.

32. Integration des eingeschränkten Dreikörperproblems. Wenn, wie dies beim astronomischen *SJP*-Problem tatsächlich der Fall ist, die Masse μ des Punktes J gegen die Masse $1-\mu$ des Punktes S sehr klein bleibt, so empfiehlt sich eine andere Integrationsmethode, die von LINDSTEDT[1]) entwickelt wurde und darauf beruht, daß man alle vorkommenden Größen als Potenzreihen von μ schreiben kann.

Man versucht nämlich die Ansätze

$$\left.\begin{aligned} q_i'' &= w_i + \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu^\nu q_i^{(\nu)}, \\ p_i'' &= p_i^{0} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu^\nu p_i^{(\nu)}, \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2) \tag{1}$$

wo $p_i^{(\nu)}, q_i^{(\nu)}$ noch unbekannte Funktionen von zwei Hilfsveränderlichen w_i sein sollen, welche in der Form

$$w_i = n_i t + \alpha_i \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

darstellbar sind, unter α_i Integrationskonstanten verstanden, während die n_i ihrerseits wieder Potenzreihen von μ mit festen noch unbekannten Koeffizienten $n_i^{(\nu)}$ sind:

$$n_i = n_i^{0} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu^\nu n_i^{(\nu)}. \qquad (i = 1, 2) \tag{3}$$

Man kann die Hamiltonsche Funktion unter Vorziehung des von μ unabhängigen Teiles H_0 in der Form schreiben

$$H'' = H_0 + \mu H_1,$$

wo nach Ziff. 31

$$H_0 = \left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{r} - \omega p_2''\right)_{\mu=0} = -\frac{1}{2p_1^{0\,2}} - \omega p_2^{0}$$

wird. Wäre $\mu = 0$, so ließe sich das kanonische System der Bewegungsgleichungen mit $H'' = H_0$ ohne weiteres integrieren und ergäbe natürlich die Keplerbewegung um O. Für $\mu \neq 0$ wird diese Bewegung durch die Masse J „gestört" nach Maßgabe des Zusatzgliedes μH_1, welches man daher die **Störungsfunktion** nennt. Die Ermittlung der tatsächlichen Bewegung heißt **Störungstheorie**[2]).

Um diese Rechnung durchzuführen, entwickle man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H''}{\partial p_i''} &= P_i^{0} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu^\nu P_i^{(\nu)}, \\ -\frac{\partial H''}{\partial q_i''} &= \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\mu^\nu Q_i^{(\nu)}. \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2)$$

Führt man diese Entwicklungen (etwa als Taylorsche Reihen) wirklich aus, so sieht man leicht ein, daß $P_1^{0} = (1/p_1^{0})^3$ und $P_2^{0} = -\omega$ wird, ferner, daß

[1]) S. Fußnote 1) auf S. 353. Eine sehr übersichtliche Darstellung dieser Methode findet man bei C. H. MÜLLER u. G. PRANGE, Allgemeine Mechanik, S. 311. Vgl. auch Kap. 4, Ziff. 15—18 ds. Bd. des Handb.

[2]) Vgl. hierzu die allgemeineren Darlegungen in Kap. 4 dieses Bandes.

von vornherein $Q_i^{(0)} = 0$ ist, weiter, daß die höheren Glieder $P_i^{(\nu)}$ von den Größen $q_{1,2}^{(1)}$ bis $q_{1,2}^{(\nu-1)}$ und $p_{1,2}^{(1)}$ bis $p_{1,2}^{(\nu)}$, dagegen die Glieder $Q_i^{(\nu)}$ nur von den Größen $q_{1,2}^{(1)}$ bis $q_{1,2}^{(\nu-1)}$ und $p_{1,2}^{(1)}$ bis $p_{1,2}^{(\nu-1)}$ abhängen, und daß alle $P_i^{(\nu)}$ und $Q_i^{(\nu)}$, als periodische Funktionen von q_1^{0} und q_2^{0}, sich auch als periodische Funktionen von w_1 und w_2 darstellen lassen müssen in der Form

$$P_i^{(\nu)} = a_{00} + \sum a_{jh} \cos(j w_1 + h w_2), \qquad (4)$$

$$Q_i^{(\nu)} = \qquad \sum b_{jh} \sin(j w_1 + h w_2), \qquad (5)$$

wo die Summen über alle Kombinationen von Paaren ganzer Zahlen j, h laufen, ausgenommen die Kombination $j = h = 0$.

Nunmehr nehmen die kanonischen Gleichungen (7) von Ziff. 31 die Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} n_1 \frac{\partial q_i}{\partial w_1} + n_2 \frac{\partial q_i}{\partial w_2} &= P_i^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu P_i^{(\nu)}, \\ n_1 \frac{\partial p_i}{\partial w_1} + n_2 \frac{\partial p_i}{\partial w_2} &= \qquad\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^\nu Q_i^{(\nu)}. \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2) \qquad (6)$$

In erster Näherung setzt man $\mu = 0$, womit diese Gleichungen übergehen in

$$n_1^{(0)} = P_1^{(0)} = \frac{1}{p_1^{(0)3}}, \qquad n_2^{(0)} = P_2^{(0)} = -\omega,$$

$$n_1^{(0)} \frac{\partial p_i^{(0)}}{\partial w_1} + n_2^{(0)} \frac{\partial p_i^{(0)}}{\partial w_2} = 0;$$

hieraus folgt, daß $p_1^{(0)}$ und $p_2^{(0)}$ weitere Integrationskonstanten sind, während

$$q_1^{(0)} = n_1^{(0)} t + \alpha_1, \qquad q_2^{(0)} = n_2^{(0)} t + \alpha_2$$

wird.

Die zweite Näherung behält die Glieder erster Ordnung in μ bei, so daß aus (6) entsteht

$$n_1^{(0)} \frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial w_1} + n_2^{(0)} \frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial w_2} + n_i^{(1)} = P_i^{(1)}, \qquad (7)$$

$$n_1^{(0)} \frac{\partial p_i^{(1)}}{\partial w_1} + n_2^{(0)} \frac{\partial p_i^{(1)}}{\partial w_2} \qquad = Q_i^{(1)}. \qquad (8)$$

Da laut früherer Feststellung $Q_i^{(1)}$ nur von den schon berechneten Größen $q_{1,2}^{(0)}$ und $p_{1,2}^{(0)}$ abhängt, so sind die Koeffizienten der Reihe (5) bekannt und konstant, und somit läßt sich (8) integrieren und gibt

$$p_i^{(1)} = -\sum \frac{b_{jh} \cos(j w_1 + h w_2)}{j n_1^{(0)} + h n_2^{(0)}}. \qquad (i = 1, 2) \qquad (9)$$

Damit ist aber auch die Reihe (4) für $P_i^{(1)}$, welche außer $q_{1,2}^{(0)}$ und $p_{1,2}^{(0)}$ noch $p_{1,2}^{(1)}$ enthält, als bekannt anzusehen, und insbesondere wird ihr nicht periodisches Glied a_{00} eine bestimmte feste Zahl. Verfügt man also über die noch offene Größe $n_i^{(1)}$ so, daß $n_i^{(1)} = a_{00}$ wird, so läßt sich die Gleichung (7) in der Form integrieren

$$q_i^{(1)} = \sum \frac{a_{jh} \sin(j w_1 + h w_2)}{j n_1^{(0)} + h n_2^{(0)}}. \qquad (i = 1, 2) \qquad (10)$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß $j n_1^{(0)} + h n_2^{(0)} \neq 0$ sei, was wegen $n_2^{(0)} = -\omega$ besagt, daß die mittlere Bewegung $n_1^{(0)}$ auf der intermediären Ellipse in keinem rationalen Verhältnis zur mittleren gegenseitigen Bewegung ω der Massen S und J stehen

darf. Wenn, was bei Planetoiden (z. B. vom Hekubatyp) tatsächlich vorkommt, verhältnismäßig kleine Zahlen j und k vorhanden sind, welche den Ausdruck $jn_1^{(0)} + kn_2^{(0)}$ zwar nicht gerade gleich Null, aber doch recht klein machen, so liegt der Fall der sog. kleinen Divisoren vor, der namentlich dann sehr gefürchtet ist, wenn er erst bei höheren Gliedern ν auftritt, da er dann die Berechnung aller Glieder bis zum ν-ten nötig machen kann.

Die nächste Näherung geht bis zu den Gliedern in μ^2 und liefert statt (6)

$$n_1^{(0)}\frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial w_1} + n_2^{(0)}\frac{\partial q_i^{(2)}}{\partial w_2} + n_i^{(2)} = P_i^{(2)} - \left(n_1^{(1)}\frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial w_1} + n_2^{(1)}\frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial w_2}\right), \qquad (11)$$

$$n_1^{(0)}\frac{\partial p_i^{(2)}}{\partial w_1} + n_2^{(0)}\frac{\partial p_i^{(2)}}{\partial w_2} = Q_i^{(2)} - \left(n_1^{(1)}\frac{\partial p_i^{(1)}}{\partial w_1} + n_2^{(1)}\frac{\partial p_i^{(1)}}{\partial w_2}\right). \qquad (12)$$

Hier kann zunächst die rechte Seite von (12), da sie nur von den schon bekannten Größen $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, p_1^{(1)}, p_2^{(1)}$ abhängt, in eine Reihe vom Typ (5) mit festen Koeffizienten entwickelt werden, wobei sich zeigen läßt, daß kein nichtperiodisches vorkommt. Die Integration liefert also $p_i^{(2)}$ als eine Reihe vom Typ (9). Mit den so erhaltenen Werten von $p_i^{(2)}$ ist aber auch wieder die rechte Seite von (11) als Reihe vom Typ (4) darstellbar, und das nichtperiodische (feste) Glied kann durch Gleichsetzen mit $n_i^{(2)}$ beseitigt werden, so daß die Integration für $q_i^{(2)}$ auf eine Reihe von der Form (10) führt.

So läßt sich das Verfahren, das auf eine allmähliche Berechnung der Glieder steigender Potenzen von μ in den Reihen (1) und (3) hinausläuft, beliebig weit fortsetzen und liefert die Lagekoordinaten des Punktes P als trigonometrische Reihen ohne säkulare Glieder. Die Reihen sind sämtlich semikonvergent[1]).

33. Periodische Lösungen des eingeschränkten Dreikörperproblems. Man nennt die Bewegung des Punktes P periodisch, wenn seine Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten relativ zu dem sich gleichförmig drehenden System SJ gleichperiodische Funktionen der Zeit sind. Läßt man, wie das in den folgenden Abbildungen der Fall sein soll, die Zeichenebene mit der Strecke SJ um den Massenmittelpunkt von S und J umlaufen, so stellt sich jede periodische Bahn von P als geschlossene Kurve dar.

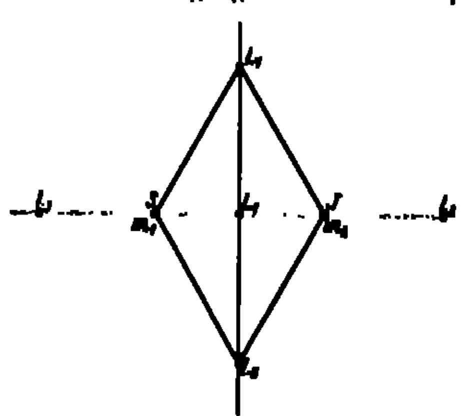


Abb. 19. Die fünf Librationspunkte des eingeschränkten Dreikörperproblems für $m_1 = m_2$.

Unter diesen periodischen Bahnen kommen insbesondere wieder die Lagrangeschen Lösungen der äquidistanten (Dreiecks-) und der kollinearen Punkte vor (Ziff. 30); ihre Relativbahnen in der rotierenden Zeichenebene sind punktförmig, und zwar gibt es — bei Beschränkung auf die Ebene — offenbar fünf solcher Punkte L_i. Man nennt sie die Librationspunkte; ihre Lage zu den Massen $S(=m_1)$ und $J(=m_2)$ ist in Abb. 19 für den Fall $m_1 = m_2$ gezeichnet. L_1, L_2 und L_3 sind die drei möglichen Lagen von P, falls P mit S und J kollinear liegen soll; L_4 und L_5 sind die zu S und J als dritte Ecke gehörigen Lagen der Lagrangeschen Dreieckslösung. Die Librationspunkte spielen nun auch bei

[1]) Vgl. Kap. 4, Ziff. 18 ds. Bd. des Handb.

allgemeineren periodischen Lösungen eine Rolle, teils als asymptotische Punkte der Bahnen, teils als Grenzpunkte ganzer Klassen von solchen Bahnen.

Abgesehen von den Punkten L_4 und L_5 selbst müssen die periodischen Bahnen für $m_1 = m_2$ symmetrisch zur Achse SJ sein. Ihre Erforschung verdankt man neben den wichtigen Vorarbeiten[1]) von DARWIN, THIELE und BURRAU vor allem den systematischen numerischen Rechnungen, die von STRÖMGREN[2]) auf der Kopenhagener Sternwarte so organisiert wurden, daß heute die gesamte Mannigfaltigkeit der möglichen periodischen Bahnen schon fast lückenlos zu überblicken ist.

Indem man von den in Ziff. 31 aufgestellten Differentialgleichungen (oder geeigneten Umformungen derselben) ausgeht, hat man für jede auf der Verbindungsgerade SJ gelegene Anfangslage des Punktes P diejenige zu SJ senkrechte Anfangsgeschwindigkeit zu suchen, die die Bahn zu einer geschlossenen macht. Bei vorgegebenen Massen und Abständen von S und J und bei vorgegebener Winkelgeschwindigkeit ω der Geraden SJ gehört so zu jeder Anfangslage eine oder auch mehrere Anfangsgeschwindigkeiten, so daß dann im allgemeinen mehrere einfachunendlichen Mannigfaltigkeiten periodischer Bahnen möglich sind. Jede dieser Mannigfaltigkeiten bildet eine sog. Klasse. Solcher Klassen gibt es etwa 15 und wahrscheinlich nicht viel mehr.

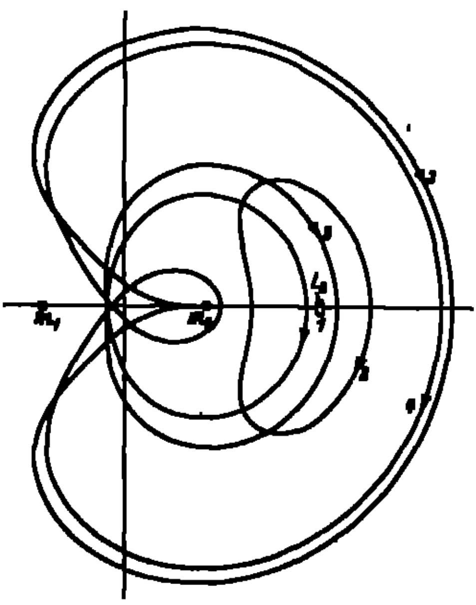


Abb. 20. Rückläufige periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem um den Librationspunkt L_4.

Bei diesen Rechnungen, die man wohl auch als „numerisches Experiment" bezeichnet hat, dient das Jacobische Integral [Ziff. 31, Gleichung (8)] als Kontrolle. Überhaupt wird man sich die im folgenden für das Massenverhältnis $m_1 = m_2$ wiedergegebenen Bahnkurven ziemlich leicht auch anschaulich machen können, wenn man beachtet, daß in der mit SJ umlaufenden Zeichenebene außer dem Schwerkraftfelde noch das Fliehkraftfeld wirkt (vgl. Ziff. 31).

Nimmt man an, daß die Drehung ω von SJ im Gegenzeigersinne erfolgt, so heißt die Bahn von P **vorschreitend** oder **rückläufig**, je nachdem P im Gegenzeigersinne oder im Uhrzeigersinne umläuft.

Erste Abteilung: Periodische Bahnen um einen Librationspunkt.

Klasse a (und b): Rückläufige Bahnen um L_4 (und ganz entsprechend um L_5), Abb. 20. Die Mannigfaltigkeit dieser in sich geschlossenen Bahnklasse fängt mit dem Punkte L_4 (bzw. L_5) an, dann folgen ellipsenförmige (1) und weiterhin bohnenförmige Bahnen (2), die schließlich in eine sog. **Ejektionsbahn** (3) übergehen, bei welcher die Bewegung mit unendlich großer Geschwindigkeit in der Masse m_2 (bzw. m_1) endigt und beginnt. Nun löst sich die Spitze in eine Schleife auf (4), die Schleife wird größer (5) und fällt schließlich mit der

[1]) Über die Literatur vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2², Art. 19 ([illegible]), S. 967.
[2]) Vgl. den neuesten Bericht von E. STRÖMGREN, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Bd. IV, S. 233. Berlin 1925. Diesem Berichte sind auch die folgenden Abbildungen im wesentlichen entnommen.

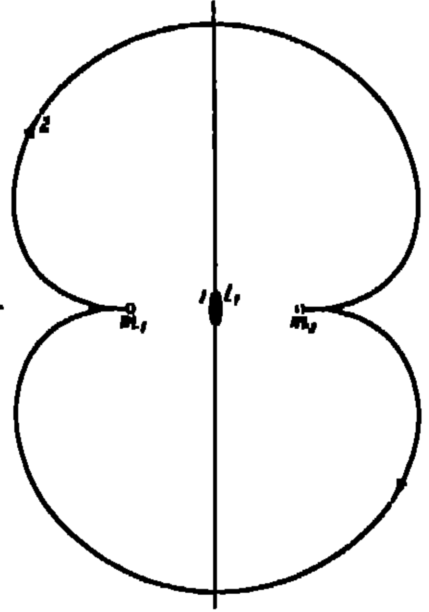


Abb. 21. Rückläufige periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem um den Librationspunkt L_1.

übrigen Bahn zusammen. Von da an geht die Entwicklung (indem sich nun Bahn und Schleife vertauschen) rückwärts (5, 4, 3, 2, 1) und endigt im ursprünglichen Librationspunkt.

Klasse c: Rückläufige Bahnen um L_1, Abb. 21. Auf ellipsenförmige Bahnen (1) folgen doppelt eingebuchtete (ähnlich den Cassinischen Kurven) und schließlich eine Ejektionsbahn (2) durch beide Massen m_1 und m_2, weiterhin wahrscheinlich Bahnen mit Schleifen um m_1 und m_2.

Klasse d (und e): Rückläufige Bahnen um L_4 (und ganz entsprechend um L_5). Solche kommen nur für wesentlich verschiedene Massen m_1 und m_2 vor und sind für astronomische Zwecke als Nachbarbahnen zu den Lagrangeschen äquidistanten Punkten verschiedentlich untersucht worden[1].

Zweite Abteilung: Periodische Bahnen um eine der beiden Massen m_1 und m_2.

Klasse f (und h): Rückläufige Bahnen um m_2 (und ganz entsprechend um m_1), Abb. 22. Auf kleine kreisförmige Bahnen (1) mit sehr großer Geschwindigkeit um m_2 (bzw. m_1) folgen ovale (2), dann bohnenförmige (3), und schließlich eine Ejektionsbahn (4) durch m_1 (bzw. m_2).

Klasse g (und i): Vorschreitende Bahnen um m_2 (und ganz entsprechend um m_1), Abb. 23. Auf kleine kreisförmige Bahnen (1) mit sehr großer Geschwindigkeit um m_2 (bzw. m_1) folgen ovale (2, 3, 4), die schließlich in eine Ejektionsbahn (5) durch m_2 (bzw. m_1) übergehen. Über die weitere Fortsetzung dieser Klasse liegen Vermutungen vor[2].

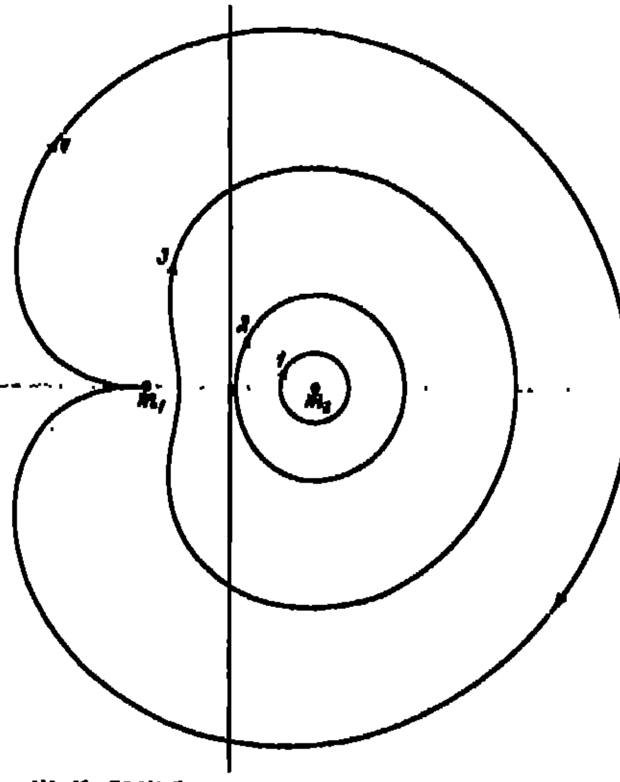


Abb. 22. Rückläufige periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem um die Masse m_2.

[1] Vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 2², Art. 19 ([illegible]), S. 567.

[2] E. Strömgren, Internat. Congr. of Math. Helsingfors 1922.

Dritte Abteilung: Periodische Bahnen um beide Massen m_1 und m_2.

Klasse k: Vorschreitende Bahnen, Abb. 24. Beginnt man mit der Ejektionsbahn (1) durch beide Massen m_1 und m_2, so schließen sich einerseits außerhalb der beiden Massen erst ovale (2), dann Spitzen- (3) und schließlich Schleifenbahnen (4) um die Librationspunkte L_4 und L_5 an; andererseits folgen auf die Ejektionsbahn (1) Bahnen (5) mit Schleifen um die Massen m_1 und m_2 und mit weiteren Schleifen, die schließlich die Librationspunkte L_4 und L_5 umschließen. Die Zahl der Schleifen um L_4 und L_5 kann in beiden Fällen immer größer und größer werden, bis zuletzt L_4 und L_5 asymptotische Punkte sind, in welche sich die Bahn spiralförmig mit unendlich kleiner Geschwindigkeit verliert, und aus denen sie ebenso wieder herauskommt.



Abb. 23. Vorschreitende periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem um die Masse m_2.

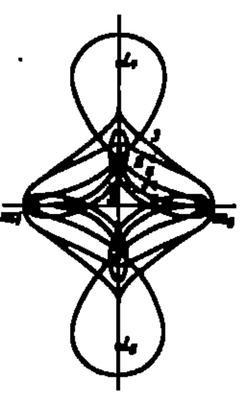


Abb. 24. Vorschreitende periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem um die Massen m_1 und m_2.

Klasse l: Bahnen, die im bewegten System rückläufig, im absoluten System vorschreitend sind, Abb. 25. In großer Entfernung gibt es annähernd kreis-

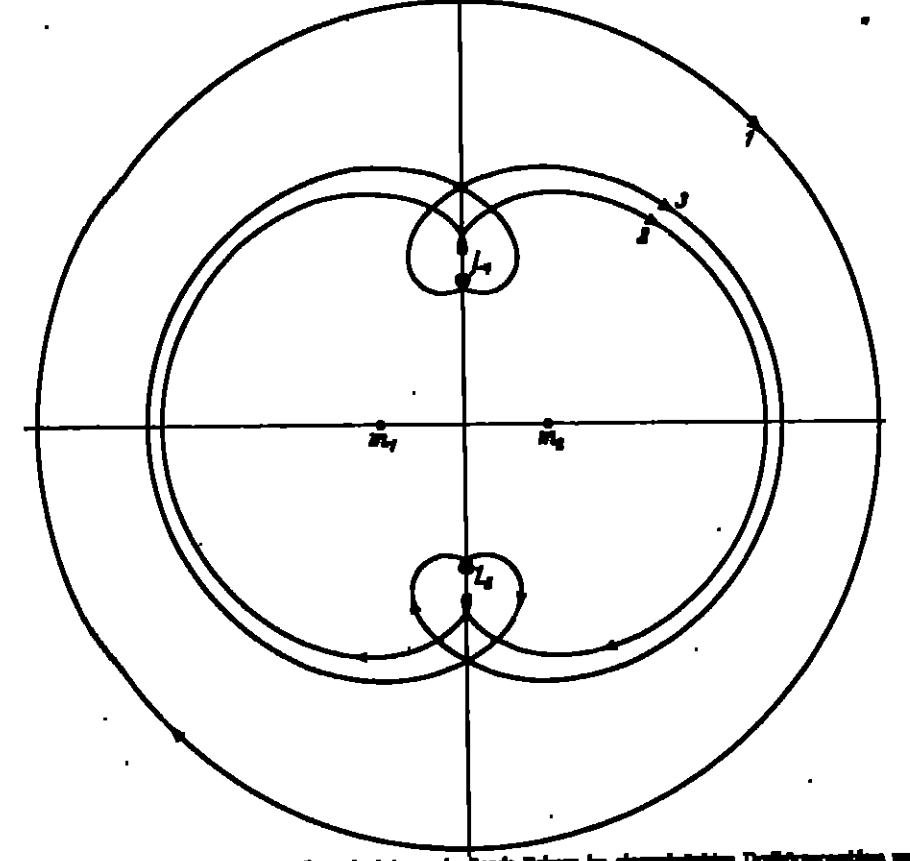


Abb. 25. Periodische, relativ rückläufige, absolut vorschreitende Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem um die Massen m_1 und m_2.

förmige Bahnen (1) um den Massenmittelpunkt von m_1 und m_2 mit sehr kleiner Geschwindigkeit. Treten die Bahnen näher an m_1 und m_2 heran, so flachen sie sich ab, bilden später (2) Schleifen, die sich allmählich um L_4 und L_5 legen, und endigen asymptotisch in diesen Punkten (4).

Klasse m: Bahnen, die im bewegten und im absoluten System rückläufig sind, Abb. 26. Hier endigen die sich mehr und mehr abplattenden Bahnen

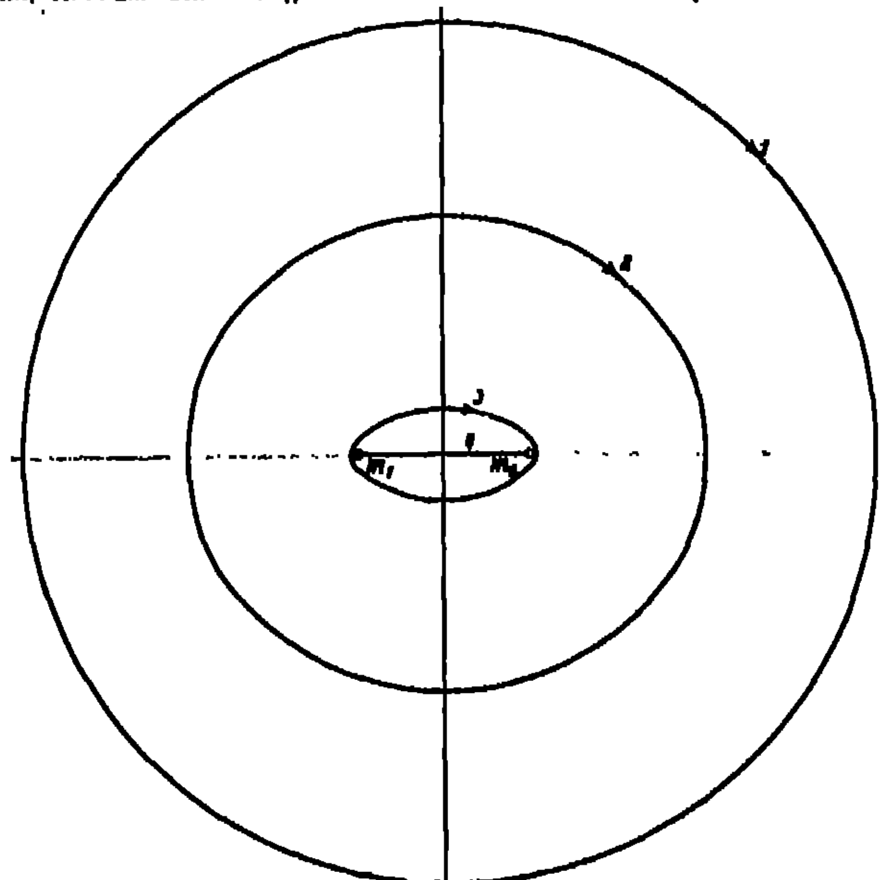


Abb. 26. Rückläufige periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem um die Massen m_1 und m_2.

(1, 2, 3) in einer Ejektionsbahn (4), bei welcher der Punkt P zwischen m_1 und m_2 geradlinig mit unendlicher Geschwindigkeit hin- und herfliegt.

Vierte Abteilung: Sonstige periodische Bahnen.

Klasse n: Rückläufige Bahnen, Abb. 27. Geht man von der symmetrischen Bahn (0) aus, so gelangt man einerseits (über 1) zu einer Ejektionsbahn (2) durch m_1 und weiterhin zu Schleifenbahnen (3, 4) um m_1, andererseits symmetrisch hierzu (nicht eingezeichnet) zu einer Ejektionsbahn durch m_2 und zu Schleifenbahnen um m_2.

Für einige weitere Bahnklassen bestehen Vermutungen; die Rechnungen darüber sind jedoch noch nicht abgeschlossen[1]).

34. Das Vier- und Mehrkörperproblem. Unsere Kenntnisse über die Bewegungsformen im Vier- und Mehrkörperproblem sind noch ganz lückenhaft. Zwar ist die Reduktion der Bewegungsgleichungen auf die $(6n-12)$-te Ordnung

[1]) Vgl. die zitierten Arbeiten von Strömgren.

auch im allgemeinsten Falle vollständig durchgeführt worden[1]), und auch eine Übertragung der Integrationsmethoden des Dreikörperproblems auf vier und mehr Körper ist wohl möglich; aber nur wenige Einzelergebnisse sind bis jetzt zutage gefördert.

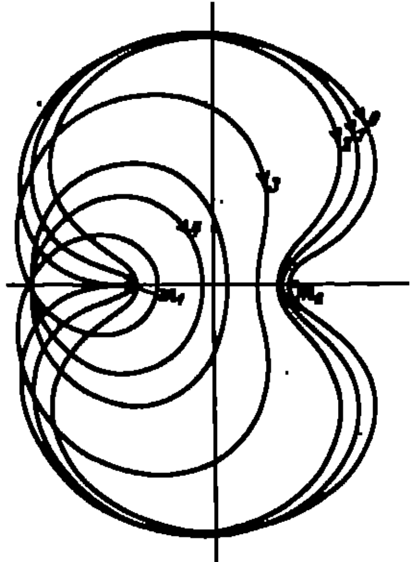


Abb. 27. Weitere rückläufige periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem.

Die Lagrangesche Lösung der kollinearen Punkte ist auch bei mehr als drei Körpern vorhanden; und auch die Lagrangesche Lösung der äquidistanten (Dreiecks-) Punkte kann, wie schon die Anschauung erwarten läßt, auf vier und mehr Punkte erweitert werden[2]): sind die n Massen unter sich gleich, so bilden sie die Ecken eines um seinen Mittelpunkt gleichförmig umlaufenden regulären n-Ecks; sind die Massen verschieden, so ist das n-Eck im allgemeinen nicht regulär. Außer diesen stationären Lösungen ist im Falle des Vierkörperproblems (mit gleichen Massen) noch eine allgemeinere periodische Bahn (Abb. 28) numerisch berechnet worden[3]).

Auch über das eingeschränkte Vier- und Mehrkörperproblem (drei bzw. $n-1$ endliche Massen bewegen sich in vorgeschriebenen Bahnen und ziehen dabei einen unendlich kleinen vierten bzw. n-ten Massenpunkt an) liegen bis jetzt nur ganz spärliche Untersuchungen vor[4]).

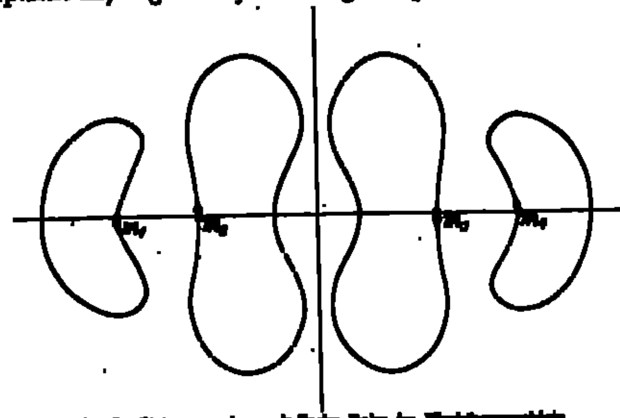


Abb. 28. [illegible] periodische Bahn im Vierkörperproblem.

VI. Störung von Punktbahnen durch Stöße; Stabilität.

35. Stoß auf einen Massenpunkt. Unter den verschiedenen Möglichkeiten, die Bahn eines Massenpunktes zu variieren, ist — hinsichtlich der Frage der Stabilität dieser Bahn — die wichtigste der Stoß. Unter einem Stoß auf einen

[1]) I. L. Bennett, Mess. of math. (2) Bd. 44, S. 113. 1904.
[2]) Über die Literatur vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2², Art. 12 (Whittaker), S. 529; sowie E. T. Whittaker, Analytische Dynamik, S. 421.
[3]) E. Strömgren, Astron. Nachr. 1921, S. 26.
[4]) Longley, Trans. Amer. math. soc. Bd. 8, S. 159. 1907.

Massenpunkt versteht man diejenige Einwirkung auf ihn, welche seinen augenblicklichen Impuls (oder was auf dasselbe hinauskommt, seinen augenblicklichen Geschwindigkeitsvektor) plötzlich verändert, ohne seine augenblickliche Lage zu stören. Der Stoß beeinflußt somit den augenblicklichen Ortsvektor $\mathfrak{r}$ nicht, gibt aber den Vektoren des Impulses $\mathfrak{i}$ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gewisse Zusätze $\Delta\mathfrak{i} = m\Delta\mathfrak{v}$. Ebenso ändert er die Lagrangeschen Koordinaten q_i nicht, variiert jedoch die Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{q}_i$ um $\Delta\dot{q}_i$, die Impulskoordinaten p_i um Δp_i.

Man spricht insbesondere von einem **kleinen Stoß**, wenn die Variationen $\Delta\mathfrak{i}$ usw. als kleine Größen behandelt werden sollen, deren Produkte mit sich selbst und anderen kleinen Größen vernachlässigbar sind.

Ist die ungestörte Bewegung analytisch gegeben, so bereitet die Berechnung der gestörten Bewegung in der Regel keine besonderen Schwierigkeiten, solange man sich auf **kleine Stöße** beschränkt. Beispiele hierfür bieten die kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes im Raume oder auf einer glatten Fläche[1]), das punktförmige ebene und Kegelpendel. Ein weiteres für die Physik besonders wichtig gewordenes Beispiel betrifft die Keplerbewegung, deren Störungen sich ganz anschaulich deuten lassen.

36. Störung der Keplerbewegung durch Stöße. Die Bahnelemente einer Keplerbewegung innerhalb ihrer Ebene sind: die große Halbachse a, die numerische Exzentrizität ε, das Perihelazimut φ_0 und die mittlere Bewegung n (Ziff. 6). Die Elemente der Bahnebene sind: ihre Neigung i gegen eine durch das Kraftzentrum gelegte Grundebene sowie das Azimut Ω der Knotenlinie gegen eine feste Richtung in der Grundebene; dieses Azimut soll ebenso wie φ_0 positiv im Sinne des Bahnumlaufs gezählt werden, und als Knotenlinie ist in üblicher Weise die Schnittgerade der Bahnebene und der Grundebene verstanden. Um die Veränderungen Δa, $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varphi_0$, Δn, Δi und $\Delta\Omega$ dieser Elemente infolge einer kleinen stoßartigen Störung zu finden, zerlege man die Störung in eine Komponente senkrecht zur Bahnebene und in eine Komponente innerhalb der Bahnebene; die letzte Komponente zerfällt dann wieder entweder in eine tangentiale und eine normale oder in eine azimutale und eine radiale Komponente. Wie man leicht überlegt, beeinflussen die in der Bahnebene liegenden Störungskomponenten nur die Bahnelemente a, ε, φ_0 und n, wogegen die zur Bahnebene senkrechte Störungskomponente nur die Größen i und Ω ändern kann.

a) **Tangentialstoß mit Geschwindigkeitszuwachs** Δv **im Sinne des Bahnumlaufes.** Indem man Gleichung (4) von Ziff. 6

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

bei festgehaltenen Bahnkoordinaten (also festem Wert r) differentiiert, kommt $2v\Delta v = \frac{\mu}{a^2}\Delta a$ und also

$$\Delta a = \frac{2a^2 v}{\mu}\Delta v. \tag{1}$$

Ebenso folgt aus Gleichung (8), Ziff. 6, $\Delta n = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\frac{\Delta a}{a^2}$ oder

$$\Delta n = -\frac{3v}{\sqrt{\mu a}}\Delta v. \tag{2}$$

Ferner erhält man aus Gleichung (5) von Ziff. 6, nämlich $\mu a(1-\varepsilon^2) = h^2$, zunächst $2\mu a\varepsilon\Delta\varepsilon = \mu\Delta a(1-\varepsilon^2) - 2h\Delta h$. Hier setzt man Δa aus (1) ein,

[1]) W. THOMSON u. P. G. TAIT, Treatise on natural philosophy, Art. 355. Cambridge 1879.

beachtet außerdem, daß (da der Stoß die Lage der Bahntangente nicht ändert) $v\Delta h = h\Delta v$ ist, und hat somit

$$\mu a \varepsilon \Delta\varepsilon = [a^2 v^2 (1-\varepsilon^2) - h^2] \frac{\Delta v}{v}.$$

Berücksichtigt man noch die Gleichungen (1) und (4) von Ziff. 6, so formt man dies leicht um in

$$\Delta\varepsilon = 2[\varepsilon + \cos(\varphi - \varphi_0)] \frac{\Delta v}{v}. \tag{3}$$

Endlich schreibt man Gleichung (1), Ziff. 6 in der Form $r\mu[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)] = h^2$ und findet daraus bei festgehaltenen Werten von r und φ

$$\varepsilon\Delta\varphi_0 \sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{2h\Delta h}{r\mu} - \Delta\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) \tag{4}$$

und nach einfacher Umformung

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2\sin(\varphi - \varphi_0)}{\varepsilon v} \Delta v. \tag{5}$$

Ein kleiner tangentialer Stoß im Sinne des Bahnumlaufs vergrößert also stets die große Halbachse und die Umlaufsdauer; er vergrößert oder verkleinert die Exzentrizität, je nachdem er auf derjenigen Halbellipse erfolgt, die vom Perihel halbiert wird, oder auf derjenigen, die das Aphel halbiert; er läßt das Perihel im Sinne des Bahnumlaufs oder im entgegengesetzten Sinne fortrücken, je nachdem er auf dem Wege vom Perihel zum Aphel oder vom Aphel zum Perihel erfolgt.

b) **Normalstoß mit der Geschwindigkeit Δu in der Richtung der äußeren Bahnnormale.** Da hierbei die Bahngeschwindigkeit v unverändert bleibt, so folgt aus Gleichung (4) und (8) von Ziff. 6

$$\Delta a = 0, \qquad \Delta n = 0. \tag{6}$$

Ferner gibt Gleichung (3) von Ziff. 6 $\mu a \varepsilon \Delta\varepsilon = -h\Delta h$. Nun ist aber $\Delta h = r\Delta u \sin\psi$, wenn ψ den im Sinne des Bahnumlaufs positiv gezählten Winkel zwischen Fahrstrahl r und Normale bedeutet; für diesen Winkel findet man aus der Bahngleichung (1) von Ziff. 6

$$\sin\psi = -\frac{\dot r}{v} = -\frac{\mu\varepsilon}{hv}\sin(\varphi - \varphi_0)$$

und hat somit

$$\Delta\varepsilon = \frac{r\sin(\varphi - \varphi_0)}{a v} \Delta u. \tag{7}$$

Endlich folgt aus (4) mit den jetzigen Werten von Δh und von $\Delta\varepsilon$

$$\Delta\varphi_0 = -\frac{2a\varepsilon + r\cos(\varphi - \varphi_0)}{a\varepsilon v} \Delta u. \tag{8}$$

Ein kleiner Stoß in Richtung der äußeren Bahnnormalen läßt also sowohl die große Halbachse wie die Umlaufsdauer unverändert; er vergrößert oder verkleinert die Exzentrizität, je nachdem er auf dem Wege vom Perihel zum Aphel oder vom Aphel zum Perihel erfolgt; er läßt das Perihel im Sinne des Bahnumlaufs oder im entgegengesetzten Sinne fortrücken, je nachdem er auf demjenigen Ellipsenstück erfolgt, das sich vom Aphel bis zu dem im zweiten Brennpunkt auf der großen Halbachse errichteten Lot erstreckt, oder auf dem restlichen Ellipsenstück in der Umgebung des Perihels.

c) **Azimutalstoß mit der Geschwindigkeit $\Delta w' = r\Delta\dot\varphi$ im Sinne zunehmender Azimute des Bahnumlaufs.** Da hier die Flächenkonstante h

sich um $\Delta h = r\,\Delta w'$ ändert, so kommt nach leichter Rechnung[1]), worin b die kleine Halbachse bedeutet,

$$\left.\begin{aligned} \Delta a &= \frac{2a^2 h}{\mu r}\,\Delta w', & \Delta n &= -\frac{3h}{r\sqrt{\mu a}}\,\Delta w', \\ \Delta \varepsilon &= \frac{h(b^2 - r^2)}{\mu a \varepsilon r}\,\Delta w', & \Delta \varphi_0 &= \left(r + \frac{h^2}{\mu}\right)\frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{h\varepsilon}\,\Delta w'. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ein kleiner azimutaler Stoß im Sinne des Bahnumlaufs vergrößert also stets die große Halbachse und die Umlaufsdauer; er vergrößert oder verkleinert die Exzentrizität, je nachdem er in der Umgebung des Perihels ($r < b$) oder des Aphels ($r > b$) erfolgt; er läßt das Perihel im Sinne des Bahnumlaufs oder im entgegengesetzten Sinne fortrücken, je nachdem er auf dem Wege vom Perihel zum Aphel oder vom Aphel zum Perihel erfolgt.

d) **Radialstoß mit der Geschwindigkeit** $\Delta\dot{r}$. Hier findet man

$$\left.\begin{aligned} \Delta a &= \frac{2a^2 \varepsilon \sin(\varphi - \varphi_0)}{h}\,\Delta\dot{r}, & \Delta n &= -3\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\frac{\varepsilon \sin(\varphi - \varphi_0)}{h}\,\Delta\dot{r}, \\ \Delta \varepsilon &= \frac{h \sin(\varphi - \varphi_0)}{\mu}\,\Delta\dot{r}, & \Delta \varphi_0 &= -\frac{h \cos(\varphi - \varphi_0)}{\mu \varepsilon}\,\Delta\dot{r}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ein kleiner radialer Stoß vom Kraftzentrum fort vergrößert oder verkleinert also die große Halbachse, die Umlaufsdauer und die Exzentrizität, je nachdem er auf dem Wege vom Perihel zum Aphel oder vom Aphel zum Perihel erfolgt; er läßt das Perihel im Sinne des Bahnumlaufs oder im entgegengesetzten Sinne fortrücken, je nachdem er auf demjenigen Ellipsenstück erfolgt, das sich vom Aphel bis zu dem im Kraftzentrum auf der großen Hauptachse errichteten Lote erstreckt, oder auf dem restlichen Ellipsenstück in der Umgebung des Perihels.

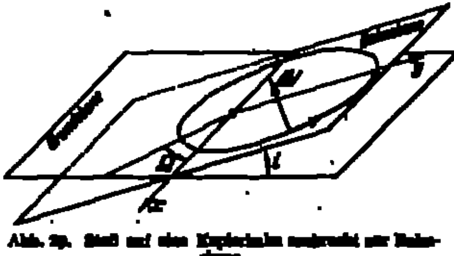


Abb. 29. Stoß auf eine Keplerbahn senkrecht zur Bahnebene.

e) **Stoß senkrecht zur Bahnebene mit der Geschwindigkeit** ΔV. Legt man in die Knotenlinie eine x-Achse und senkrecht dazu in der Bahnebene durch das Kraftzentrum eine y-Achse, nennt x, y die Koordinaten eines Bahnpunktes und wählt die positiven Achsenrichtungen und die Zählrichtungen von i, Ω und ΔV im Hinblick auf den Bahnumlauf so, wie in Abb. 29 gezeichnet, so findet man

$$\Delta i = \frac{x}{h}\,\Delta V, \qquad \Delta \Omega = \frac{y}{h \sin i}\,\Delta V. \tag{11}$$

Ein zur Bahnebene senkrechter kleiner Stoß, der von der Grundebene weg gerichtet ist, vergrößert oder verkleinert die Neigung der Bahnebene gegen die Grundebene, je nachdem er auf dem Wege von der Knotenlinie zum höchsten bzw. zum tiefsten Punkt über bzw. unter der Grundebene oder vom höchsten bzw. vom tiefsten Punkte zur Knotenlinie erfolgt; er läßt außerdem die Knotenlinie stets im Sinne des Bahnumlaufs vorwärtsschreiten.

Kehrt sich die Richtung des Stoßes um, so ist in allen diesen Fällen auch die Wirkung gerade die entgegengesetzte.

37. Die Stabilität der Bewegung der Massenpunkte. Das Wort „Stabilität" einer Bewegung überdeckt keineswegs einen einzigen festen Begriff. Im

[1]) Siehe C. H. MÜLLER u. G. PRANGE, Allgemeine Mechanik, S. 404—413.

weitesten Sinne, als sog. Laplacesche Stabilität, wird es gebraucht für ein Punktsystem, wenn die gegenseitigen Entfernungen der einzelnen Massen voneinander im Laufe der Zeit sich stets zwischen endlichen Grenzen halten, so daß einerseits die Zerstreuung und Auflösung des ganzen Systems, andererseits aber auch Zusammenstöße zwischen den einzelnen Massen ausgeschlossen sind [Beispiel: die Laplacesche „Stabilität" des Planetensystems[1])]. In etwas engerem Sinne, als sog. Poissonsche Stabilität, benützt man das Wort, wenn die Punkte eines Systems nach gewissen endlichen Zeitabschnitten immer wieder ihre ursprünglichen Lagen zueinander einnehmen, oder wenigstens Lagen, die den anfänglichen beliebig nahe kommen.

Zumeist aber will man in noch viel engerer Weise mit dem Wort Stabilität ausdrücken, daß eine Bewegung durch einen kleinen Anstoß auch nur „wenig" gestört wird. Es ist nicht ganz leicht, dieses „Wenig" scharf mathematisch zu fassen. Unter den zahlreichen Stabilitätsdefinitionen, die bis jetzt vorgeschlagen worden sind, dürfte diejenige von F. Klein und A. Sommerfeld[2]) am genauesten den Begriff darstellen, den man vernünftigerweise mit dem Wort Stabilität (im letztgenannten Sinne) zu verbinden pflegt; sie lautet:

Eine Bewegung heißt stabil, wenn der Grenzwert derjenigen Nachbarbewegungen, die aus der ursprünglichen durch einen beliebigen Stoß Δl hervorgehen, für $\Delta l \to 0$ unabhängig von der Art des Grenzüberganges eindeutig vorhanden ist und mit der ursprünglichen Bewegung übereinstimmt; in jedem anderen Falle heißt die Bewegung labil.

Diese Stabilitätsdefinition ist immer dann anwendbar, wenn die ganze Klasse der Nachbarbewegungen der ursprünglichen Bewegung in analytischer Form dargestellt werden kann. So erwiesen sich beispielsweise die am Schluß von Ziff. 35 aufgezählten fünf Fälle von Bewegung als stabil im Klein-Sommerfeldschen Sinne; ebenso die ebene Kreisbewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer zentripetalen Kraft μr^n, solange $n > -3$ ist[3]). Es verdient hervorgehoben zu werden, daß keine der anderen Stabilitätsdefinitionen imstande ist, diese sechs Bewegungen gleichzeitig für stabil gelten zu lassen.

Ist es jedoch nicht möglich, die Nachbarbewegungen analytisch allgemein zu fassen, so ist man bis jetzt leider zumeist gezwungen, sich mit weniger einwandfreien Stabilitätskriterien zu begnügen. Die bei weitem wirksamste Methode zur Gewinnung solcher Kriterien ist die unter dem Namen der Methode der kleinen Schwingungen bekannte. Obwohl sie strenger Kritik nicht standhält, so hat sie doch unleugbar so große Erfolge aufzuweisen, daß man ihr viel Vertrauen schenken darf. Bei dieser Methode gibt man den Lage- und Geschwindigkeits- (bzw. Impuls-) Koordinaten q_i und p_i kleine Variationen ξ_i und π_i und bildet die Bewegungsgleichungen für die Nachbarbewegung $q_i + \xi_i$, $p_i + \pi_i$, indem man die Bewegungsgleichungen der ursprünglichen Bewegung q_i, p_i zu Hilfe nimmt und außerdem die gegenseitigen Produkte der kleinen Größen vernachlässigt. Alsdann ist zu untersuchen, ob die Größen ξ_i, π_i dauernd klein bleiben oder nicht. Im ersten Falle nennt man die ursprüngliche Bewegung stabil, im zweiten Falle labil. Diese Untersuchung ist sehr einfach, sobald es gelingt, solche Koordinaten q_i, p_i zu wählen, daß das System der Differentialgleichungen für die Größen ξ_i, π_i feste Koeffizienten erhält (vgl. das in der folgenden Ziffer

---

[1]) S. Kap. 4, Ziff. 17 ds. Bd. des Handb.

[2]) F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 342. Leipzig 1897 bis 1910; dort findet sich auch eine Kritik der anderen Stabilitätsdefinitionen; vgl. jedoch auch Ph. Frank, Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 20, S. 171. 1909.

[3]) Vgl. E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Deutsch von A. Schepp. Bd. II, S. 80. Leipzig 1898; sowie Ph. Frank, Astron. Nachr. Bd. 177, S. 98. 1908.

gegebene Beispiel sowie die allgemeine Darstellung dieser Methode in Kap. 8, Ziff. 53).

Handelt es sich um eine ebene Bewegung eines Massenpunktes, bei der die Kräfte ein Potential V besitzen, so kann man die Differentialgleichung der Nachbarbewegung einer gegebenen Bewegung explizit angeben, falls man die erlaubten Störungen dahin einschränkt, daß sie die Energie des Massenpunktes nicht ändern. Diese Einschränkung ist natürlich sehr bedenklich; um so merkwürdiger ist es, daß sie in den meisten Fällen zu zweifellos richtigen Ergebnissen führt. Wählt man also die Bogenlänge s und den Krümmungshalbmesser ϱ zu natürlichen Koordinaten der ursprünglichen Bewegung, und erhält man den zum Bahnpunkt P gehörigen Nachbarpunkt Q dadurch, daß man s um den kleinen Bogen σ vergrößert und vom Bahnpunkt $s+\sigma$ auf der Normalen um die kleine Strecke u fortschreitet, so gilt bis auf kleine Größen höherer Ordnung genau[1])

$$\ddot{u} + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{3v^2}{\varrho^2}\right]_P u = 0,$$

wo der Wert der eckigen Klammer für die Koordinaten s, ϱ des Punktes P zu nehmen ist und v dessen Geschwindigkeit bedeutet. Nach allgemeinen Sätzen über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung oszilliert die Nachbarkurve dauernd um die ursprüngliche Bahn, d. h. diese ist stabil, wenn für alle ihre Punkte

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{3v^2}{\varrho^2}\right]_P > 0 \tag{1}$$

bleibt.

Noch einfacher wird das Stabilitätskriterium, falls die Bahn periodisch ist. Sind nämlich u_n, u_{n+1}, u_{n+2} die Normalverrückungen irgendeiner Nachbarbahn der gegebenen periodischen Bahn bei drei aufeinanderfolgenden Umläufen, so besitzt, wie KORTEWEG[2]) gezeigt hat, der Quotient

$$k = \frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}}$$

einen festen, für alle Nachbarbahnen übereinstimmenden Wert, und die ursprüngliche Bahn ist stabil, solange

$$|k| < 2 \tag{2}$$

bleibt.

Gilt in (1) und (2) statt des $<$-Zeichens das $=$-Zeichen, so kann die Bahn stabil oder labil sein.

Die für die Himmelsmechanik wichtige Übertragung dieser Ergebnisse auf allgemeine periodische Systeme hat POINCARÉ[3]) im Rahmen der Methode der kleinen Schwingungen durchgeführt. Angesichts der Kritik, welcher diese Methode wegen der unter Umständen bedenklichen Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung ausgesetzt ist, müssen die Untersuchungen von KORTEWEG, LEVI-CIVITA und CIGALA[4]), welche den Einfluß der vernachlässigten Glieder auf die Stabilität diskutieren, Aufmerksamkeit beanspruchen.

39. Die Stabilität der Lagrangeschen Punkte im Dreikörperproblem. Als ein Beispiel für die Methode der kleinen Schwingungen möge noch die Unter-

---

[1]) E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik, § 172.

[2]) D. I. KORTEWEG, Wiener Ber. Bd. 93, S. 995. 1886.

[3]) H. POINCARÉ, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Bd. III. Paris 1899; E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik, § 175 f.

[4]) D. I. KORTEWEG, a. a. O.; T. LEVI-CIVITA, Ann. di mat. Bd. 5, S. 221. 1901; A. R. CIGALA, ebenda Bd. 11, S. 67. 1904.

suchung der Stabilität der Lagrangeschen äquidistanten Punkte (Ziff. 30) entwickelt werden. Sind mit r_{12}, r_{13} und r_{23} die gegenseitigen Abstände der drei Massen m_1, m_2, m_3, ferner mit φ_1, φ_2, φ_3 die drei Winkel des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ und mit ψ_2, ψ_3 die Azimute der Vektoren $\mathfrak{r}_{12}$ und $\mathfrak{r}_{13}$ gegen eine feste Richtung in der Dreiecksebene bezeichnet, so gelten für die Relativbewegung der beiden Massen m_2 und m_3 gegen die Masse m_1 mit der Gravitationskonstante γ nach Ziff. 17 die Gleichungen[1])

$$\ddot r_{12} - r_{12}\dot\psi_2^2 + \gamma\left(\frac{m_1}{r_{12}^2} + \frac{m_2}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{13}^2}\cos\varphi_1 + \frac{m_3}{r_{23}^2}\cos\varphi_2\right) = 0,$$

$$\ddot r_{13} - r_{13}\dot\psi_3^2 + \gamma\left(\frac{m_1}{r_{13}^2} + \frac{m_3}{r_{13}^2} + \frac{m_2}{r_{12}^2}\cos\varphi_1 + \frac{m_2}{r_{23}^2}\cos\varphi_3\right) = 0,$$

$$r_{12}\ddot\psi_2 + 2\dot r_{12}\dot\psi_2 + \gamma\left(\frac{m_3}{r_{13}^2}\sin\varphi_1 - \frac{m_3}{r_{23}^2}\sin\varphi_2\right) = 0,$$

$$r_{13}\ddot\psi_3 + 2\dot r_{13}\dot\psi_3 - \gamma\left(\frac{m_2}{r_{12}^2}\sin\varphi_1 - \frac{m_2}{r_{23}^2}\sin\varphi_3\right) = 0.$$

Für die ungestörte Bewegung ist $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{3}$ sowie $\psi_2 = \omega t$, $\psi_3 = \frac{\pi}{3} + \omega t$. Für die gestörte Bewegung setzt man

$$r_{12} = r + \xi, \qquad \psi_2 = \omega t + \zeta,$$

$$r_{13} = r + \xi + \eta, \qquad \psi_3 = \frac{\pi}{3} + \omega t + \zeta + \vartheta,$$

wo $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ als kleine Größen zu behandeln sind. Führt man diese Ausdrücke in die Bewegungsgleichungen ein und beachtet dabei die Gleichung (3) von Ziff. 30, so findet man mit der Abkürzung $c = \gamma/r^3$ für die Störungen $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ die folgenden Gleichungen:

$$\ddot\xi - 3c(m_1+m_2+m_3)\xi - \frac{9}{4}cm_3\eta - \frac{2cr}{\omega}(m_1+m_2+m_3)\dot\zeta - \frac{3}{4}\sqrt{3}\,crm_3\vartheta = 0,$$

$$\ddot\xi - 3c(m_1+m_2+m_3)\xi + \ddot\eta - 3c\left(m_1+\frac{m_2}{4}+m_3\right)\eta - \frac{2cr}{\omega}(m_1+m_2+m_3)\dot\zeta$$

$$- \frac{2cr}{\omega}(m_1+m_2+m_3)\dot\vartheta - \frac{3}{4}\sqrt{3}\,crm_2\vartheta = 0,$$

$$2\omega\dot\xi - \frac{3}{4}\sqrt{3}\,cm_3\eta + r\ddot\zeta + \frac{9}{4}crm_3\vartheta = 0,$$

$$2\omega\dot\xi + \frac{2c}{\omega}(m_1+m_2+m_3)\dot\eta - \frac{3}{4}\sqrt{3}\,cm_2\eta + r\ddot\zeta + r\ddot\vartheta - \frac{9}{4}crm_2\vartheta = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich durch die Ansätze $\xi = Ae^{\lambda t}$, $\eta = Be^{\lambda t}$, $\zeta = Ce^{\lambda t}$, $\vartheta = De^{\lambda t}$ integrieren, wobei λ einer Gleichung gehorcht, die die Gestalt einer gleich Null genommenen Determinante besitzt. Die Elemente dieser Determinante sind die Koeffizienten von $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ in den vorangehenden Gleichungen, wobei jeweils der Differentiationspunkt durch einen Faktor λ zu ersetzen ist. Die Entwicklung dieser Determinante ist leicht und gibt die sog. Frequenzgleichung

$$\lambda^2[\lambda^2 + c(m_1+m_2+m_3)][\lambda^4 + \lambda^2 c(m_1+m_2+m_3) + \tfrac{27}{4}c^2(m_2m_3+m_3m_1+m_1m_2)] = 0.$$

Die beiden Wurzeln $\lambda = 0$ liefern die Partikulärintegrale $\xi = A_1 + A_2 t$ nebst ähnlichen Ausdrücken für η, ζ und ϑ. Setzt man diese Integrale in die Bewegungsgleichungen ein, so nehmen sie die Form an

$$\xi = A_1, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = C_1 - \frac{3}{2}\frac{A_1}{r}\omega t, \qquad \vartheta = 0,$$

[1]) Vgl. etwa E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. II, S. 85.

stellen also lediglich eine kleine Vergrößerung des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ dar, was sicher keine Instabilität bedeutet. Die Wurzeln der gleich Null gesetzten ersten eckigen Klammer der Frequenzgleichung sind rein imaginär; die zugehörigen Integrale stellen Schwingungen mit kleiner Amplitude um die stationäre Lage vor, bedeuten also ebenfalls keine Labilität. Dasselbe gilt von den Wurzeln der zweiten eckigen Klammer, solange

$$(m_1 + m_2 + m_3)^2 > 27 (m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2) \tag{1}$$

bleibt. Gilt diese Ungleichung nicht, so treten entweder gleiche Wurzeln λ auf, denen mit der Zeit zunehmende Werte von $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ entsprechen, oder aber Wurzeln λ mit positivem Realteil, was ebenfalls wachsende Werte $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ ergibt. Mithin stellt die Ungleichung (1) die Stabilitätsbedingung dar.

Für das eingeschränkte Dreikörperproblem mit verschwindender Masse m_3 geht diese Bedingung über in $(m_1 + m_2)^2 > 27 m_1 m_2$; die Stabilität der Lagrangeschen äquidistanten Punkte erfordert also, daß die eine der beiden endlichen Massen mindestens rund 25 mal größer als die andere endliche Masse sei.

Für die Lagrangeschen kollinearen Punkte dürfte es im Falle des eingeschränkten Dreikörperproblems außer den sicher vorhandenen stabilen Bereichen (vgl. Ziff. 33) auch labile geben[1]; über die Stabilität im Falle endlicher Massen scheint dagegen bisher nichts bekannt zu sein.

[1] E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik, S. 423.

Kapitel 8.

Kinetik der starren Körper.

Von

M. Winkelmann, Jena, und R. Grammel, Stuttgart.

Mit 41 Abbildungen.

I. Einleitung.

1. Die Bedeutung des starren Körpers. Ebenso wie der im vorangehenden Kapitel behandelte Massenpunkt ist auch der starre Körper eine Abstraktion, die sich durch ihre Nützlichkeit rechtfertigt und ohne welche die klassische Mechanik nicht denkbar wäre. Die tatsächlich vorkommenden festen Körper sind entweder elastisch oder plastisch nachgiebig[1]), und die Idee des starren Körpers entsteht aus ihnen, indem man sich die Festigkeitszahlen (Elastizitätsmodul, Gleitmodul) gegen unendlich, die Verformungen (Dehnung, Schiebung) aber so gegen Null schreitend denkt, daß ihr Produkt (Spannung) endlich bleibt. Dieser Grenzübergang, der allerdings bisher mathematisch noch keineswegs in voller Allgemeinheit streng durchgeführt worden ist, dessen Durchführbarkeit in der klassischen Mechanik aber wohl kaum bezweifelt werden kann, bringt außerordentliche Vereinfachungen in die statischen und kinetischen Gesetze: an die Stelle der (unendlich vielfachen, im allgemeinen stetig über den Körper verteilten) Spannungs- und Deformationstensoren treten nun die (nur je sechskomponentige) Kraft- und Bewegungsschraube[2]), welche dem ganzen starren Körper zugehören; seine Trägheit wird durch wenige zeitunabhängige Größen [Massenmomente nullter, erster und zweiter Ordnung[3])] gekennzeichnet, und aus den sehr verwickelten kinetischen Gleichungen des festen Körpers entstehen so die durchsichtigen Bewegungsgleichungen des starren Körpers.

Der so definierte Begriff des starren Körpers dient einerseits als Grundelement zum Aufbau der Mechanik selbst[4]) und stellt andererseits in zahlreichen Anwendungen der Mechanik auf die Probleme der Wirklichkeit eine brauchbare Näherung dar. Freilich verwischt die durch jenen Grenzübergang herbeigeführte Ausscheidung der inneren Spannungen und der Verformungen gewissermaßen die ganze innere Struktur des Körpers[5]) und schaltet so natürlich alle damit zusammenhängenden Fragen aus. Aber auch der äußeren Gestalt nach ganz verschiedene Körper können in der Stereomechanik kinetisch völlig gleichwertig sein, nämlich wenn sie in den Trägheitsgrößen übereinstimmen.

---

[1]) Sie werden in Bd. VI ds. Handb. behandelt.
[2]) Siehe Kap. 5 und 6 ds. Bd. des Handb.
[3]) Siehe Kap. 6 ds. Bd. des Handb.
[4]) Siehe Kap. 1, Ziff. 15–23 ds. Bd. des Handb.
[5]) Siehe Kap. 1, Ziff. 13a) ds. Bd. des Handb.

Tatsächlich wird nun, wie gesagt, der Grenzübergang in der Regel nicht explizit durchgeführt, sondern dadurch ersetzt, daß man als „starr" von vornherein einen sich dauernd kongruent bleibenden Körper definiert, also mit den Verformungen allein zur Grenze geht, ohne sich um die Spannungen zu kümmern. Man muß sich aber klar darüber sein, daß die so entstehende Begriffsbildung eines starren Körpers wesentlich enger als die erstgenannte ist und im Gegensatz zu jener keineswegs immer Eindeutigkeit oder Widerspruchslosigkeit verbürgt. Führen die Ansätze der so begründeten Stereomechanik zu Mehrdeutigkeiten (Beispiele: die statisch unbestimmten Probleme) oder zu Widersprüchen [Beispiele: die Painlevéschen Reibungsprobleme[1]], so muß auf den eigentlichen Grenzübergang zurückgegriffen werden. In manchen Fällen sucht man den engeren Begriff des starren Körpers dadurch zu retten, daß man plausible, den Grenzübergang einigermaßen ersetzende Hypothesen zu Hilfe nimmt [Beispiel: die klassische Theorie des Stoßes[2]]. In der Mechanik des Relativitätsprinzips[3]) muß man die Idee des starren Körpers überhaupt aufgeben, da der Grenzübergang dort gar nicht widerspruchslos durchführbar ist.

Wir befassen uns im folgenden nur mit der Kinetik des starren Körpers in jenem engeren Sinne und werden auch hier, wie schon in der Punktkinetik, eine Eulersche (vektorielle) und eine Lagrangesche (skalare) Methode zu unterscheiden haben. Bei der ersten werden wir neben der Vektoralgebra auch die Motorrechnung[4]) als angemessenes Hilfsmittel der Stereomechanik benutzen[5]).

II. Impuls- und Energiesatz des starren Körpers.

2. Der Impuls. Der augenblickliche Geschwindigkeitszustand eines starren Körpers ist eine Elementarschraubung[6]) mit den Komponenten $\mathfrak{o}$ (Drehgeschwindigkeit) und $\mathfrak{v}_s$ (Verschiebungsgeschwindigkeit in Richtung der Schraubungsachse) und kann auch durch den Inbegriff zweier Vektoren $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{v}_0$ dargestellt werden, wo $\mathfrak{v}_0$ die Verschiebungsgeschwindigkeit eines beliebigen, nicht notwendig auf der Schraubungsachse liegenden körperfesten Bezugspunkts O ist; und zwar wird

$$\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_s + [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{o}], \tag{1}$$

wenn $\mathfrak{r}_0$ den Fahrstrahl von O nach irgendeinem Punkt der Schraubungsachse bedeutet. Eine solche Schraubung ist ein sogenannter Motor $\mathfrak{V}$ von der „Länge" $\mathfrak{B}_s = \mathfrak{v}_s$, von der „Öffnung" $\mathfrak{B} = \mathfrak{o}$ und vom „Moment" $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{v}_0$ bezüglich O. Man nennt $\mathfrak{B}$ auch die erste, $\mathfrak{B}_0$ die zweite Vektorkomponente des Geschwindigkeitsmotors $\mathfrak{V}$; die „Achse" des Motors ist die Schraubungsachse.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Körperpunktes K, dessen Ortsvektor von O aus $\mathfrak{r}$ ist, wird dann als Resultante der von der Gleitbewegung $\mathfrak{v}_0$ und der Drehbewegung $\mathfrak{o}$ herrührenden Komponenten angegeben durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{o}\mathfrak{r}]. \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. Kap. 9, Ziff. 4 ds. Bd. des Handb.

[2]) Siehe Bd. VI ds. Handb.

[3]) Vgl. Kap. 10 ds. Bd. des Handb.

[4]) Siehe Kap. 6, Ziff. 13 ds. Bd. des Handb., wo die von R. v. MISES entwickelte Motorrechnung kurz dargestellt ist. Auch der mit Motorrechnung noch nicht vertraute Leser kann die folgenden Darlegungen verstehen.

[5]) An Lehrbüchern kommen außer den schon in Kap. 7, Fußnote 2 von S. 305 aufgezählten für die Kinetik des starren Körpers und der Systeme noch die folgenden in Betracht: K. HEUN, Lehrbuch der Mechanik, Bd. I. Leipzig 1906; F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels. Leipzig 1897–1910; A. GRAY, Gyrostatics and rotational motion. London 1918; R. GRAMMEL, Der Kreisel und seine Anwendungen. Braunschweig 1920; außerdem die Berichte von P. STÄCKEL und von K. HEUN in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV.

[6]) Siehe Kap. 5, Ziff. 28 ds. Bd. des Handb.

Meist werden die Komponenten u, v, w von $\mathfrak{v}$ nach rechtwinkligen körperfesten Achsen durch O verlangt. Sind u_0, v_0, w_0 die Komponenten von $\mathfrak{v}_0$, ferner p, q, r diejenigen von $\mathfrak{o}$, und x, y, z, diejenigen von $\mathfrak{r}$, so lauten sie (wenn wir stets rechtshändige Systeme benutzen)

$$u = u_0 + qz - ry, \qquad v = v_0 + rx - pz, \qquad w = w_0 + py - qx. \tag{3}$$

Jedem Massenteilchen dm des starren Körpers kommt [wie schon dem einzelnen, freibeweglichen Punkt[1]] ein elementarer Impuls $d\mathfrak{J} = \mathfrak{v}\,dm$ zu und außerdem ein elementares Impulsmoment $d\mathfrak{G} = [\mathfrak{r}\,d\mathfrak{J}] = [\mathfrak{r}\mathfrak{v}]\,dm$ bezüglich eines ganz beliebigen (festen oder beweglichen) Punktes O. Man kann diesen Elementarimpuls wieder als einen besonderen Motor $d\mathbf{\mathfrak{J}}$ von der „Länge" Null, der „Öffnung" oder ersten Vektorkomponente $d\mathfrak{J}$ und dem Moment oder der zweiten Vektorkomponente $d\mathfrak{G}$ darstellen.

Durch Summation entsteht der gesamte Impuls (Trieb) $\mathfrak{J}$ und das gesamte Impulsmoment [oder der Drehimpuls[2]] $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{J} = \mathsf{S}\,\mathfrak{v}\,dm, \qquad \mathfrak{G} = \mathsf{S}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]\,dm \tag{4}$$

als erste und zweite Vektorkomponente des Impulsmotors $\mathbf{\mathfrak{J}}$ des ganzen Körpers.

Es ist von großer Wichtigkeit, die Komponenten des Motors $\mathbf{\mathfrak{J}}$ umzuformen. Zu dem Zweck führen wir den Schwerpunkt (genauer Massenmittelpunkt) des Körpers ein; er hat von O aus den Fahrstrahl[3])

$$\mathfrak{r}_s = \frac{1}{m}\mathsf{S}\,\mathfrak{r}\,dm, \tag{5}$$

wo m die Gesamtmasse bedeutet. Durch Ableitung nach der Zeit erhält man hieraus mit $\dot{\mathfrak{r}}_s = \mathfrak{v}_s - \mathfrak{v}_0$ und $\dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0$ (wo $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit des möglicherweise beweglichen Bezugspunkts) die Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_s = \frac{1}{m}\mathsf{S}\,\mathfrak{v}\,dm,$$

so daß nach (4) und (2)

$$\mathfrak{J} = m\mathfrak{v}_s = m(\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{o}\mathfrak{r}_s]) \tag{6}$$

wird. Diese Gleichung besagt: Der Impuls berechnet sich so, wie wenn die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkt vereinigt wäre. Besteht die Bewegung nur in einer reinen Drehung um den Schwerpunkt ($\mathfrak{v}_s = 0$), so ist die Bewegung impulsfrei, die Öffnung des Impulsmotors also Null.

Wir drücken ferner den Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ als Summe $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^* + \mathfrak{r}_s$ aus, unter $\mathfrak{r}^*$ den vom Schwerpunkt S nach dem Punkt K gezogenen Fahrstrahl verstanden, und haben für das Impulsmoment (4) bezüglich O

$$\mathfrak{G} = \mathsf{S}[\mathfrak{r}^*\mathfrak{v}]\,dm + [\mathfrak{r}_s\mathsf{S}\,\mathfrak{v}\,dm].$$

Hier bedeutet

$$\mathfrak{G}_s = \mathsf{S}[\mathfrak{r}^*\mathfrak{v}]\,dm \tag{7}$$

offenbar das Impulsmoment bezüglich S, so daß man schreiben kann

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_s + [\mathfrak{r}_s\mathfrak{J}]. \tag{8}$$

---

[1]) Vgl. Kap. 7, Ziff. 21 ds. Bd. des Handb.

[2]) Es wäre wohl zweckmäßiger, das Wort „Drehimpuls" für den nur von der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ abhängigen Bestandteil (14) des Impulsmomentes vorzubehalten, es also synonym mit „Schwung" zu benützen.

[3]) Vgl. Kap. 6, Ziff. 18 ds. Bd. des Handb.

Diese Gleichung zeigt, wie das Impulsmoment für einen beliebigen Bezugspunkt zu berechnen ist, wenn es für den Schwerpunkt bekannt ist. Sie ist natürlich nichts anderes als die für jeden Momentvektor eines Motors gültige Polverlegungsformel.

Führt man noch die Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{v}^*$ des Punktes K gegen den Schwerpunkt S durch die Gleichung $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^* + \mathfrak{v}_s$ ein, so kommt statt (7)

$$\mathfrak{S}_s = \mathsf{S}[\mathfrak{r}^*\mathfrak{v}^*]\,dm + [\mathsf{S}\,\mathfrak{r}^*\,dm,\, \mathfrak{v}_s];$$

das zweite Glied ist Null, da der Ausdruck $(1/m)\,\mathsf{S}\,\mathfrak{r}^*\,dm$ den (natürlich verschwindenden) Fahrstrahl des Schwerpunkts vom Schwerpunkt selbst aus darstellt; somit gewinnt man die Formel

$$\mathfrak{S}_s = \mathsf{S}[\mathfrak{r}^*\mathfrak{v}^*]\,dm. \tag{9}$$

Das Impulsmoment $\mathfrak{S}_s$ bezüglich des Schwerpunkts hängt also nur von der Relativbewegung des Körpers gegen den Schwerpunkt ab. Besteht die Bewegung lediglich aus einer Parallelverschiebung des ganzen Körpers, so ist das Impulsmoment bezüglich des Schwerpunkts Null und berechnet sich dann gemäß (8) bezüglich eines anderen Bezugspunkts so, wie wenn die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkt vereinigt wäre.

Man kann das Impulsmoment $\mathfrak{S}$ noch auf eine zweite Art darstellen, indem man die Bewegung gemäß (2) in die Gleitbewegung $\mathfrak{v}_a$ des nunmehr körperfesten Bezugspunkts O und die Drehbewegung $\mathfrak{o}$ des Körpers um O zerlegt. So kommt nach (4) und (5)

$$\mathfrak{S} = m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{v}_a] + \mathsf{S}[\mathfrak{r}[\mathfrak{o}\mathfrak{r}]]\,dm. \tag{10}$$

Im ersten Ausdruck rechts bedeutet[1]) der Vektor

$$\mathfrak{p} = m\,\mathfrak{r}_s \tag{11}$$

das polare Massenmoment des Körpers bezüglich O. Um im zweiten Ausdruck den Drehvektor $\mathfrak{o}$ auszuklammern, muß man den Trägheitstensor E einführen, dessen Komponenten nach einem körperfesten kartesischen Koordinatensystem die neungliedrige Matrix

$$\begin{vmatrix} E_x & -D_z & -D_y \\ -D_z & E_y & -D_x \\ -D_y & -D_x & E_z \end{vmatrix}$$

bilden, worin E_x, E_y, E_z sowie D_x, D_y, D_z die axialen Trägheits- und Deviationsmomente[2]) des Körpers bezüglich O sind. Man hat dann statt (10)

$$\mathfrak{S} = m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{v}_a] + \mathsf{E}\mathfrak{o}. \tag{12}$$

Es bedeutet in der Regel keinerlei Einschränkung, wenn wir voraussetzen, daß das körperfeste Achsenkreuz mit den Hauptträgheitsachsen des Körpers zusammenfällt. Sind A, B, C die drei Hauptträgheitsmomente bezüglich O und $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ drei Einheitsvektoren in den Hauptachsenrichtungen, so ist der Trägheitstensor

$$\mathsf{E} = A\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i} + B\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j} + C\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k}. \tag{13}$$

In dem besonderen Fall, daß der körperfeste Bezugspunkt O entweder zugleich raumfest ist ($\mathfrak{v}_a = 0$) oder mit dem Schwerpunkt zusammenfällt ($\mathfrak{r}_s = 0$), tritt in (12) nur der zweite Ausdruck der rechten Seite auf und es wird

$$\mathfrak{S} = \mathsf{E}\mathfrak{o} = Ap\,\mathfrak{i} + Bq\,\mathfrak{j} + Cr\,\mathfrak{k}, \tag{14}$$

---

[1]) Siehe Kap. 6, Ziff. 18 ds. Bd. des Handb.
[2]) Siehe Kap. 6, Ziff. 20—26 ds. Bd. des Handb.

d. h. die körperfesten Komponenten von $\mathfrak{S}$ nach den Hauptachsen sind dann

$$L = Ap, \qquad M = Bq, \qquad N = Cr. \tag{15}$$

Meistens ist nur dieser von der Drehbewegung $\mathfrak{o}$ abhängige Anteil des Impulsmoments von Belang, für den man neuerdings auch die Bezeichnung Schwung oder Drall benutzt. Wie in der Tensorrechnung[1]) gezeigt wird, steht der Schwungvektor $\mathfrak{S}$ senkrecht auf derjenigen Ebene, die zu dem Drehvektor $\mathfrak{o}$ konjugiert ist in bezug auf das zum Tensor E gehörige Trägheitsellipsoid[2]).

Die Umkehrung der Gleichung (14) führt auf

$$\mathfrak{o} = \mathsf{E}^{-1}\mathfrak{S}, \tag{16}$$

wo E^{-1} der reziproke Trägheitstensor ist, der durch

$$\mathsf{E}^{-1} = \frac{\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}}{A} + \frac{\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j}}{B} + \frac{\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k}}{C} \tag{17}$$

dargestellt wird. Der Drehvektor $\mathfrak{o}$ steht dann senkrecht auf derjenigen Ebene, die zum Schwungvektor $\mathfrak{S}$ konjugiert ist in bezug auf das zum Tensor E^{-1} gehörige reziproke Trägheitsellipsoid.

Man sieht auch aus (14) unmittelbar, daß der Schwungvektor mit dem Drehvektor im allgemeinen nicht kollinear ist, es sei denn, daß entweder die drei Hauptträgheitsmomente gleich groß sind ($A = B = C$), oder daß wenigstens zwei Hauptträgheitsmomente zusammenstimmen und gleichzeitig der eine der beiden Vektoren $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{S}$ (und damit auch der andere) in die entsprechende Hauptebene fällt (z. B. $A = B$ und $r = 0$), oder endlich, daß der eine der beiden Vektoren $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{S}$ (und damit auch der andere) in einer der Hauptträgheitsachsen liegt (z. B. $q = r = 0$).

Im Falle beliebiger Hauptträgheitsmomente und beliebiger Achsenrichtung $\mathfrak{o}$ kann der Zusammenhang zwischen dem Schwungvektor $\mathfrak{S}$ und dem Drehvektor $\mathfrak{o}$ außer in der Form (14) auch noch auf folgende Weise dargestellt werden: Man nenne $\mathfrak{r}'$ den Vektor des Lotes vom Massenelement dm auf die Drehachse und $\mathfrak{r}''$ den Vektor vom Bezugspunkt O bis zum Fußpunkt jenes Lotes, so ist $\mathfrak{r} = -\mathfrak{r}' + \mathfrak{r}''$ zu setzen und demgemäß in leichter Umformung

$$\mathfrak{S} = S[\mathfrak{r}[\mathfrak{o}\mathfrak{r}]]dm = S[\mathfrak{r}'[\mathfrak{o}\mathfrak{r}']]dm - S[\mathfrak{r}''[\mathfrak{o}\mathfrak{r}']]dm = \mathfrak{o}Sr'^2dm + \omega S\mathfrak{r}'r''dm,$$

wo r' und r'' die absoluten Beträge der Vektoren $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}''$ bezeichnen. Die rechtsseitigen Integrale

$$E_{\mathfrak{o}} = Sr'^2dm, \qquad \mathfrak{D}_{\mathfrak{o}} = S\mathfrak{r}'r''dm$$

stellen das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse $\mathfrak{o}$ und das Deviationsmoment[3]) bezüglich der Achse $\mathfrak{o}$ und ihres Punktes O vor. Nennt man $\mathfrak{S}_{\mathfrak{o}}$ und $\mathfrak{S}_{\mathfrak{r}}$ die Komponenten des Schwungvektors $\mathfrak{S}$ in der Achse $\mathfrak{o}$ und senkrecht zu ihr, so gilt also

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{o}} = E_{\mathfrak{o}}\mathfrak{o}, \qquad \mathfrak{S}_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{o}}\omega. \tag{18}$$

Es mag noch erwähnt sein, daß man den durch die Vektorgleichungen (6) und (12) ausgedrückten Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeitsmotor $\mathfrak{B}$ und dem Impulsmotor $\mathfrak{J}$ in einer zu (14) ganz analogen Produktform[4])

$$\mathfrak{J} = \mathsf{E}\mathfrak{B} \tag{19}$$

---

[1]) Vgl. etwa J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, 2. Aufl., § 37. Stuttgart 1926.
[2]) Siehe Kap. 6, Ziff. 24 ds. Bd. des Handb.
[3]) Vgl. Kap. 6, Ziff. 20 ds. Bd. des Handb.
[4]) Vgl. Kap. 6, Ziff. 13 ds. Bd. des Handb.

darstellen kann, wo E der **Trägheitsmotortensor**[1]) ist, dessen rechtwinklige Komponenten die 36-gliedrige Matrix bilden

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_s & -my_s \\ 0 & m & 0 & -mz_s & 0 & mx_s \\ 0 & 0 & m & my_s & -mx_s & 0 \\ 0 & -mz_s & my_s & E_x & -D_z & -D_y \\ mz_s & 0 & -mx_s & -D_z & E_y & -D_x \\ -my_s & mx_s & 0 & -D_y & -D_x & E_z \end{vmatrix}$$

Sie enthält die ausschließlich von der Massenverteilung des Körpers abhängigen zehn Elemente: die Gesamtmasse m, die Komponenten mx_s, my_s, mz_s des polaren Massenmoments $\mathfrak{p}$ und die sechs Elemente des Trägheitstensors E.

3. Die Bewegungsenergie. Man hat als doppelte Bewegungsenergie (oder Wucht) T des starren Körpers die Größe

$$2T = \mathrm{S}\,\mathfrak{v}^2 dm = \mathrm{S}\,\mathfrak{v}\,d\mathfrak{J} \tag{1}$$

anzusehen. Setzt man hierin den Wert von $\mathfrak{v}$ aus Ziff. 2, Gleichung (2) ein, so wird gemäß Ziff. 2, Gleichung (4)

$$2T = \mathfrak{v}_0\mathfrak{J} + \mathfrak{o}\mathfrak{G}. \tag{2}$$

Gemäß der Definition des skalaren Produktes zweier Motoren kann man hierfür auch kurz schreiben

$$2T = \mathfrak{B}\mathfrak{J}, \tag{3}$$

in vollkommener Analogie zur doppelten Bewegungsenergie $m\mathfrak{v}^2 = \mathfrak{v}\mathfrak{i}$ eines einzelnen Massenpunktes.

Man kann die Bewegungsenergie des starren Körpers noch auf eine zweite Art ausdrücken, indem man die Werte von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{G}$ aus Ziff. 2, Gleichung (6) und (12) in die jetzige Gleichung (2) einführt und leicht umformt:

$$2T = m\,\mathfrak{v}_0^2 + 2m\,\mathfrak{v}_0[\mathfrak{o}\mathfrak{r}_s] + \mathfrak{o}\mathrm{E}\mathfrak{o}. \tag{4}$$

Das erste Glied

$$2T_1 = m\,\mathfrak{v}_0^2 \tag{5}$$

stellt die doppelte **Gleitenergie** des ganzen Körpers so dar, wie wenn im Bezugspunkt die ganze Masse vereinigt wäre. Das letzte Glied

$$2T_2 = \mathfrak{o}\mathrm{E}\mathfrak{o} = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \tag{6}$$

stellt die doppelte **Drehenergie** vor. Bemerkenswert ist das Mittelglied

$$T' = m\mathfrak{v}_0[\mathfrak{o}\mathfrak{r}_s], \tag{7}$$

welches von $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{o}$ zugleich abhängt und bei vorhandener Drehung $\mathfrak{o} \neq 0$ nur dann verschwindet, wenn entweder der Bezugspunkt ruht ($\mathfrak{v}_0 = 0$) oder der Schwerpunkt zum Bezugspunkt gewählt wird ($\mathfrak{r}_s = 0$), was oft geschieht, aber durchaus nicht immer zweckmäßig ist (vgl. Ziff. 47). Nur bei dieser Wahl des Bezugspunktes ist die Zerlegung der Bewegungsenergie in einen rein translatorischen (T_1) und einen rein rotatorischen Teil (T_2) statthaft.

Eine zu (4) analoge Form der Bewegungsenergie erhält man, wenn man die Komponenten $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{v}_0$ des Geschwindigkeitsmotors in den Komponenten $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{G}$ des Impulsmotors ausdrückt und in (2) einsetzt. Wir beschränken die Rechnung

[1]) Vgl. R. v. MISES, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 4, S. 170. 1924.

der Einfachheit halber auf den Fall, daß der Schwerpunkt Bezugspunkt ist. Dann hat man nach Ziff. 2, Gleichung (6) und (16)

$$2T = \frac{\mathfrak{J}^2}{m} + \mathfrak{S}\mathrm{E}^{-1}\mathfrak{S}. \tag{8}$$

Man könnte dies die konjugierte Energieform oder auch die Hamiltonsche Energieform nennen, da sie u. a. zur Ableitung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen dient.

In den Bezeichnungen der Motorrechnung lauten die Formeln (4) und (8) gemäß (5) und Ziff. 2, Gleichung (19)

$$2T = \mathfrak{B}\mathrm{E}\mathfrak{B} = \mathfrak{J}\mathrm{E}^{-1}\mathfrak{J}, \tag{9}$$

wo E^{-1} der zu E reziproke Trägheitsmotortensor ist, den wir aber nicht explizit anschreiben.

4. Der Impulssatz. Für jedes Massenelement dm des starren Körpers lauten genau wie beim einzelnen Massenpunkt[1]) die Bewegungsgleichungen

$$d\dot{\mathfrak{J}} = d\mathfrak{K} + d\mathfrak{R}, \qquad d\dot{\mathfrak{S}} = d\mathfrak{M} + d\mathfrak{R}_0, \tag{1}$$

falls mit $d\mathfrak{K}$ die eingeprägte Kraft, mit $d\mathfrak{R}$ die Reaktion der gesamten Umgebung auf dm und mit $d\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\, d\mathfrak{K}]$ und $d\mathfrak{R}_0 = [\mathfrak{r}\, d\mathfrak{R}]$ die bezüglich eines raumfesten Punktes genommenen Momente von $d\mathfrak{K}$ und $d\mathfrak{R}$ bezeichnet werden. Die $d\mathfrak{R}$ haben ihre Ursache teils in den Massenelementen des starren Körpers selbst, teils in seiner Berührung mit anderen Körpern; die ersteren wollen wir als innere von den letzteren als äußeren Reaktionskräften unterscheiden. Die inneren Reaktionen halten sich nach dem d'Alembertschen Prinzip das Gleichgewicht. Dies besagt, daß der gesamte Reaktionsmotor $\mathfrak{R}$ mit den Vektorkomponenten

$$\mathfrak{R} = \mathrm{S}\, d\mathfrak{R}, \qquad \mathfrak{R}_0 = \mathrm{S}\, d\mathfrak{R}_0 \tag{2a}$$

beim freien starren Körper verschwindet ($\mathfrak{R} = 0$, $\mathfrak{R}_0 = 0$), beim geführten starren Körper mit dem Motor der Führungskräfte identisch ist ($\mathfrak{R}$ die Resultante, $\mathfrak{R}_0$ das Moment der Führungskräfte). Führt man noch den Motor der eingeprägten Gesamtkraft $\mathfrak{K}$ mit den Vektorkomponenten

$$\mathfrak{K} = \mathrm{S}\, d\mathfrak{K}, \qquad \mathfrak{M} = \mathrm{S}\, d\mathfrak{M} \tag{2b}$$

ein, so gibt die Summierung der Bewegungsgleichungen (1) die kinetischen Grundgleichungen oder Impulssätze des freien oder geführten starren Körpers

$$\dot{\mathfrak{J}} = \mathfrak{K} + \mathfrak{R}, \qquad \dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{M} + \mathfrak{R}_0, \qquad \text{oder in Motorform} \qquad \dot{\mathfrak{J}} = \mathfrak{K} + \mathfrak{R}. \tag{3}$$

Die erste kinetische Gleichung (3) läßt sich gemäß Ziff. 2, Gleichung (6) ganz allgemein umformen in

$$m\mathfrak{w}_s = \mathfrak{K} + \mathfrak{R}, \tag{4}$$

wo $\mathfrak{w}_s = \dot{\mathfrak{v}}_s$ die Beschleunigung des Schwerpunkts bedeutet, und drückt dann den sog. Schwerpunktsatz des starren Körpers aus: Der Schwerpunkt bewegt sich so, wie wenn in ihm die ganze Masse vereinigt wäre, und wie wenn alle äußeren Kräfte, gegebenenfalls parallel mit sich verschoben, in ihm angriffen.

Hier möge erwähnt sein, daß die Impulsgleichungen (3) eine anschauliche dynamische Deutung der Größen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{S}$ zulassen. Würde man den augenblick-

---

[1]) Siehe Kap. 7, Ziff. 21 ds. Bd. des Handb.

lichen Bewegungszustand $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{S}$ durch eine stoßartige Kraft $\mathfrak{K}$ und ein ebensolches Moment $\mathfrak{M}$ aus der Ruhe erzeugen, so würde gemäß (3) gelten

$$\mathfrak{J}=\int\mathfrak{K}\,dt,\qquad \mathfrak{S}=\int\mathfrak{M}\,dt,$$

wo die Integrale über die Stoßdauer zu erstrecken sind. Diese Integrale messen nun aber geradezu die Stärke des Stoßes bzw. Drehstoßes, und so kann man sagen: Impuls und Drehimpuls sind derjenige Stoß und Drehstoß, durch die der augenblickliche Bewegungszustand aus der Ruhe entstünde.

Die kinetische Motorgleichung (3) steht zwar in völliger Analogie zur Newtonschen Grundgleichung $d\mathfrak{i}/dt=\mathfrak{k}$ des freien Massenpunktes, hat aber für die zweite Gleichung (3) den Nachteil, daß der auf den festen Raumpunkt O bezogene motorische Trägheitstensor E zeitlich veränderliche Bestimmungsstücke enthält. Um an seine Stelle einen zeitlich festen Trägheitstensor setzen zu können, muß man die Bewegung auf einen **körperfesten Punkt** O' beziehen. Ist $\mathfrak{r}_0$ der Fahrstrahl von O nach O', so hängen die auf O bezogenen Größen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{W}_0$ mit den auf O' bezogenen $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{W}_0'$ zusammen durch die Beziehungen

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}'+[\mathfrak{r}_0\mathfrak{J}],\qquad \mathfrak{M}=\mathfrak{M}'+[\mathfrak{r}_0\mathfrak{K}],\qquad \mathfrak{W}_0=\mathfrak{W}_0'+[\mathfrak{r}_0\mathfrak{W}]. \tag{5}$$

Hieraus folgt gemäß der ersten Gleichung (3) und mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0=\dot{\mathfrak{r}}_0$ des Bezugspunkts O'

$$\dot{\mathfrak{S}}=\dot{\mathfrak{S}}'+[\dot{\mathfrak{r}}_0\mathfrak{J}]+[\mathfrak{r}_0\dot{\mathfrak{J}}]=\dot{\mathfrak{S}}'+[\mathfrak{v}_0\mathfrak{J}]+[\mathfrak{r}_0\mathfrak{K}]+[\mathfrak{r}_0\mathfrak{W}],$$

und somit liefert die zweite Gleichung (3)

$$\dot{\mathfrak{S}}'+[\mathfrak{v}_0\mathfrak{J}]=\mathfrak{M}'+\mathfrak{W}_0' \tag{6}$$

als zweite Impulsgleichung bezogen auf einen **körperfesten Punkt** O'. Ist dieser Punkt insbesondere der Schwerpunkt, so geht (6), da jetzt $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{J}$ parallele Vektoren werden [vgl. Ziff. 2, Gleichung (6)], mit $[\mathfrak{v}_0\mathfrak{J}]=0$ in die alte Form $\dot{\mathfrak{S}}'=\mathfrak{M}'+\mathfrak{W}_0'$ über, und dies besagt: Der Körper bewegt sich um seinen Schwerpunkt so, als würde dieser Punkt festgehalten, während der Körper sonst den gleichen Kräften ausgesetzt ist.

Endlich kann man noch die **absoluten** Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{\mathfrak{J}}$ und $\dot{\mathfrak{S}}'$ der Komponenten des Impulsmotors durch ihre **relativen** in bezug auf einen mit dem starren Körper selbst beweglichen Beobachter ersetzen. Sind diese durch $\mathring{\mathfrak{J}}$ und $\mathring{\mathfrak{S}}'$ gekennzeichnet, so gilt[1]) (da die Vektoren $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{S}'$ an den Körper gebunden sind und also nur die Rotation $\mathfrak{o}$ des Beobachters in Betracht kommt)

$$\dot{\mathfrak{J}}=\mathring{\mathfrak{J}}+[\mathfrak{o}\mathfrak{J}],\qquad \dot{\mathfrak{S}}'=\mathring{\mathfrak{S}}'+[\mathfrak{o}\mathfrak{S}'], \tag{7}$$

und somit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\mathring{\mathfrak{J}}+[\mathfrak{o}\mathfrak{J}]=\mathfrak{K}+\mathfrak{W},\qquad \mathring{\mathfrak{S}}'+[\mathfrak{o}\mathfrak{S}']+[\mathfrak{v}_0\mathfrak{J}]=\mathfrak{M}'+\mathfrak{W}_0'. \tag{8}$$

Auch hier vereinigt die Motorrechnung beide Gleichungen zu der einzigen[2])

$$\mathring{\mathbf{J}}+[\mathbf{V}\mathbf{J}]=\mathbf{K}+\mathbf{W}. \tag{9}$$

Man kann für $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{S}'$ noch ihre Ausdrücke in den Komponenten $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{v}_0$ des Geschwindigkeitsmotors nach Ziff. 2, Gleichung (6) und (12) einführen, nämlich

$$\mathfrak{J}=m(\mathfrak{v}_0+[\mathfrak{o}\mathfrak{r}_s]),\qquad \mathfrak{S}'=m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{v}_0]+\mathsf{E}\mathfrak{o},$$

[1]) Vgl. die Lehrbücher der Vektorrechnung, z. B. J. SPIELREIN, 3. Aufl., S. 167.
[2]) Über das motorische Produkt zweier Motoren vgl. Kap. 6, Ziff. 13 ds. Bd. des Handb.

und hat dann statt (8) nach leichter Umformung mit dem Vektor $\mathring{\mathfrak o} = \dot{\mathfrak o}$ der Winkelbeschleunigung

$$\left.\begin{aligned} m\{\mathring{\mathfrak v}_0 + [\mathring{\mathfrak o}\mathfrak r_s] + [\mathfrak o\mathfrak v_0] + [\mathfrak o[\mathfrak o\mathfrak r_s]]\} &= \mathfrak K + \mathfrak R, \\ \mathsf E\mathring{\mathfrak o} + [\mathfrak o(\mathsf E\mathfrak o)] + m\{[\mathfrak r_s\mathring{\mathfrak v}_0] + [\mathfrak r_s[\mathfrak o\mathfrak v_0]]\} &= \mathfrak M' + \mathfrak R'_0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Diese sehr allgemeinen, für jeden **körperfesten** Bezugspunkt O' gültigen Gleichungen[1]) vereinfachen sich erheblich, wenn entweder der Bezugspunkt zugleich raumfest ist ($\mathfrak v_0 = 0$) oder aber wenigstens mit dem Schwerpunkt zusammenfällt ($\mathfrak r_s = 0$); alsdann lautet insbesondere die zweite

$$\mathsf E\dot{\mathfrak o} + [\mathfrak o(\mathsf E\mathfrak o)] = \mathfrak M' + \mathfrak R'_0; \qquad (11)$$

sie hat in dem oben (Ziff. 2) benutzten Hauptachsenkreuz die Komponenten

$$\left.\begin{aligned} A\dot p + (C-B)qr &= M'_x + R'_{0x}, \\ B\dot q + (A-C)rp &= M'_y + R'_{0y}, \\ C\dot r + (B-A)pq &= M'_z + R'_{0z}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Man nennt dieses System die **Eulerschen Gleichungen** des starren Körpers.

Übrigens bemerkt man, daß die Bewegungsgleichungen (8) auch noch für ein nicht im Körper und nicht im Raum festes Bezugsystem gelten, dessen Bezugspunkt O' die Geschwindigkeit $\mathfrak v_0$ besitzt und das sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak o$ dreht. Erst beim Übergang nach (10) wird dieses System im Körper fixiert und demgemäß die wichtige Festsetzung $\mathring{\mathsf E} = 0$ und $\mathring{\mathfrak r}_s = 0$ hinzugefügt.

Wenn der starre Körper **nicht frei** ist, so dienen seine kinetischen Grundgleichungen in der Regel dazu, einerseits aus den eingeprägten Kräften die Bewegung, andererseits aus der Bewegung den Reaktionsmotor $\mathfrak R$ zu ermitteln. Die erste Aufgabe ist die eigentlich **kinetische**, die zweite nennt man die **kinetostatische**. In einfachen Fällen gelingt es, die beiden Aufgaben durch Zerspaltung der Grundgleichungen völlig zu trennen.

Ist beispielsweise der Körper in einem raumfesten Punkt O reibungslos drehbar festgehalten, so wird mit $\mathfrak R_0 = 0$ seine Bewegung nach der zweiten Gleichung (5) $\dot{\mathfrak D} = \mathfrak M$ durch die eingeprägten Kräfte geregelt, während die erste Gleichung (5) die Stützkraft $\mathfrak R = \dot{\mathfrak J} - \mathfrak K$ liefert. Da in diesem Falle $\mathfrak J = m\mathfrak v_s = m[\mathfrak o\mathfrak r_s]$ wird, so hat man $\dot{\mathfrak J} = m\{[\dot{\mathfrak o}\mathfrak r_s] + [\mathfrak o\dot{\mathfrak r}_s]\}$ oder wegen $\dot{\mathfrak r}_s = \mathfrak v_s = [\mathfrak o\mathfrak r_s]$

$$\mathfrak R = -\mathfrak K + m\{[\dot{\mathfrak o}\mathfrak r_s] + [\mathfrak o[\mathfrak o\mathfrak r_s]]\}. \qquad (13)$$

Die Stützkraft besitzt also zwei von der Beschleunigung des Schwerpunkts herrührende Bestandteile, die wegfallen, wenn der Stützpunkt im Schwerpunkt liegt ($\mathfrak r_s = 0$).

5. Das Leistungsprinzip und der Energiesatz. Die **Leistung** des am starren Körper angreifenden, eingeprägten Kräftesystems berechnet sich als Summe der Leistungen aller Einzelkräfte

$$N = \mathsf S\mathfrak v\,d\mathfrak K. \qquad (1)$$

Setzt man hier $\mathfrak v = \mathfrak v_0 + [\mathfrak o\mathfrak r]$ ein, so kommt

$$N = \mathfrak v_0\mathfrak K + \mathfrak o\mathfrak M = \mathfrak V\mathfrak A \qquad (2)$$

---

[1]) Zuerst angegeben von K. Heun, Lehrbuch der Mechanik I, S. 271. Über eine Verallgemeinerung dieser Gleichungen für einen weder raum- noch körperfesten Beobachter wird in Ziff. 44 dieses Kapitels berichtet werden.

wieder in völliger Analogie zur Leistung $n = \mathfrak{v}\mathfrak{k}$ des von der Kraft $\mathfrak{k}$ getriebenen Massenpunktes mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Man kann also stets die Leistung zerlegen in eine Gleitleistung $\mathfrak{v}_0\mathfrak{K}$, die sich so berechnet, als ob die Resultante $\mathfrak{K}$ der äußeren Kräfte im körperfesten Bezugspunkt angriffe, und in eine Drehleistung $\mathfrak{o}\mathfrak{M}$. Dasselbe gilt von der Arbeit A der Kräfte

$$A = \int N\,dt = \int \mathfrak{v}_0\mathfrak{K}\,dt + \int \mathfrak{o}\mathfrak{M}\,dt. \qquad (3)$$

Bildet man andererseits die Änderungsgeschwindigkeit der Bewegungsenergie (1) von Ziff. 5, so kommt im Hinblick auf Ziff. 4, Gleichung (1),

$$\dot{T} = \mathrm{S}\,\mathfrak{v}\mathfrak{w}\,dm = \mathrm{S}\,\mathfrak{v}\,d\dot{\mathfrak{J}} = \mathrm{S}\,\mathfrak{v}\,d\mathfrak{K} + \mathrm{S}\,\mathfrak{v}\,d\mathfrak{R}.$$

Das zweite Glied rechts reduziert sich auf die Leistung der äußeren Reaktionskräfte

$$N_R = \mathfrak{v}_0\mathfrak{R} + \mathfrak{o}\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{W}\mathfrak{N} \qquad (4)$$

und verschwindet, wenn der Körper frei ist ($\mathfrak{N} = 0$), aber auch, wenn er beispielsweise nur in einem raumfesten Punkte reibungslos drehbar festgehalten wird, den man dann als Bezugspunkt wählen mag ($\mathfrak{v}_0 = 0$ und $\mathfrak{R}_0 = 0$), und überhaupt bei haftreibungsfreier skleronomer Führung ($d\mathfrak{R} \perp \mathfrak{v}$). Allgemein gilt

$$\dot{T} = N + N_R. \qquad (5)$$

Diese Beziehung wird in der Mechanik des starren Körpers als das **Leistungsprinzip** bezeichnet.

Ist die Arbeit A der Kräfte bei der Bewegung des Körpers aus einer Anfangslage heraus nur von der Endlage, nicht von der Art des Übergangs aus der Anfangs- zur Endlage abhängig, so nennt man die Kräfte **konservativ** und den Ausdruck

$$V = h - A = h - \int N\,dt$$

ihr **Potential** oder die **potentielle Energie** (**Energie der Lage**); dabei ist h eine willkürliche Konstante. Leisten die Reaktionskräfte keine Arbeit, so gilt also für konservative eingeprägte Kräfte nach (5)

$$T + V = h. \qquad (6)$$

Diese Beziehung heißt der **Energiesatz** des starren Körpers.

Man kann für die Änderungsgeschwindigkeit der Bewegungsenergie nach Ziff. 5, Gleichung (3), auch schreiben

$$2\dot{T} = \dot{\mathfrak{W}}\mathfrak{J} + \mathfrak{W}\dot{\mathfrak{J}}.$$

Da aber gemäß (2), (4) und (5) sowie Ziff. 4, Gleichung (3),

$$2\dot{T} = 2\mathfrak{W}\mathfrak{K} + 2\mathfrak{W}\mathfrak{N} = 2\mathfrak{W}\dot{\mathfrak{J}}$$

ist, so schließt man auf die Identität

$$\dot{\mathfrak{W}}\mathfrak{J} = \mathfrak{W}\dot{\mathfrak{J}}\,(= \dot{T}). \qquad (7)$$

Diese Identität lautet in gewöhnlicher Vektorschreibweise

$$\dot{\mathfrak{v}}_0\mathfrak{J} + \dot{\mathfrak{o}}\mathfrak{S} = \mathfrak{v}_0\dot{\mathfrak{J}} + \mathfrak{o}\dot{\mathfrak{S}}\,(= \dot{T}) \qquad (8)$$

und liefert insbesondere im Falle einer reinen Drehung des Körpers um einen raumfesten Punkt mit $\mathfrak{v}_0 = 0$, $\dot{\mathfrak{v}}_0 = 0$ die Gleichung

$$\dot{\mathfrak{o}}\mathfrak{S} = \mathfrak{o}\dot{\mathfrak{S}}\,(= \dot{T}) \qquad (9)$$

als wichtige Beziehung zwischen Schwungvektor $\mathfrak{S}$ und Drehvektor $\mathfrak{o}$.

Wenn die Bewegungsenergie T eines starren Körpers oder eines Systems solcher Körper, die ja eine skalare Invariante ist, von vornherein in bestimmten skalaren Lagekoordinaten q_i und den zugehörigen Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{q}_i$ ausgedrückt werden kann, so empfiehlt es sich häufig, den Impulsgleichungen (3) in Ziff. 4 eine Gestalt zu geben, in der die Ableitungen der Bewegungsenergie nach den q_i und den $\dot{q}_i$ vorkommen. Die so umgeformten skalaren Impulsgleichungen, die sog. Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art, sind bereits früher[1]) aus allgemeinen Prinzipen der Dynamik hergeleitet worden. Wir werden auch sie künftig neben den vektoriellen Impulsgleichungen von Ziff. 4 benützen. Die vektorielle (Eulersche) Methode erzielt mehr eine unmittelbar anschauliche Erfassung des mechanischen Prozesses, die skalare (Lagrangesche) letzten Endes die Herstellung der kinetischen Differentialgleichungen, deren Integration zur Erkenntnis der Bewegungsformen führt.

III. Die ebene Bewegung des starren Körpers.

6. Die kinetischen und kinetostatischen Gleichungen. Werden alle Punkte des starren Körpers gezwungen, sich in Ebenen parallel zu einer raumfesten Ebene E zu bewegen, so heißt die Bewegung eben (Planbewegung, komplanare Bewegung). Es ist zweckmäßig, den Führungsmotor $\mathfrak{N}$ in zwei Teile $\mathfrak{N}^{(1)}$ und $\mathfrak{N}^{(a)}$ zu zerspalten, wovon der erste nur von der Ebenführung des Körpers herrührt, wogegen der zweite die Reaktionen etwaiger sonstiger Führungen bedeutet. Dann verlangt das d'Alembertsche Prinzip, daß die Resultante $\mathfrak{R}^{(1)}$ senkrecht zur Führungsebene E, das Moment $\mathfrak{M}^{(1)}$ parallel zu ihr ist, während für $\mathfrak{R}^{(a)}$ und $\mathfrak{M}^{(a)}$ gerade das Umgekehrte gilt. Demgemäß enthalten die zur Ebene E parallelen Komponenten der ersten Bewegungsgleichung (3) oder (8) oder (10) von Ziff. 4 und die zur Ebene E senkrechte Komponente der zweiten Bewegungsgleichung (3) oder (8) oder (10) von Ziff. 4 den Reaktionsmotor $\mathfrak{N}^{(1)}$ überhaupt nicht und stellen mithin die kinetischen Gleichungen des Problems und die kinetostatischen Gleichungen zur Bestimmung des Reaktionsmotors $\mathfrak{N}^{(a)}$ dar. Die übrigen Komponenten dieser Gleichungen liefern dagegen die kinetostatischen Bedingungen zur Ermittlung des Reaktionsmotors $\mathfrak{N}^{(1)}$, sobald die Bewegung bestimmt ist.

Eine besonders einfache Form nehmen diese Gleichungen an, wenn man (was aber durchaus nicht immer zweckmäßig zu sein braucht) den Schwerpunkt zum Bezugspunkt wählt und wenn der Körper eine zu E parallele Symmetrieebene besitzt. Ist dann $\mathfrak{w}_s$ die Beschleunigung des Schwerpunkts und C das Trägheitsmoment des Körpers für die durch den Schwerpunkt gehende, zu E senkrechte Hauptachse, ferner $\mathfrak{o}$ der (jetzt zu E senkrechte) Drehvektor, und bedeuten die Zeiger 1 bzw. 2 jeweils die zu E parallele bzw. senkrechte Komponente, so lauten die kinetischen Gleichungen und die kinetostatischen für $\mathfrak{N}^{(a)}$

$$m\mathfrak{w}_s = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{R}^{(a)}, \qquad C\dot{\mathfrak{o}} = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_2^{(a)} \tag{1}$$

und die kinetostatischen für $\mathfrak{N}^{(1)}$

$$\mathfrak{R}^{(1)} = -\mathfrak{K}_2, \qquad \mathfrak{M}_1^{(1)} = -\mathfrak{M}_1. \tag{2}$$

Der Führungsmotor $\mathfrak{N}^{(1)}$ ist in diesem Falle von der Bewegung unabhängig.

Wir beschränken uns vorerst auf raumfeste Führungen (sog. skleronome Führung); die bewegliche (rheonome) Führung wird in Ziff. 49 behandelt werden.

7. Drehung um eine feste Achse. Die einfachste ebene Bewegung ist die Drehung um eine feste Achse, die nicht notwendig eine Hauptträgheitsachse

[1]) Siehe Kap. 2, Ziff. 9; vgl. auch Kap. 7, Ziff. 2 ds. Bd. des Handb.

zu sein braucht. Man denkt sich (Abb. 1) durch den Schwerpunkt S eine Ebene senkrecht zur Drehachse gelegt und nimmt als Bezugspunkt den Durchstoßungspunkt O der Drehachse mit dieser Ebene. Da etwaige Gleitreibung in der Achse nicht zu den Reaktionskräften, sondern zu den eingeprägten Kräften zu rechnen[1]) ist, so hat der Reaktionsmotor $\mathfrak{R}$ kein Moment in Richtung der Drehachse, und somit lautet die kinetische Gleichung nach Ziff. 4, Gleichung (3), und Ziff. 2, Gleichung (18),

$$\dot{\mathfrak{C}}_\omega = \mathfrak{M}_2 \qquad \text{oder} \qquad E_\omega \dot{\omega} = M, \tag{1}$$

wenn mit M der Betrag von $\mathfrak{M}_2$, d. h. des eingeprägten Momentes um die Drehachse bezeichnet wird. E_ω ist wieder das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse.

Um die übrigen Gleichungen, die hier zur Bestimmung des Reaktionsmotors dienen, in bequemer Form zu erhalten, beachtet man, daß aus der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_s = [\mathfrak{o}\mathfrak{r}_s]$ die Schwerpunktsbeschleunigung



$$\mathfrak{w}_s = [\dot{\mathfrak{o}}\mathfrak{r}_s] + [\mathfrak{o}[\mathfrak{o}\mathfrak{r}_s]] = \dot{\omega}\bar{\mathfrak{r}}_s - \omega^2\mathfrak{r}_s \tag{2}$$

folgt, wo $\bar{\mathfrak{r}}_s$ der um 90° im Sinne von ω gedrehte Vektor $\mathfrak{r}_s$ ist. Dann hat man die Kraftkomponenten des Reaktionsmotors aus

$$\mathfrak{R}^{(1)} = -\mathfrak{K}_2, \qquad \mathfrak{R}^{(2)} = -\mathfrak{K}_1 + m\mathfrak{w}_s \tag{3}$$

zu berechnen. Der Momentvektor des Reaktionsmotors folgt schließlich zu

$$\mathfrak{R}_0^{(1)} = -\mathfrak{M}_1 + \dot{\mathfrak{C}}_v, \qquad \mathfrak{R}_0^{(2)} = 0, \tag{4}$$

Abb. 1. Drehung um eine feste Achse.

und dabei ist nach Ziff. 2, Gleichung (18),

$$\dot{\mathfrak{C}}_v = \dot{\omega}\mathfrak{D}_\omega + \omega\dot{\mathfrak{D}}_\omega = \dot{\omega}\mathfrak{D}_\omega + \omega^2\bar{\mathfrak{D}}_\omega, \tag{5}$$

wenn $\mathfrak{D}_\omega$ den Vektor des Deviationsmoments bezüglich der Drehachse und ihres Punktes O und $\bar{\mathfrak{D}}_\omega$ den um 90° im Sinne von ω gedrehten Vektor $\mathfrak{D}_\omega$ bedeuten. Die rechtwinkligen Koordinaten von $\dot{\mathfrak{C}}_v$ sind in einem körperfesten xy-System mit den früheren Bezeichnungen

$$-D_y\dot{\omega} + D_x\omega^2, \qquad -D_x\dot{\omega} - D_y\omega^2. \tag{6}$$

Man sieht hieraus, daß auch für $\mathfrak{M}_1 = 0$ die Lager der Drehachse nur dann gleichmäßig beansprucht werden, wenn sie eine Hauptträgheitsachse ist; denn nur dann wird mit $\mathfrak{D}_\omega = \bar{\mathfrak{D}}_\omega = 0$ auch $\mathfrak{R}_0^{(1)} = 0$. Diese Bemerkung ist für Schwungräder von Bedeutung.

8. Das körperliche (physikalische) Pendel. Besonders wichtig ist hier das körperliche (physikalische) Pendel, bei welchem die Achse wagrecht liegt und die einzige eingeprägte Kraft die Schwere $\mathfrak{G}$ vom Betrag G ist. Nennt man s den Betrag von $\mathfrak{r}_s$ und φ die Neigung des Vektors $\mathfrak{r}_s$ gegen die Lotlinie (Abb. 2), so ist $M = -sG\sin\varphi$, und die kinetische Gleichung (1) der vorigen Ziffer lautet

$$\ddot{\varphi} + \frac{sG}{E_\omega}\sin\varphi = 0.$$

Diese Gleichung ist aber von derselben Form wie diejenige[2])

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0,$$

[1]) Vgl. Kap. 1, Ziff. 18 ds. Bd. des Handb.
[2]) Siehe Kap. 7, Ziff. 12 ds. Bd. des Handb.

eines punktförmigen (mathematischen) Pendels von der Länge

$$l = \frac{g H_{\omega\omega}}{sG} = \frac{k^2}{s}, \qquad (1)$$

wo k den Trägheitsarm des Körpers um die Drehachse bedeutet. Man nennt l die **reduzierte Pendellänge** des körperlichen Pendels. Dessen Bewegung ist damit auf die früher untersuchte des punktförmigen Pendels von der Länge l zurückgeführt.

Um die Gesamtheit aller wagerechten Achsen zu finden, die die gleiche reduzierte Pendellänge, also insbesondere bei gleicher Amplitude auch die gleiche Schwingungsdauer besitzen, drückt man k^2 in der Form $k^2 = s^2 + k_0^2$ aus, wo k_0 der Trägheitsarm für die wagerechte Schwerpunktsachse ist. Aus der so gemäß (1) entstehenden Gleichung

$$s^2 - ls + k_0^2 = 0 \qquad (2)$$

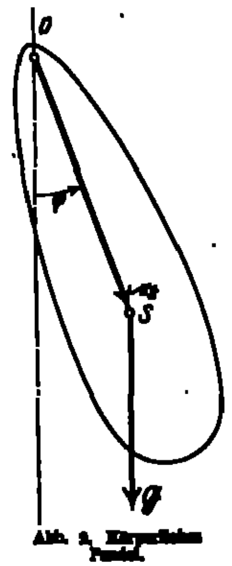


Abb. 2. Körperliches Pendel.

schließt man, daß die Gesamtheit der gesuchten wagerechten Achsen zwei konzentrisch um den Schwerpunkt liegende wagerechte Kreiszylinderflächen mit den Halbmessern s und $s' = l - s$ bilden (Abb. 3). Jede Ebene durch die ursprüngliche Achse und den Schwerpunkt enthält also noch drei weitere wagerechte Achsen mit derselben reduzierten Pendellänge, und der Abstand von je zweien dieser vier Achsen, zwischen denen eine und nur eine dritte liegt, ist gleich der reduzierten Pendellänge. Man kann also die reduzierte Pendellänge finden, indem man das Pendel um alle wagerechten Achsen schwingen läßt, die in einer Schwerpunktsebene liegen, und dann den Abstand von zwei Achsen mit gleicher Schwingungsdauer mißt; man hat aber darauf zu achten, daß zwischen den beiden Achsen eine und nur eine dritte mit ebenso großer Schwingungsdauer liegt. Eine Ausnahme bilden nur diejenigen Achsen, die auf einer wagerechten Zylinderfläche vom Halbmesser $s = k_0$ liegen, weil hier wegen $s' = k_0$ der zweite Zylinder mit dem ersten zusammenfällt, so daß in jeder Schwerpunktsebene nur zwei gleichwertige Achsen liegen, die dann den Abstand l haben. Diese Achsen sind dadurch ausgezeichnet, daß die reduzierte Pendellänge $l = 2k_0$ und damit auch die Schwingungsdauer einen Kleinstwert annimmt. Weil dann zugleich, wie aus (2) hervorgeht, $\partial l/\partial s = 0$ wird, so ist die Schwingungsdauer eines derart aufgehängten Pendels unempfindlich gegen eine kleine Verschiebung der Drehachse. Diese Eigenschaft der Achsen $s = k_0$ kann nach einem Vorschlag von SCHULER[1]) zur Konstruktion von astronomischen Uhren mit außerordentlich konstantem Gang benutzt werden.

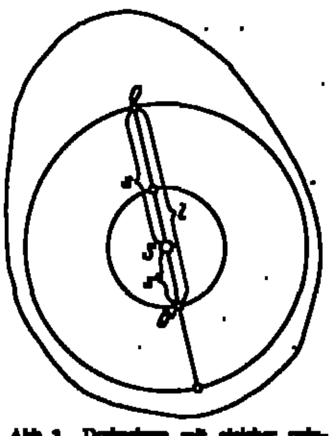


Abb. 3. Drehachsen mit gleicher reduzierter Pendellänge.

Man nennt die Durchstoßungspunkte O und O' (Abb. 3) zweier zusammengehöriger Achsen des Abstandes l durch die lotrechte Schwerpunktsebene wohl

[1]) M. SCHULER, ZS. f. Phys. Bd. 42, S. 547. 1927.

auch den **Drehpunkt** und den zugehörigen **Schwingungsmittelpunkt** und darf diese Bezeichnungen ohne weiteres miteinander vertauschen.

Eine wichtige Anwendung bildet das sog. **Reversionspendel**[1]) zur Bestimmung der Schwerebeschleunigung g. Die in der Ruhelage lotrechte Symmetrieachse eines solchen Pendels besitzt zwei Schneiden mit den Spitzen O und O' und eine auf der Symmetrieachse bewegliche Zusatzmasse, die so lange verschoben wird, bis die Schwingungsdauern um beide Schneiden gleich groß geworden sind. Wenn dann (unter Ausschluß des Sonderfalles $l = 2k_0$) der Gesamtschwerpunkt nicht im Mittelpunkt der Strecke OO' liegt, so ist OO' die reduzierte Pendellänge l, und die Beobachtung der Schwingungsdauer erlaubt die Schwerebeschleunigung g zu berechnen.

Eine weitere wichtige Anwendung bildet die experimentelle Bestimmung des Trägheitsmoments. Läßt man einen Körper um eine wagerechte Achse schwingen und ermittelt durch Feststellung der Schwingungsdauer die zugehörige reduzierte Pendellänge l, so hängt diese mit k_0 und s durch die Gleichung (3) zusammen. Kennt man den Schwerpunkt (also s), so läßt sich k_0 berechnen. Kennt man den Schwerpunkt jedoch nicht, aber wenigstens die Schwerpunktsebene durch die Drehachse, so stellt man einen zweiten Schwingungsversuch um eine zweite wagerechte Achse in dieser Ebene mit dem Schwerpunktsabstand s_1 an und hat nach experimenteller Ermittlung der zugehörigen reduzierten Pendellänge l_1 eine zweite Gleichung

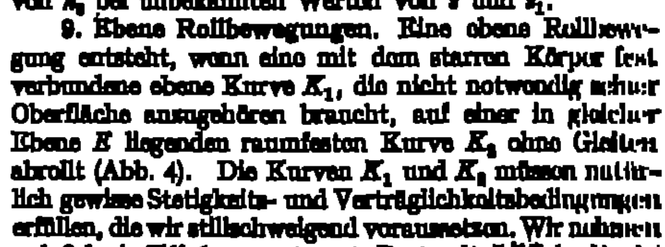
$$s_1^2 - l_1 s_1 + k_0^2 = 0. \tag{3}$$

Da außerdem der Abstand a der ersten und zweiten Drehachse, also die Größe

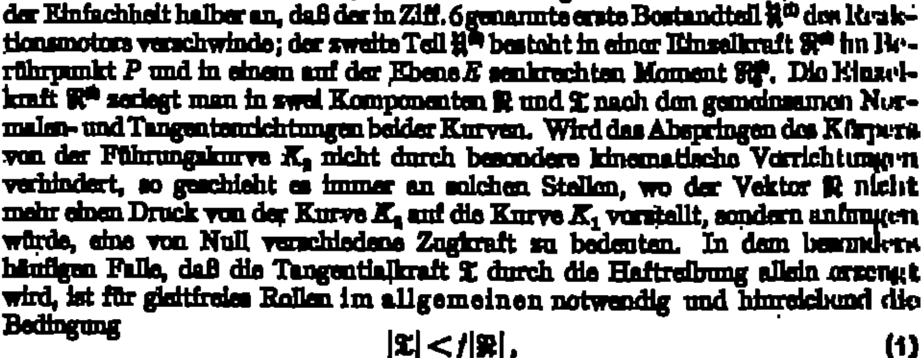
$$s \pm s_1 = a \tag{4}$$

bekannt ist, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Schwerpunkt zwischen den beiden Achsen liegt oder nicht, so besitzt man in (2) bis (4) die hinreichende Anzahl von Gleichungen zur Berechnung von k_0 bei unbekannten Werten von s und s_1.

Abb. 4. Ebene Rollbewegung.



9. Ebene Rollbewegungen. Eine ebene Rollbewegung entsteht, wenn eine mit dem starren Körper fest verbundene ebene Kurve K_1, die nicht notwendig seiner Oberfläche anzugehören braucht, auf einer in gleicher Ebene E liegenden raumfesten Kurve K_2 ohne Gleiten abrollt (Abb. 4). Die Kurven K_1 und K_2 müssen natürlich gewisse Stetigkeits- und Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, die wir stillschweigend voraussetzen. Wir nehmen



der Einfachheit halber an, daß der in Ziff. 6 genannte erste Bestandteil $\mathfrak{R}^{(1)}$ des Reaktionsmotors verschwinde; der zweite Teil $\mathfrak{R}^{(2)}$ besteht in einer Einzelkraft $\mathfrak{K}^{(2)}$ im Berührpunkt P und in einem auf der Ebene E senkrechten Moment $\mathfrak{M}_P^{(2)}$. Die Einzelkraft $\mathfrak{K}^{(2)}$ zerlegt man in zwei Komponenten $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ nach den gemeinsamen Normalen- und Tangentenrichtungen beider Kurven. Wird das Abspringen des Körpers von der Führungskurve K_2 nicht durch besondere kinematische Vorrichtungen verhindert, so geschieht es immer an solchen Stellen, wo der Vektor $\mathfrak{N}$ nicht mehr einen Druck von der Kurve K_2 auf die Kurve K_1 vorstellt, sondern anfangen würde, eine von Null verschiedene Zugkraft zu bedeuten. In dem besonders häufigen Falle, daß die Tangentialkraft $\mathfrak{T}$ durch die Haftreibung allein erzeugt wird, ist für gleitfreies Rollen im **allgemeinen** notwendig und hinreichend die Bedingung

$$|\mathfrak{T}| < f|\mathfrak{N}|, \tag{1}$$

[1]) Vgl. Bd. II dieses Handb.

wo f die Haftreibungsziffer[1]) bedeutet. Doch sind für ganz bestimmte Anfangsbedingungen auch reine Rollbewegungen möglich, die die Bedingung (1) nicht erfüllen; diese Rollbewegungen sind allerdings stets **unstabil** in dem Sinne, daß die geringste Störung die Bewegung in eine **Gleitbewegung** (Ziff. 10) umwandelt[2]).

Typische Beispiele ebener Rollbewegungen sind folgende:

a) **Herabfallen eines schweren Rades**, um dessen Welle unausdehnbare, völlig biegsame, an der Decke befestigte, masselose Fäden geschlungen sind (Abb. 5). Ist m die Radmasse, k sein Trägheitsarm bezüglich der den Schwerpunkt tragenden Radachse, r der Wellenhalbmesser, T die Gesamtspannung der Fäden, v die Schwerpunktsgeschwindigkeit, ω die Drehgeschwindigkeit um den Schwerpunkt, und sieht man von Bewegungswiderständen, wie Luftreibung, ab, so liefern die nach Ziff. 4 aufgestellten Impulsgleichungen

$$m\dot{v} = mg - T, \qquad m k^2 \dot{\omega} = rT$$

zusammen mit der kinematischen Bedingung

$$v = r\omega \tag{2}$$

sofort die Lösung

$$\dot{v} = \frac{1}{1+\left(\frac{k}{r}\right)^2}\,g, \qquad T = \frac{1}{1+\left(\frac{r}{k}\right)^2}\,mg, \tag{3}$$

Abb. 5. Fallbewegung eines Rades.

also eine freie Fallbewegung mit scheinbar verringerter Schwerebeschleunigung und eine Fadenspannung T, die konstant und kleiner als das Radgewicht mg ist.

Stellt man durch Beobachtung die Beschleunigung $\dot{v}$ oder die Fadenspannung T fest, so kann man daraus beispielsweise das Trägheitsmoment mk^2 des Rades ermitteln.

b) **Abrollen der wagerechten Welle desselben Rades auf einer rauhen schiefen Ebene** von der Neigung α gegen die Wagerechte ohne Rollwiderstand. Hier ist g durch $g\sin\alpha$ zu ersetzen, und da der Normaldruck den Betrag $N = mg\cos\alpha$ hat, so lautet die Bedingung für reines Rollen

$$f\left[1+\left(\frac{r}{k}\right)^2\right]\operatorname{ctg}\alpha > 1\,. \tag{4}$$

Solange diese Ungleichung erfüllt ist, eignet sich auch diese Bewegung zur experimentellen Bestimmung des Trägheitsmomentes. Im Falle eines Gleichheitszeichens ist reines Rollen noch möglich, wenn zu irgendeiner Zeit, etwa zu Beginn der Bewegung, die kinematische Bedingung (2) erfüllt ist; ein durch eine kleine Störung erzeugtes Gleiten kommt aber nicht von selbst zum Erlöschen, so daß die Rollbewegung jetzt kaum als stabil anzusprechen ist. Im Falle des $<$-Zeichens in (4) ist gleitfreies Rollen überhaupt nicht länger als höchstens einen Augenblick möglich.

Die Zahl der in den Lehrbüchern und der sonstigen Literatur[3]) behandelten weiteren Beispiele für ebene Rollbewegungen ist außerordentlich groß. Eine wesentliche physikalische oder erkenntnistheoretische Bedeutung kommt den meisten dieser nützlichen Übungsbeispiele aber kaum zu. Es sei nur noch auf

[1]) Vgl. Kap. 9, Ziff. 1 ds. Bd. des Handb., wo die Reibungsgesetze ausführlich behandelt werden.

[2]) F. Pfeiffer, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. Bd. 23, S. 375. 1914.

[3]) Vgl. etwa die Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik von Zech-Cranz, 4. Aufl. Stuttgart 1920; ferner H. Tallqvist, Acta soc. scient. Fennicae Helsingfors, Bd. 50, Nr. 15. 1926.

den von PFEIFFER behandelten Fall des Rollens einer inhomogenen Walze auf einer Ebene hingewiesen, wo für $|\mathfrak{T}| \geqq f|\mathfrak{N}|$ eine typisch labile Rollbewegung möglich ist.

10. Ebene Gleitbewegungen. Die ebene Bewegung eines starren Körpers kann in mannigfacher Weise kinematisch eingeschränkt sein. Einschränkungen, von denen jede die Zahl der Freiheitsgrade um eine Einheit erniedrigen, sind die folgenden:

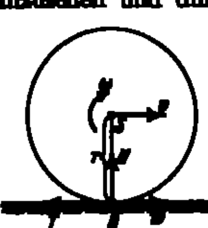
a) Gleiten einer körperfesten ebenen Kurve K_1 auf einer in gleicher Ebene liegenden raumfesten Kurve K_2,

b) Gleiten eines körperfesten Punktes P_1 auf einer in seiner Bewegungsebene liegenden raumfesten Kurve K_2,

c) Gleiten einer körperfesten Kurve K_1 in ihrer eigenen Ebene längs eines raumfesten Punktes P_2.

Sind zwei solche Führungen gleichzeitig vorhanden, so müssen die Führungskurven natürlich in gleicher oder mindestens in parallelen Ebenen liegen, und außerdem sind die Kurven auch hier an gewisse Stetigkeits- und Verträglichkeitsbedingungen gebunden.

Die etwa vorhandenen Gleitreibungskräfte sind als eingeprägte Kräfte anzusehen und durch die Gesetze der Gleitreibung[1]) vorgeschrieben. Ist das Abspringen von den Führungen nicht durch besondere kinematische Vorrichtungen verhindert, so tritt es auch hier jedesmal dort ein, wo die Normalkraft $\mathfrak{N}$ des Führungsmotors $\mathfrak{A}^*$ anfangen würde, eine von Null verschiedene Zugkraft zwischen Führung und Körper zu bedeuten.


Abb. 6. Gleitbewegung eines Zylinders auf rauher wagerechter Ebene.

Als typische Beispiele seien erwähnt:

a) **Ebene Gleitbewegung eines homogenen schweren Kreiszylinders senkrecht zu seiner Achse auf wagerechter rauher Ebene** (Abb. 6). Wir nennen k_0 den Trägheitsarm des Zylinders von der Masse m um seine Achse, r den Zylinderhalbmesser, v die in bestimmtem Sinne positiv gerechnete Schwerpunktsgeschwindigkeit, w die in gleichem Sinne positiv gezählte Geschwindigkeit der (materiell dem Zylinder zugehörig zu denkenden) Berührgeraden B längs der wagerechten Ebene, ω die Drehgeschwindigkeit des Zylinders um seine Achse, positiv im Sinne einer reinen Rollbewegung, ferner v_0, w_0 und ω_0 die durch die Beziehung $w_0 = v_0 - r\omega_0$ zusammenhängenden Anfangswerte dieser Größen, endlich f die Gleitreibungszahl, deren Vorzeichen wir für $w \neq 0$ so wählen, daß das Produkt $fw > 0$ ist. Damit ein eigentliches Gleiten eintritt, müssen wir $w_0 \neq 0$ voraussetzen. Die Normalkraft $N = mg$ ist hier ebenso ein fester Wert wie die — in entgegengesetzter Richtung von v positiv gerechnete — Gleitreibungskraft $T = fmg$. Sieht man vom Rollwiderstand ab, so gilt

$$\dot v = -fg, \qquad k_0^2\dot\omega = rfg, \tag{1}$$

und daher ist die Gleitgeschwindigkeit der Berührachse B

$$w = w_0 - fgt\left(1 + \frac{r^2}{k_0^2}\right), \tag{2}$$

so daß das Gleiten aufhört ($w = 0$) im Augenblicke

$$t_1 = \frac{w_0}{fg\left(1 + \frac{r^2}{k_0^2}\right)} \tag{3}$$

[1]) Vgl. Kap. 9, Ziff. 1 ds. Bd. des Handb.

mit den Geschwindigkeiten

$$v_1 = v_0 - \frac{w_0 k_0^2}{k_0^2 + r^2}, \qquad \omega_1 = \omega_0 + \frac{w_0 r}{k_0^2 + r^2}. \tag{4}$$

Von da ab rollt der Zylinder ohne Gleiten weiter mit den festen Werten (4) von v und ω, die nur dann verschwinden würden (so daß der Zylinder von jetzt an in Ruhe bliebe), wenn das — während der ganzen Gleit- und Rollbewegung unveränderliche — Impulsmoment bezüglich eines Punktes der Geraden B vom Betrag $|\mathfrak{G}| = m k_0^2 \omega + m r v$ [vgl. Ziff. 2, Gleichung (8)] zufälligerweise gleich Null wäre (was auch für $w_0 \neq 0$ möglich ist). Wie aus (4) hervorgeht, kann die Geschwindigkeit v während der Gleitbewegung ihr Vorzeichen ändern, so daß die schließliche Rollbewegung v_1 nach entgegengesetzter Richtung als die Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Gleitbewegung erfolgt, eine Erscheinung, die sich experimentell leicht verwirklichen läßt. Auch die Drehung ω kann ihren Sinn während des Gleitens ändern.

Die Gleitreibung verzehrt während der ganzen Gleitbewegung die Energie

$$m g f \int_0^{t_1} w \, dt = \frac{m}{2} \frac{w_0^2}{1 + \frac{r^2}{k_0^2}}, \tag{5}$$

welche merkwürdigerweise unabhängig von f bleibt, und das Rollen beginnt in dem Augenblicke, wo die Bewegungsenergie ein analytisches Minimum vom Betrage

$$\frac{m}{2} \left\{ v_0^2 + k_0^2 \omega_0^2 - \frac{w_0^2}{1 + \frac{r^2}{k_0^2}} \right\}$$

erreicht hat.

Die Erweiterung des Problems auf beliebige Zylinder hat PFEIFFER[1]) vorgenommen.

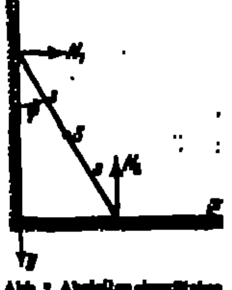


Abb. 7. Abgleiten eines Stabes längs Wand und Fußboden.

b) **Abgleiten eines Stabes oder einer Leiter in lotrechter Ebene längs Wand und Fußboden.** Wählt man die Bezeichnungen von Abb. 7, wo N_1 und N_2 die Reaktionskräfte der Wand und des Fußbodens sind, die wir als völlig glatt voraussetzen mögen, und sind x, y die kartesischen Koordinaten des in der Stabmitte liegenden Schwerpunkts, φ die Neigung des Stabes gegen die Wand, s die halbe Stablänge, m die Stabmasse und k_0 der Trägheitsarm bezüglich der zur Gleitebene senkrechten Schwerpunktsachse, so lauten die Impulssätze

$$m\ddot{x} = N_1, \qquad m\ddot{y} = mg - N_2, \qquad m k_0^2 \ddot{\varphi} = s(-N_1 \cos\varphi + N_2 \sin\varphi); \tag{6}$$

zu diesen treten die geometrischen Bedingungen

$$x = s \sin\varphi, \qquad y = -s \cos\varphi. \tag{7}$$

Die Elimination von x, y, N_1, N_2 führt auf die Gleichung

$$(k_0^2 + s^2)\ddot{\varphi} = g s \sin\varphi, \tag{8}$$

welche zeigt, daß der Stab sich um seinen Fußbodenpunkt genau so dreht, wie wenn dieser Punkt festgehalten und dafür die Wand fortgelassen würde (aufrechtes körperliches Pendel; vgl. Ziff. 7).

---

[1]) F. PFEIFFER, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 62, S. 113. 1913; sowie Proc. of the first Intern. Congr. of Mechanics at Delft 1924, S. 246.

Ist φ als elliptische Funktion der Zeit gefunden, so liefern die Gleichungen (7) die Bewegung des Schwerpunkts. Nimmt man noch das [auch aus (8) folgende] Energieintegral

$$(k^2 + s^2)\,\dot\varphi^2 = 2gs(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

hinzu, wo φ_0 die geschwindigkeitsfreie Anfangslage angibt, so kann man $\dot x$ und $\dot y$ vermöge (7) elementar in φ ausdrücken und erhält dann insbesondere für die Wand- und Fußbodenreaktion

$$N_1 = mg\frac{\sin\varphi}{1+\frac{k^2}{s^2}}(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0), \qquad N_2 = mg\left[1 - \frac{1-\cos\varphi(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)}{1+\frac{k^2}{s^2}}\right]. \tag{9}$$

Daraus geht hervor, daß der Stab die Wand verläßt, sobald er die der Gleichung

$$\cos\varphi_1 = \tfrac{2}{3}\cos\varphi_0 \tag{10}$$

gehorchende Neigung φ_1 erreicht hat; der Fußbodendruck ist dann immer noch positiv. Die Geschwindigkeiten $\dot\varphi$ und $\dot x$ haben in diesem Augenblick die Werte

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{gs\cos\varphi_0}{k^2+s^2}}, \qquad \dot x_m = \sqrt{\frac{8}{27}\,\frac{gs^3\cos^3\varphi_0}{k^2+s^2}}. \tag{11}$$

Von jetzt an nimmt die Bewegung analytisch ein neues Gepräge an. Die Horizontalprojektion des Schwerpunkts läuft nun mit der festen Geschwindigkeit $\dot x_m$ gleichmäßig weiter, die Koordinaten y und φ gehorchen weiterhin den Gleichungen

$$m\ddot y = mg - N_2', \qquad mk^2\ddot\varphi = sN_2'\sin\varphi, \qquad y = -s\cos\varphi$$

mit dem Energieintegral

$$(k^2 + s^2\sin^2\varphi)\,\dot\varphi^2 - (k^2 + s^2\sin^2\varphi_1)\,\omega_1^2 = 2gs(\cos\varphi_1 - \cos\varphi),$$

wonach die Ermittlung von φ und y auf Quadraturen und Funktionsumkehr zurückgeführt ist.

Zahlreiche weitere Beispiele ebener Gleitbewegungen findet man in der einschlägigen Literatur behandelt[1]).

IV. Der kräftefreie Kreisel.

11. Der Begriff des Kreisels; Kreiselinstrumente. Wir wenden uns nun der Untersuchung des freibeweglichen oder höchstens in einem Punkte mit völliger Drehfreiheit festgehaltenen starren Körpers zu. Man nennt einen solchen wohl auch einen Kreisel, gebraucht also das Wort in etwas anderer Bedeutung als bei dem auf wagerechter Unterlage tanzenden Kinderkreisel (Spielkreisel, Ziff. 34). Unter den kinetischen Problemen des starren Körpers hat die theoretische Untersuchung der merkwürdigen Kreiselbewegungen schon die Vertreter der klassischen Mechanik (D'Alembert, Euler, Poinsot, Lagrange, Poisson) lebhaft beschäftigt; aber auch die Mathematiker und Physiker des 19. und 20. Jahrhunderts bis zur Gegenwart haben sich immer wieder aufs neue dem Kreiselproblem zugewandt. Ihnen haben sich zuletzt auch die Ingenieure wegen der Verwertung der Kreiselwirkungen für technische Konstruktionen zugesellt. Einerseits sind am Kreisel die anschaulich-mechanischen Methoden geradezu entwickelt worden, andererseits sind sehr tiefliegende Hilfsmittel der mathematischen Analysis herangezogen worden. Wir werden hier nur über diejenigen Ergebnisse der Theorie berichten, die lediglich der mechanischen Erkenntnis der Bewegungs-

[1]) Vgl. Fußnote [1]) von S. 387.

formen des Kreisels dienen, und alle analytischen Einzelheiten, die sich nicht unmittelbar diesem Zwecke fügen, so reizvoll sie dem Mathematiker auch erscheinen mögen, beiseite lassen.

Als eingeprägte Kraft berücksichtigt man vorwiegend nur die Schwerkraft; man spricht dann von einem **schweren Kreisel**. Außerdem noch vorhandene Kräfte (z. B. Reibung, Luftwiderstand) werden meist als störende Nebeneinflüsse angesehen und wegen der Unsicherheit ihrer experimentellen Grundlagen oder wegen mathematischer Schwierigkeiten nur angenähert, oft nur qualitativ schätzungsweise in Rechnung gebracht. Häufig wird der Schwerpunkt auf einer Hauptträgheitsachse des Kreisels angenommen, um welche herum das Trägheitsellipsoid Drehsymmetrie besitzt; dann heißt er **symmetrischer Kreisel**.

Die sog. **Kreiselmodelle** oder **Kreiselinstrumente** dienen vorwiegend demonstrativen Zwecken im Unterricht. Messende Beobachtungen mit physikalischen Versuchsmethoden sind an Kreiselinstrumenten kaum durchgeführt, wenn man von dem für technische Verwertung ersonnenen Modellen absieht[1]). Die älteren Modelle symmetrischer Kreisel, die noch heute in den Vorlesungen der Experimentalphysik eine wenn auch bescheidene Rolle spielen, sind meist auf große Eigengeschwindigkeiten um die Symmetrieachse eingestellt und von kleiner Größe. Das untere Ende der Symmetrieachse ist in der Regel kugelförmig und paßt in eine konzentrische, halboffene Kugelschale als Lager hinein oder stützt sich auf eine kugelförmige Pfanne. Vielfach ist zur Verringerung der Reibung die „Schwungscheibe" um die Symmetrieachse, die als Lager dient, besonders leicht beweglich, so daß streng genommen ein Zweikörpersystem (Zylindergelenkkette aus zwei Gliedern, Ziff. 46) vorliegt, oder der Kreisel ist namentlich für die Beobachtung des „kräftefreien" oder nahezu kräftefreien Zustandes in ein Cardanisches Gelenk eingehängt, welches zugleich die ersten beiden Eulerschen Winkel (vgl. Ziff. 16) schön verwirklicht (z. B. der **Bohnenbergersche Kreisel**).

Ein sinnreiches Kreiselinstrument, das sich auch zur Beobachtung bei langsamer Drehung eignet, ist der **Maxwellsche Kreisel**[2]). Er besteht aus einer mit der unteren Spitze in einem Achatbecher ruhenden Achse, auf der die Glocke und ein Übergewicht in Schraubengewinden verschieblich sitzen; sechs radial und drei axial verschiebbare Schrauben mit starken Köpfen gestatten, innerhalb gewisser Grenzen beliebige unsymmetrische oder symmetrische Kreisel mit beliebiger Schwerpunktslage herzustellen.

Für einen größeren Zuschauerraum recht sinnfällig sind Vorrichtungen, die als Kreiselkörper einen Fahrradreifen benutzen, dessen Felge zur Vergrößerung des axialen Trägheitsmomentes mit einem Bleiring an Stelle des Gummireifens bewehrt ist. Die Aufhängung geschieht bei Greenhill[3]) durch einfache, an der verlängerten Fahrradachse befestigte Drähte, bei Prandtl[4]) durch ein eigenartig ausgebildetes Gehänge, dessen Grundbestandteil ein Gelenkparallelogramm ist, das selbst wieder mit einem Kugelgelenk an das Gestell angeschlossen wird. Dem Schwungring können noch diametral gegenüber angeordnete Zusatzkörper aus Blei aufgeschraubt werden, durch welche er ungleiche Trägheitsmomente in seiner Äquatorebene erhält. Wir dürfen aber nicht vergessen, daß sowohl beim Cardani-

---

[1]) Vgl. Kap. 9, Ziff. 35—41 ds. Bd. des Handb.

[2]) J. C. Maxwell, Trans. Edinbg. Roy. Soc. Bd. 21, Teil IV; Scientif. Papers Bd. I, S. 248. Beschreibung eines in der Sammlung des Göttinger math. Instituts befindlichen Modells bei M. Winkelmann, Zur Theorie des Maxwellschen Kreisels. Dissert. Göttingen 1904.

[3]) A. G. Greenhill, Verh. des 3. Intern. Math.-Kongr. in Heidelberg 1904, S. 100.

[4]) F. Pfeiffer, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 60, S. 337. 1912; sowie F. Lange, Beiträge zur Theorie des Prandtlschen Kreisels. Dissert. Jena 1921 (nicht gedruckt).

schen Gehänge wie beim Prandtlschen Kreisel Teile des sich drehenden Systems nicht die ganze Bewegung mitmachen, d. h. eine geringere Zahl von Freiheitsgraden besitzen. Wenn auch die Trägheitswirkungen dieser Teile gegenüber der großen Schwungmasse des Fahrrades geringfügig sein mögen, und bei den mit ihm beabsichtigten qualitativen Versuchen das Wesentliche der Kreiselerscheinung befriedigend hervortritt, so würde doch eine genauere Theorie von diesem Umstand Rechenschaft zu geben und das Problem vollständiger als Körpersystem in Gestalt von Zylindergelenkketten zu behandeln haben.

Zunächst haben wir es mit dem der Einwirkung äußerer Kräfte ganz entzogen gedachten sog. kräftefreien Kreisel zu tun, den man praktisch wenigstens annähernd dadurch verwirklichen kann, daß man die Schwerkraft durch Stützung im Schwerpunkt aufhebt oder geeignet gestaltete Körper (aus Gummi geschnittene eignen sich gut) in die Luft schleudert (wie z. B. beim Diabolospiel) und ihre, wenigstens anfangs nahezu kräftefreie Drehung um den Schwerpunkt beobachtet.

12. Die Poinsot- und MacCullaghbewegung. Ist der starre Körper völlig kräftelos und frei, verschwindet also mit $\mathfrak{K} = 0$, $\mathfrak{R} = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$, $\mathfrak{R}_0 = 0$ der Kraftmotor $\mathfrak{L}$ und der Reaktionsmotor $\mathfrak{N}$, oder ist allgemeiner wenigstens $\mathfrak{L} + \mathfrak{N} = 0$, so folgt aus Ziff. 4, Gleichung (3), daß der Impulsmotor $\mathfrak{J}$ zeitlich unveränderlich ist, d. h. daß Impuls $\mathfrak{J}$ und Impulsmoment $\mathfrak{S}$ unveränderliche Vektoren sind. Zufolge Ziff. 2, Gleichung (6) eilt also der Schwerpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_s$ geradlinig vorwärts (eingeschlossen den Sonderfall der Ruhe $\mathfrak{v}_s = 0$). Da nach Ziff. 5, Gleichung (2) und (4) die Leistung $N + N_R = 0$ ist, so folgt aus dem Energiesatz, Ziff. 5, Gleichung (5), daß auch die Energie der Bewegung $T =$ konst. bleibt. Wählt man den Schwerpunkt zum Bezugspunkt, so zerfällt die Energie in die zwei Teile T_1 und T_2 von Ziff. 3; und da die Gleitenergie $T_1 = \frac{1}{2} m \mathfrak{v}_s^2 =$ konst. ist, so bleibt auch die Drehenergie $T_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{o}\mathfrak{S}$ = konst. Außerdem reduziert sich das Impulsmoment $\mathfrak{S}$ auf den Schwung $\mathfrak{S} = \mathsf{E}\mathfrak{o} = Ap\mathfrak{i} + Bq\mathfrak{j} + Cr\mathfrak{k} =$ konst. [vgl. Ziff. 2, Gleichung (14)]. Trotzdem wäre es falsch, zu meinen, daß auch der Drehvektor $\mathfrak{o}$ im allgemeinen sich nicht ändere.

Während also die kräftefreie (Trägheits-) Bewegung des Schwerpunkts äußerst einfach ist, so besitzt doch die kräftefreie (Trägheits-) Bewegung des Körpers um den Schwerpunkt ein sehr verwickeltes Aussehen. Wenn man auf die Bewegung des Bezugspunktes nicht achten und nur die Drehbewegung eines starren Körpers um den Bezugspunkt — in diesem Falle um den Schwerpunkt — ins Auge fassen will, so nennt man den Körper nach der Begriffsbestimmung von Ziff. 11 einen Kreisel. Für die schon von EULER erledigte Bewegung des kräftefreien Kreisels hat POINSOT[1]) ein anschauliches Bild in Form eines zwangläufigen Mechanismus gegeben, das wir nun beschreiben. Da wir weiterhin nur die Drehbewegung beobachten und uns den Schwerpunkt weiterhin in Ruhe denken, so schreiben wir für die Drehenergie einfach T statt T_2.

Wird der Schwerpunkt geradezu festgehalten, so liefert die Drehbewegung um ihn keinen Beitrag zur Stützreaktion $\mathfrak{R}$, wie am Schlusse von Ziff. 4 gezeigt worden ist. Dagegen beeinflußt die unvermeidliche Lagerreibung im Stützpunkt oder in dem die Stützung besorgenden Cardangehänge die sonst kräftefreie Bewegung. Von solcher Reibung wird vorläufig ganz abgesehen; ihre störende Wirkung wird erst in Ziff. 19 wenigstens abgeschätzt werden.

Aus $\mathfrak{S} =$ konst. und $\mathfrak{o}\mathfrak{S} = 2T =$ konst. folgt, daß die Projektion von $\mathfrak{o}$ auf $\mathfrak{S}$ den ebenfalls festen Betrag

$$n = \frac{2T}{|\mathfrak{S}|} \tag{1}$$

---

[1]) L. POINSOT, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Paris 1834 (auch deutsch von K. H. SCHELLBACH, Berlin 1851).

besitzt. Der Endpunkt des Drehvektors $\mathfrak{o}$ bewegt sich also dauernd in einer zum Schwungvektor $\mathfrak{S}$ senkrechten und somit raumfesten Ebene, welche den Vektor $\mathfrak{S}$ im Abstand $\varkappa$ vom Schwerpunkt schneidet; man nennt sie die unveränderliche Ebene[1]) des kräftefreien Kreisels. Andererseits besagt der Energiesatz

$$\mathfrak{o}\mathfrak{S} = \mathfrak{o}\,\mathrm{E}\,\mathfrak{o} = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T = \text{konst.}, \tag{2}$$

daß der Endpunkt des Drehvektors, der in einem körperfesten Hauptachsensystem durch den Schwerpunkt die Koordinaten p, q, r hat, stets auf der Oberfläche eines körperfesten, zum Trägheitsellipsoid ähnlichen und koaxialen Ellipsoides mit den Halbachsen $\sqrt{2T/A}$, $\sqrt{2T/B}$, $\sqrt{2T/C}$ läuft; man nennt es das zur Drehenergie T gehörige Poinsotellipsoid. Beachtet man außerdem, daß der Endpunkt von $\mathfrak{o}$ als der Drehachse angehörend jeweils in Ruhe ist, so schließt man rasch[2]) auf folgendes Ansehen der Bewegung (Abb. 8): Der kräftefreie Kreisel bewegt sich so, daß sein Poinsotellipsoid auf der unveränderlichen Ebene ohne Gleiten abrollt, wobei die Drehgeschwindigkeit in jedem Augenblick durch den vom Ellipsoidmittelpunkt (Schwerpunkt) zum Berührpunkt gezogenen Fahrstrahl dargestellt wird [Poinsotbewegung[3])].

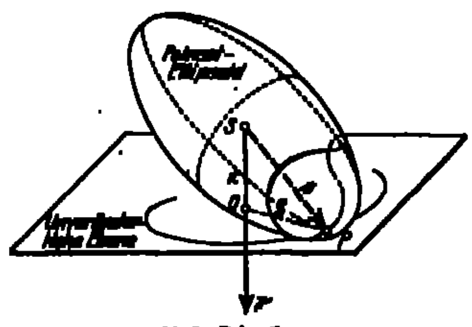


Abb. 8. Poinsotbewegung.

Die in unseren Formeln stets auftretende Reziprozität zwischen Schwungvektor $\mathfrak{S}$ und Drehvektor $\mathfrak{o}$ bringt es mit sich, daß der Bewegungsmechanismus noch unter einem zweiten kinematischen Bild verdeutlicht werden kann, das von MacCullagh[4]) herrührt und zu dem Poinsotschen Bild durchaus reziprok, aber nicht so anschaulich ist. Die Energiegleichung [vgl. Ziff. 2, Gleichung (16) und (17)]

$$\mathfrak{o}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\,\mathrm{E}^{-1}\mathfrak{S} = \frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C} = 2T = \text{konst.}, \tag{3}$$

wo L, M, N wieder die Komponenten von $\mathfrak{S}$ in dem körperfesten Hauptachsensystem des Schwerpunkts sind, besagt, daß der Endpunkt des Schwungvektors $\mathfrak{S}$ auf der Oberfläche des zum Poinsotellipsoid reziproken, zu ihm koaxialen, körperfesten MacCullaghellipsoid mit den Halbachsen $\sqrt{2AT}$, $\sqrt{2BT}$, $\sqrt{2CT}$ liegt. Man schließt dann leicht auf folgendes Bild der Bewegung: Der kräftefreie Kreisel bewegt sich so, daß sein MacCullaghellipsoid durch den raumfesten Endpunkt des Schwungvektors geht, wobei das Lot, das man vom Ellipsoidmittelpunkt (Schwerpunkt) auf die in jenem Endpunkt an das MacCullaghellipsoid gelegte Berührebene fällt, die Richtung des Drehvektors $\mathfrak{o}$ und die Länge

$$\varkappa' = \frac{2T}{|\mathfrak{o}|} \tag{4}$$

besitzt (MacCullaghbewegung).

13. Polbahn, Spurbahn und Schwungbahn. Der Berührpunkt P des Poinsotellipsoids und der unveränderlichen Ebene (Abb. 8) beschreibt auf dem

[1]) Über die unveränderliche Ebene eines kräftefreien Punktsystems s. Kap. 7, Ziff. 22 ds. Bd. des Handb.

[2]) Vgl. R. Grammel, Der Kreisel, S. 24. Braunschweig 1920.

[3]) Vorrichtungen auch zur Verfolgung des zeitlichen Ablaufs der Bewegung finden sich schon bei Poinsot, dann bei J. Sylvester, Proc. London Math. Soc. 1866, Nr. 6, S. 3.

[4]) J. MacCullagh, Collected works, S. 239. Dublin 1880.

Ellipsoid eine (körperfeste) Bahn, die sog. Polbahn (Polhodie), und gleichzeitig auf der Ebene eine (raumfeste) Bahn, die sog. Spurbahn (Herpolhodie). Der Berührpunkt als Endpunkt des Drehvektors gehorcht der Gleichung (2) von Ziff. 12

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T \tag{1}$$

als Ausdruck der Unveränderlichkeit der Drehenergie und außerdem der Gleichung

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \mathfrak{S}^2 \tag{2}$$

als Ausdruck der Unveränderlichkeit des Schwungvektors. Die Polbahn ist

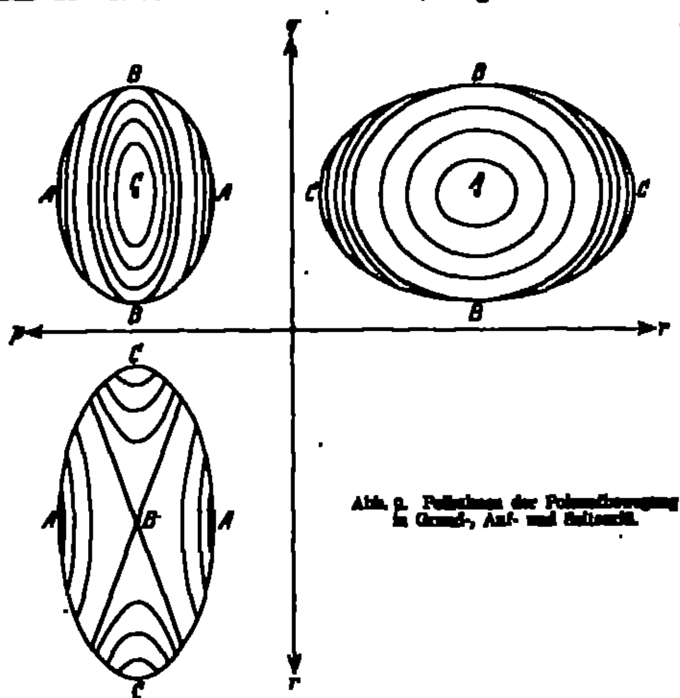


Abb. 9. Polbahnen der Poinsotbewegung in Grund-, Auf- und Seitenriß.

demnach die Schnittkurve des Poinsotellipsoids (1) mit dem ebenfalls körperfesten Schwungellipsoid (2), welches zu jenem koaxial ist.

Wird $\mathfrak{S}$ bei festgehaltenem T, also der anfängliche Drehstoß bei unveränderter Drehenergie abgeändert, so entsteht auf dem Poinsotellipsoid eine Schar von Durchdringungskurven mit dem Parameter $|\mathfrak{S}|$, deren rechtwinklige Projektionen auf die drei körperfesten Hauptträgheitsebenen die folgenden Gleichungen haben:

$$\left.\begin{aligned} B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2 &= 2AT - \mathfrak{S}^2, \\ C(B-C)r^2 - A(A-B)p^2 &= 2BT - \mathfrak{S}^2, \\ A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2 &= \mathfrak{S}^2 - 2CT. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Sie stellen Mittelpunktskegelschnitte dar; ihre Realität erfordert, wenn die Größenfolge $A > B > C$ festgesetzt wird, für $\mathfrak{S}^2$ die Beschränkung

$$2AT \geq \mathfrak{S}^2 \geq 2CT, \tag{4}$$

womit die erste und dritte Schar als konzentrische, ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen, die mittlere Schar als konjugierte Hyperbeln samt ihren (für $\mathfrak{S}^2 = 2BT$ eintretenden) Asymptoten bestimmt sind. Abb. 9 stellt die Kurvenschar in

Grund-, Auf- und Seitenriß dar; die Projektionstafeln sind parallel zu den Hauptträgheitsebenen des Körpers. Abb. 10 gibt das räumliche Bild einiger Polbahnen auf dem Poinsotellipsoid. Sie bilden eine Schar von geschlossenen, doppeltsymmetrischen Raumkurven, welche die Hauptachse mit dem größten oder die mit dem kleinsten Trägheitsmoment umschlingen, je nachdem $\mathfrak{S}^2 \gtrless 2BT$ ist, und sich mit Annäherung von $\mathfrak{S}^2$ an die Werte $2AT$ bzw. $2CT$ in die entsprechenden beiden Scheitelpunkte des Poinsotellipsoids zusammenziehen. Man nennt die Poinsotbewegung im zweiten Falle epizykloidisch, im ersten perizykloidisch. Den beiden Hyperbelasymptoten entsprechen zwei ebene Kurven, die sich im Endpunkt der mittleren Hauptachse begegnen und kongruente Ellipsen vorstellen; sie trennen die beiden Scharen der Polkurven, die den epi- und perizykloidischen Bewegungen zugehören, und für den Neigungswinkel α ihrer Ebenen gegen die Achse des größten Trägheitsmoments gilt nach der zweiten Gleichung (3)

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{A}{C}\,\frac{A-B}{B-C}}. \qquad (5)$$

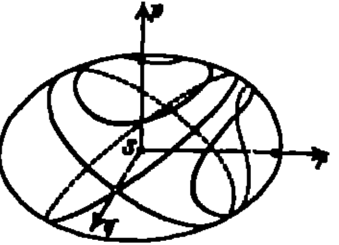


Abb. 10. Polbahnen der Poinsotbewegung in perspektivischer Darstellung.

Die beiden Grenzfälle $\mathfrak{S}^2 = 2AT$, also $q = r = 0$ und $\mathfrak{S}^2 = 2CT$, also $p = q = 0$, sowie der kritische Zwischenfall $\mathfrak{S}^2 = 2BT$, also $p = r = 0$ bedeuten die permanenten Drehungen um die drei Hauptachsen mit fester Winkelgeschwindigkeit, und man nennt die drei Hauptträgheitsachsen daher wohl auch freie Drehachsen. Man schließt aus dem Charakter der benachbarten Polkurven, daß die permanenten Drehungen um die Achse des größten und kleinsten Trägheitsmoments stabil, die um die Achse der mittleren labil ist. Diese Eigenschaft läßt sich qualitativ leicht an kleinen, in die Luft geschleuderten dreiachsigen Körpern wahrnehmen.

Um auch über das Aussehen der Spurkurven in der unveränderlichen Ebene Klarheit zu bekommen, fügt man den Gleichungen (1) und (2) noch die Identität

$$p^2 + q^2 + r^2 = \varrho^2$$

hinzu und löst diese Gleichungen auf nach

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= \frac{BC}{(A-B)(A-C)}\,(\varrho^2 - \varrho_1^2), \\ q^2 &= \frac{CA}{(B-C)(B-A)}\,(\varrho^2 - \varrho_2^2), \\ r^2 &= \frac{AB}{(C-A)(C-B)}\,(\varrho^2 - \varrho_3^2), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\varrho_1^2 = \frac{2(B+C)T - \mathfrak{S}^2}{BC}, \qquad \varrho_2^2 = \frac{2(C+A)T - \mathfrak{S}^2}{CA}, \qquad \varrho_3^2 = \frac{2(A+B)T - \mathfrak{S}^2}{AB}. \quad (7)$$

Diese Größen ϱ_i^2 sind infolge der Ungleichung (4) und wegen der für die Trägheitsmomente allgemein gültigen Bedingung[1] $B + C > A$ wesentlich positiv, und zwar folgt aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \varrho_2^2 - \varrho_3^2 &= \frac{B-C}{ABC}\,(2AT - \mathfrak{S}^2), \\ \varrho_3^2 - \varrho_1^2 &= \frac{C-A}{ABC}\,(2BT - \mathfrak{S}^2), \\ \varrho_1^2 - \varrho_2^2 &= \frac{A-B}{ABC}\,(2CT - \mathfrak{S}^2), \end{aligned}$$

[1] Siehe Kap. 6, Ziff. 23 ds. Bd. des Handb.

daß mit Beachtung der Größenfolge $A > B > C$ jeweils v_3^2 der größte der drei Werte v_i^2 und außerdem $v_1^2 \lessgtr v_2^2$ ist, je nachdem $\mathfrak{S}^2 \lessgtr 2BT$ bleibt, d. h. je nachdem die Poinsotbewegung epi- oder perizykloidisch verläuft. Jetzt schließt man aus der Realität der Größen p, q und r in (6) vollends leicht, daß immer

$$v^2 \leqq v_3^2 \quad \text{und außerdem} \quad v^2 \geqq \begin{Bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{Bmatrix}, \quad \text{je nachdem} \quad \mathfrak{S}^2 \lessgtr 2BT. \tag{8}$$

Nach Abb. 8 ist der Abstand $OP = \varrho$ des Berührpunktes P des Poinsotellipsoids von der Schwungachse bestimmt durch die Gleichung

$$\varrho^2 = v^2 - \varkappa^2;$$

den beiden Grenzwerten (8) von v^2 entsprechen zwei Grenzwerte von ϱ^2, nämlich

$$\varrho_3^2 = v_3^2 - \varkappa^2 \quad \text{und} \quad \varrho_1^2 = v_1^2 - \varkappa^2 \quad \text{bzw.} \quad \varrho_2^2 = v_2^2 - \varkappa^2. \tag{9}$$

Die Spurbahn ist daher eine zwischen zwei konzentrischen Kreisen um O vom größeren Halbmesser ϱ_3 und vom kleineren ϱ_1 bzw. ϱ_2 (je nachdem $\mathfrak{S}^2 \lessgtr 2BT$)

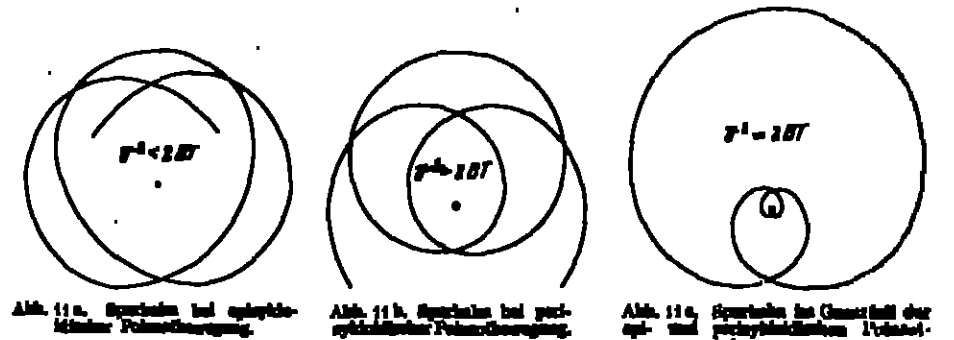


Abb. 11a. Spurbahn bei epizykloidischer Poinsotbewegung. Abb. 11b. Spurbahn bei perizykloidischer Poinsotbewegung. Abb. 11c. Spurbahn im Grenzfall der epi- und perizykloidischen Poinsotbewegung.

hin und her laufende Linie, die sich zwar im allgemeinen nicht schließt — der Kreisel kehrt im allgemeinen nie in seine Anfangslage zurück —, aber in lauter kongruenten Zweigen wiederholt (Abb. 11a u. b). Im Falle $\mathfrak{S}^2 = 2BT$ der trennenden Polbahn wird $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, wie man aus Ziff. 12, Gleichung (1) folgert, und daher die Spurbahn eine Spirale mit O als asymptotischem Punkt (Abb. 11c). Im übrigen haben die Spurbahnen im Gegensatz zu Poinsots ursprünglicher Meinung keine Wendepunkte, wie Hess[1]) nachgewiesen hat.

Neben Pol- und Spurbahn sind noch von Bedeutung die **Schwungbahnen** (auch **Impulskurven** genannt), welche der Endpunkt des raumfesten Schwungvektors $\mathfrak{S}$ im Kreisel beschreibt. Sie sind die Schnittlinien des MacCullagh-ellipsoids Ziff. 12, Gleichung (3)

$$\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C} = 2T$$

und der Kugel

$$L^2 + M^2 + N^2 = \mathfrak{S}^2.$$

Ihr Aussehen ist ungefähr vom Charakter der Polbahnen; auf eine nähere Diskussion sei hier verzichtet.

Verbindet man die Punkte der Pol- und Spurbahn durch Gerade mit dem Schwerpunkt, so entstehen der **Pol- und Spurkegel**, und die Poinsotbewegung

[1]) W. Hess, Math. Ann. Bd. 27, S. 465 u. 568. 1886; vgl. auch G. Mannoury, Bull. des sciences math. (2) Bd. 19, 1, S. 282. 1895, sowie L. Lecornu, Bull. math. de France Bd. 34, S. 40. 1906.

stellt sich dann auch dar als ein gleitfreies Abrollen des körperfesten Polkegels auf dem raumfesten Spurkegel[1]).

14. Der kräftefreie symmetrische Kreisel. Wenn das Trägheitsellipsoid des Schwerpunkts und mit ihm auch das Poinsotellipsoid, das MacCullaghellipsoid sowie das Schwungellipsoid Umdrehungskörper werden, so nennt man den Kreisel symmetrisch, die Symmetrieachse seine Figurenachse und die darauf senkrechte Hauptträgheitsebene die Äquatorebene. Die Polbahn und die Spurbahn sind zwei Kreise; der Pol- und Spurkegel sind Kreiskegel geworden, der erste mit der Figurenachse als Achse, der zweite mit dem Schwungvektor $\mathfrak{S}$ als Achse. Rollt der Polkegel auf dem Spurkegel ab, so beschreibt auch die Figurenachse einen Kegel, den Präzessionskegel. Das Abrollen erfolgt mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Man nennt diese (allgemeinste) Bewegung des symmetrischen kräftefreien Kreisels eine reguläre Präzession. Abb. 12a und b geben eine Vorstellung von dieser Bewegung im epi- und perizykloidischen Falle. Während aber beim unsymmetrischen Kreisel das epi- oder perizykloidische Gepräge der Bewegung vom Anfangsstoß $\mathfrak{S}$ abhängt, so kann der symmetrische Kreisel mit gestrecktem Trägheitsellipsoid nur eine epizykloidische, derjenige mit abgeplattetem nur eine perizykloidische reguläre Präzession vollziehen.

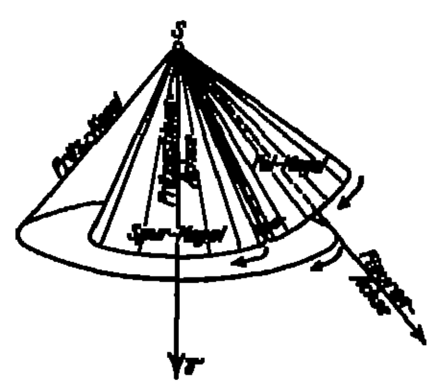


Abb. 12a. Epizykloidische reguläre Präzession.

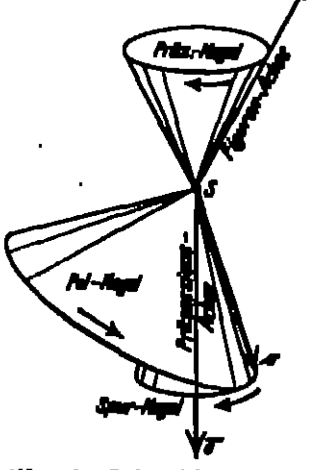


Abb. 12b. Perizykloidische reguläre Präzession.

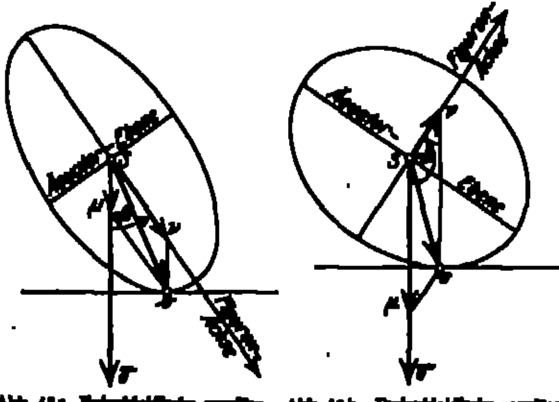


Abb. 13a. Epizykloidische reguläre Präzession. Abb. 13b. Perizykloidische reguläre Präzession.

Nennt man nämlich μ und ν (Abb. 13a u. b) die Präzessionsgeschwindigkeit und die Eigendrehgeschwindigkeit (als Vektoren in der Achse $\mathfrak{S}$ und

[1]) Man vergleiche die diesbezüglichen Modelle von H. Grassmann d. J., ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 48, S. 329. 1903. Weitere Modelle sind in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1. S. 612f. aufgezählt.

in der Figurenachse aufgetragen), so wirft der Drehvektor $\mathfrak{o}$ in die Äquatorebene die Komponente $p = \mu \sin\vartheta$, in die Figurenachse die Komponente $r = \mu\cos\vartheta + \nu$, falls ϑ der Winkel zwischen den Vektoren μ und ν ist. Die zugehörigen Schwungkomponenten L und N sind mit dem „äquatorialen" Trägheitsmoment A und dem „axialen" Trägheitsmoment C verbunden durch

$$L = A\mu\sin\vartheta \qquad \text{und} \qquad N = C(\mu\cos\vartheta + \nu).$$

Da andererseits auch $L = |\mathfrak{S}|\sin\vartheta$ und $N = |\mathfrak{S}|\cos\vartheta$ ist, so folgt

$$A\mu = |\mathfrak{S}|, \qquad C\nu = (A - C)\mu\cos\vartheta. \tag{1}$$

Diese Gleichungen erlauben, die Elemente μ und ν der regulären Präzession aus dem Anfangsstoß $\mathfrak{S}$ zu berechnen und zeigen, daß in der Tat beim gestreckten Trägheitsellipsoid ($C < A$) die Bewegung mit $|\vartheta| < 90°$ episykloidisch, beim abgeplatteten ($C > A$) mit $|\vartheta| > 90°$ perisykloidisch sein muß. Die zweite Gleichung (1) wählt überdies aus den kinematisch überhaupt denkbaren regulären Präzessionen diejenigen aus, die dynamisch möglich sind. (So erweisen sich z. B. alle hyposykloidischen Bewegungen, d. h. solche, bei denen der Polkegel im Inneren des Spurkegels abrollen würde, als dynamisch unmöglich.)

Im Grenzfalle kann der Polkegel auf die Figurenachse zusammenschrumpfen, und man folgert daraus, daß die Figurenachse sowohl beim gestreckten als beim abgeplatteten symmetrischen Kreisel eine permanente stabile Drehachse ist. Die tremende Polbahn bildet jetzt den Äquator; daher ist jede äquatoriale Achse eine permanente labile Drehachse.

15. Der kräftefreie Kugelkreisel. Sind alle Trägheitsmomente des Schwerpunkts gleich ($A = B = C$), so wird $\nu = 0$, und daher besteht die allgemeinste kräftefreie Bewegung eines solchen sog. Kugelkreisels aus einer gleichförmigen Drehung um die Schwungachse. Erst in diesem speziellsten Falle nimmt die reine Trägheitsbewegung der Drehung eines starren Körpers dasselbe einfache Gepräge an, das die reine Trägheitsbewegung des Fortschreitens bei jedem starren Körper von vornherein besitzt.

16. Analytische Darstellung der Bewegung. Während die Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels durch die Formeln (1) von Ziff. 14 analytisch vollständig dargestellt ist, muß man im Falle des unsymmetrischen kräftefreien Kreisels auf die Eulerschen Gleichungen (12) von Ziff. 4 zurückgreifen, in denen jetzt $M_x' = M_y' = M_z' = 0$ und ebenso $R_{ax}' = R_{ay}' = R_{az}' = 0$ zu nehmen ist. Diese Gleichungen werden mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen[1]) folgendermaßen integriert[2]):

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0 \operatorname{dn} \sigma(t - t_0), \\ q &= s \operatorname{sn} \sigma(t - t_0), \\ r &= r_0 \operatorname{cn} \sigma(t - t_0). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierbei sind p_0, s, r_0 und σ vier sogleich zu deutende Konstanten, und t_0 ist offensichtlich einer der Zeitpunkte, wo $q = 0$ wird, also der Drehvektor in die Hauptebene fällt, die auch die Komponenten p und r enthält. Sehen wir die ebenfalls zu diesem Zeitpunkt gehörigen Werte p_0 und r_0 dieser Komponenten als gegeben an, so folgt durch Einsetzen der Integrale (1) in die Eulerschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma^2 &= p_0^2 \frac{A - C}{B} \frac{A - B}{C}, \\ s^2 &= r_0^2 \frac{C}{B} \frac{A - C}{A - B}, \\ k^2 &= \frac{r_0^2}{p_0^2} \frac{C}{A} \frac{B - C}{A - B}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. Bd. III ds. Handb. oder die Lehrbücher der elliptischen Funktionen.

[2]) Natürlich könnte man in den Integralen (1) auch eine Vertauschung der Funktionen dn, sn, cn vornehmen und müßte dann die folgende Diskussion entsprechend ändern.

wo k der Modul der elliptischen Funktionen ist. Damit σ^2, s^2 und k^2 positiv, σ, s und k also reell seien, muß bei verschieden vorausgesetzten Hauptträgheitsmomenten entweder

$$A > B > C \tag{3}$$

oder

$$A < B < C \tag{4}$$

sein; und da die zweite der drei Eulerschen Gleichungen mit den Lösungen (1) die Identität

$$\frac{s\sigma}{p_0 r_0} = \frac{C - A}{B}$$

liefert, so folgt für das noch offene Vorzeichen des Produktes $s\sigma$ die Regel, daß $s\sigma$ das gleiche oder das entgegengesetzte Vorzeichen von $p_0 r_0$ erhalten muß, je nachdem die Folge (4) oder (3) gilt. Da der Modul k ein echter Bruch sein soll, so muß überdies

$$\frac{r_0^2}{p_0^2} \leq \frac{A}{C}\,\frac{A - B}{B - C} \tag{5}$$

bleiben, und dies besagt im Hinblick auf Ziff. 15, Gleichung (5), daß man im Falle einer epizykloidischen Bewegung die Rangordnung (4), im Falle einer perizykloidischen die Rangordnung (3) zugrunde legen muß.

Mit den Komponenten p, q, r hat man auch die Länge des Drehvektors $\mathfrak{o}$ vermöge

$$\mathfrak{o}^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

als Funktion der Zeit gefunden, ausgedrückt durch die Jacobischen elliptischen Funktionen. Statt dessen kann man auch die hieraus folgende Identität

$$\mathfrak{o}\dot{\mathfrak{o}} = p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r}$$

mit den Eulerschen Gleichungen (12) von Ziff. 4 verknüpfen und hat dann

$$\mathfrak{o}\dot{\mathfrak{o}} = pqr\left[\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right] = -\frac{pqr}{ABC}(B-C)(C-A)(A-B)$$

oder im Hinblick auf Ziff. 15, Gleichung (6),

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\mathfrak{o}^2}{dt} = \sqrt{(\mathfrak{o}_1^2 - \mathfrak{o}^2)(\mathfrak{o}_2^2 - \mathfrak{o}^2)(\mathfrak{o}_3^2 - \mathfrak{o}^2)}\,. \tag{6}$$

Diese Differentialgleichung wird durch die Weierstraßsche $\wp$-Funktion gelöst[1]) und zeigt nebenbei, daß die beiden Grenzkreise (Ziff. 15) von der Spurkurve berührt werden.

Hat man hiernach durch Integration und Funktionsumkehrung $\mathfrak{o}^2$ als Funktion der Zeit gefunden:

$$\mathfrak{o}^2 = \Omega(t)\,, \tag{7}$$

so ist nach Ziff. 15, Gleichung (6), auch der zeitliche Verlauf der Drehkomponenten p, q, r bekannt:

$$p = P(t)\,, \qquad q = Q(t)\,, \qquad r = R(t)\,. \tag{8}$$

Die Integrale (8) sind den Integralen (1) natürlich vollkommen äquivalent.

Zur vollständigen Ermittlung des Bewegungsvorganges genügen die bisherigen kinetischen Gleichungen noch nicht, da sie nur die körperfesten Geschwindigkeitskomponenten p, q, r von $\mathfrak{o}$, nicht aber die Lage des Kreisels im Raume bestimmen. Hierzu ist nötig, die Stellung der körperfesten, mit den

[1]) Vgl. Bd. III ds. Handb. oder die Lehrbücher der elliptischen Funktionen.

Hauptträgheitsachsen des Schwerpunkts zusammenfallenden Achsen x, y, z gegen ein durch den Schwerpunkt gelegtes raumfestes System x', y', z' zu ermitteln. Sind die Richtungskosinusse des einen Achsenkreuzes gegen das andere durch das Schema

	x	y	z
x'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

dargestellt, so bildet die Matrix $\|a_{ik}\|$ die Elemente eines Drehaffinors oder Versors Φ. Diese Richtungsfaktoren unterliegen den sechs Bedingungen

$$\sum_k a_{ik}^2 = 1, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sum_k a_{ik} a_{jk} = 0, \qquad (i, j = 2, 3; 3, 1; 1, 2)$$

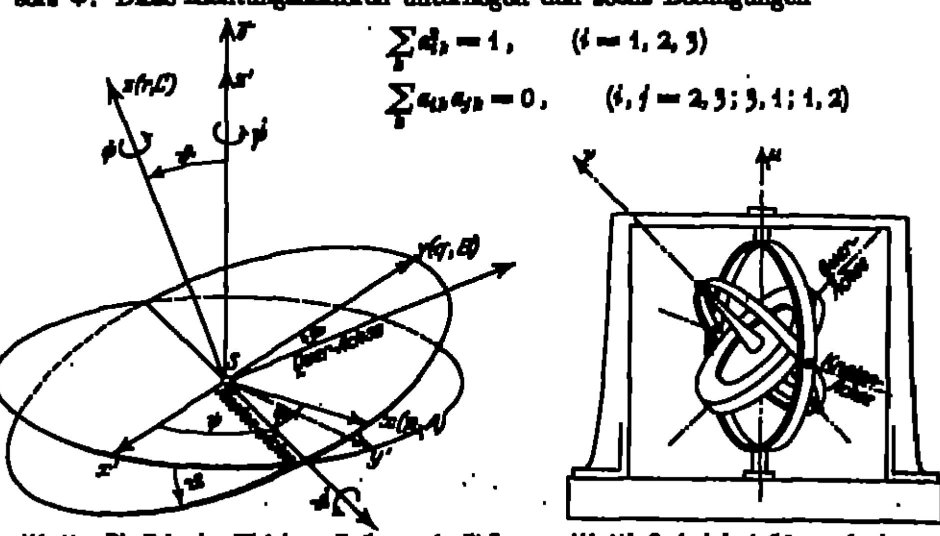


Abb. 14a. Die Eulerschen Winkel zur Festlegung der Stellung eines starren Körpers.

Abb. 14b. Cardanische Aufhängung des starren Körpers.

welche die Vektoren des Versors als Einheitsgrößen und ihre Rechtwinkligkeit ausdrücken, so daß nur drei von den Elementen a_{ik} unabhängig voneinander sind.

Als drei von vornherein unabhängige ortsbestimmende Koordinaten sind von den Mathematikern verschiedene Größen ersonnen worden (Euler, Rodrigues, Klein u. a.); in der Regel dienen dazu die **Eulerschen Winkel** ϑ, φ, ψ, die allerdings unsymmetrisch sind. Sie sind durch Abb. 14a definiert, worin wir mit Rücksicht auf die jetzige Anwendung die $x'y'$-Ebene parallel zur unveränderlichen Ebene gewählt haben, so daß die positive z'-Achse mit der Schwungachse zusammenfällt. Die Eulerschen Winkel sind kinematisch unmittelbar verwirklicht in der **Cardanischen Aufhängung** (Abb. 14b). Die Schnittlinie der xy-Ebene mit der $x'y'$-Ebene heißt (mit Rücksicht auf astronomische Anwendungen) die **Knotenachse**, die darauf senkrechte Gerade der xy-Ebene die **Querachse**.

Man findet für die a_{ik}, ausgedrückt in den ϑ, φ, ψ, wenn man Knoten-, Quer- und z'-Achse als rechtwinkliges Zwischensystem benutzt und den Kosinussatz für rechtwinklige sphärische Dreiecke anwendet:

	x	y	z	
x'	$\cos\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi$	$-\sin\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi$	$\sin\vartheta\sin\psi$	(9)
y'	$\cos\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi$	$-\sin\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi$	$-\sin\vartheta\cos\psi$	
z'	$\sin\vartheta\sin\varphi$	$\sin\vartheta\cos\varphi$	$\cos\vartheta$	

Die holonomen Eulerschen Geschwindigkeitskoordinaten $\dot\vartheta, \dot\psi, \dot\varphi$ hängen mit den nichtholonomen[1]) Drehkomponenten p, q, r laut Abb. 14a zusammen durch

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot\vartheta\cos\varphi + \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi, \\ q &= -\dot\vartheta\sin\varphi + \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi, \\ r &= \dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} \dot\vartheta &= p\cos\varphi - q\sin\varphi, \\ \dot\varphi &= r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\vartheta, \\ \dot\psi &= \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\vartheta}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Um nun vollends den zeitlichen Verlauf der Eulerschen Winkel zu erhalten, beachtet man, daß die Schwungkomponenten sich in dem Anfangsstoß $\mathfrak{S}$ und den Eulerschen Winkeln gemäß Abb. 14a, wie folgt, ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv Ap = |\mathfrak{S}|\sin\vartheta\sin\varphi, \\ M &\equiv Bq = |\mathfrak{S}|\sin\vartheta\cos\varphi, \\ N &\equiv Cr = |\mathfrak{S}|\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Mithin wird

$$\cos\vartheta = \frac{C}{|\mathfrak{S}|}r, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A}{B}\frac{p}{q}. \tag{13}$$

Der Winkel ψ schließlich folgt aus der dritten Gleichung (11), wenn man dort die aus (12) zu entnehmenden Quotienten

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} = \frac{|\mathfrak{S}|Ap}{\mathfrak{S}^2 - C^2r^2}, \qquad \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} = \frac{|\mathfrak{S}|Bq}{\mathfrak{S}^2 - C^2r^2}$$

einsetzt, zu

$$\psi - \psi_0 = |\mathfrak{S}|\int_{t_0}^{t}\frac{Ap^2 + Bq^2}{\mathfrak{S}^2 - C^2r^2}\,dt,$$

welchen Ausdruck man durch Einführung der doppelten Drehenergie

$$2T = Ap_0^2 + Cr_0^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \tag{14}$$

noch in den etwas einfacheren

$$\psi - \psi_0 = |\mathfrak{S}|\int_{t_0}^{t}\frac{2T - Cr^2}{\mathfrak{S}^2 - C^2r^2}\,dt \tag{15}$$

verwandeln kann. Überdies mag man in (13) und (15) auch noch den Schwung durch seine Anfangskomponenten Ap_0 und Cr_0 ausdrücken:

$$\mathfrak{S}^2 = A^2p_0^2 + C^2r_0^2. \tag{16}$$

Da der zeitliche Verlauf der Drehkomponenten p, q, r entweder durch die Integrale (1) oder durch die Integrale (8) als bekannt anzusehen ist, so liefern die Gleichungen (13) und (15) die Raumlagen des Kreisels als Funktionen der Zeit, womit die Poinsotbewegung auch analytisch vollständig bestimmt ist[2]).

[1]) Vgl. Kap. 2, Ziff. 4 ds. Bd. des Handb.
[2]) Einige charakteristische Eigenschaften der Poinsotbewegung, die aus dem aufgestellten Formelkomplex abgeleitet werden können, findet man bei M. Winkelmann, Zur Theorie des Maxwellschen Kreisels, S. 36. Diss. Jena 1904.

Zur zahlenmäßigen Berechnung der Bewegung sind freilich die Integrale (13) und (15) nicht bequem. Hierzu eignen sich wesentlich besser die von KLEIN[1]) eingeführten komplexen Stellungsparameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche durch die Gleichungen definiert sind

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cos\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}, & \beta &= i\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(-\varphi+\psi)}{2}},\\ \gamma &= i\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}}, & \delta &= \cos\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{i(-\varphi-\psi)}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

und die Beziehung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

erfüllen. Sie hängen, wie man durch Ausrechnen und Vergleichen mit dem Schema (9) feststellt, mit den Richtungsfaktoren a_{ij} der körperfesten gegen die raumfesten Achsen zusammen durch

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} + i a_{21} = \alpha^2 - \beta^2, && a_{12} + i a_{22} = i(\alpha^2 + \beta^2), && a_{13} + i a_{23} = -2\alpha\beta,\\ &a_{31} = -\alpha\gamma + \beta\delta, && a_{32} = -i(\alpha\gamma + \beta\delta), && a_{33} = \alpha\delta + \beta\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die zeitlichen Änderungen $\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma, \dot\delta$ drücken sich nach (10) in den Drehkomponenten p, q, r aus, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} 2\dot\alpha &= i r\alpha + (ip + q)\beta, & 2\dot\beta &= (ip - q)\alpha - i r\beta,\\ 2\dot\gamma &= i r\gamma + (ip + q)\delta, & 2\dot\delta &= (ip - q)\gamma - i r\delta. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Setzt man hier die durch (6) bis (8) gegebenen Integrale p, q, r ein, so lassen sich die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sehr elegant durch rasch konvergierende Θ-Reihen[2]) als Funktionen der Zeit darstellen, und dasselbe gilt dann auch von den aus ihnen gemäß (18) ableitbaren Richtungsfaktoren a_{ij}.

Will man nachträglich wieder zu den anschaulichen Eulerschen Winkeln übergehen, so hat man nach (17)

$$\cos\vartheta = \alpha\delta + \beta\gamma, \qquad e^{2i\varphi} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}, \qquad e^{2i\psi} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} \tag{20}$$

und kann so die Bewegung verhältnismäßig bequem zahlenmäßig verfolgen.

17. Die Bewegung im Falle der trennenden Polbahn. Hier lassen sich die Integrale von Ziff. 16 elementar auswerten. Da in der dortigen Formel (5) nunmehr das Gleichheitszeichen gilt, so wird der Modul $k^2 = 1$, und damit geht die elliptische Funktion sn über in die Hyperbelfunktion $\mathfrak{Tg}$; außerdem wird dn $=$ cn $= 1/\mathfrak{Cof}$. Ferner wird $s^2 = \mathfrak{S}^2/B^2$, wie man auf Grund der Bedingungsgleichung $\mathfrak{S}^2 = 2BT$ für die trennende Polbahn zusammen mit der Gleichung (4) von Ziff. 16 bestätigt. Weiter findet man ebenso, daß

$$\sigma^2 = s^2\frac{(A-B)(B-C)}{AC} \tag{1}$$

geworden ist.

Da man jetzt das Augenmerk auf die Bewegung der Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments B richtet, so empfiehlt es sich, in Abb. 14a eine zyklische

---

[1]) F. KLEIN, Göttinger Nachr. 1896, S. 3; vgl. auch F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, S. 21ff; ferner F. LÖTTGEMANN, Die Bewegung der Hauptträgheitsachsen des allgemeinen kräftefreien Kreisels. Diss. Münster 1924. Eine andere symmetrische Lösungsmethode hat (im Anschluß an DARBOUX) A. MAYER, Leipziger Ber. März 1902 entwickelt.

[2]) Vgl. F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, S. 454–475.

Vertauschung von A, B, C gegen C, A, B und von p, q, r gegen r, p, q vorzunehmen; diese äußert sich dann natürlich auch in den Formeln (13) und (15) von Ziff. 16, für die wir nach den soeben gemachten Feststellungen also schreiben müssen:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{Bq}{|\mathfrak{S}|} = \mathfrak{T}\mathfrak{g}\,\sigma(t-t_0), \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{C r_0}{A p_0} = \text{konst.}, \\ \dot\psi &= \frac{|\mathfrak{S}|}{B} = \text{konst.} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Deutung dieser Formeln ist einfach: Die zweite sagt aus, daß die Knotenachse körperfest geworden ist; die dritte, daß sich die Knotenachse mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Schwungachse dreht; die erste, daß sich die mittlere Hauptachse (die zur Zeit t_0 senkrecht zur Schwungachse stand) der Schwungachse asymptotisch nähert. Ein Punkt der mittleren Hauptachse im Abstand 1 vom Schwerpunkt beschreibt also auf einer Einheitskugel um den Schwerpunkt, deren Pole die Durchstoßpunkte der Schwungachse bilden, eine spiralige Kurve, die sich um die beiden Pole unendlich oft herumwindet und bei genauerer geometrischer Untersuchung als Loxodrome erweist (d. h. alle Meridiankreise unter demselben Winkel trifft).

18. Konjugierte Poinsotbewegungen. Man nennt zwei Poinsotbewegungen konjugiert[1]) zueinander, wenn ihre Polbahnen kongruent sind und mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufen werden. Da die Gleichungen (1) und (2) von Ziff. 13 der Polbahn und die Eulerschen Gleichungen der kräftefreien Bewegung [Ziff. 4, Gleichung (12)] sich nicht ändern, wenn die fünf Größen A, B, C, T, $|\mathfrak{S}|$ im selben Verhältnis verändert werden, so sind solche Poinsotbewegungen $(T, \mathfrak{S})$ von solchen Kreiseln (A, B, C), die die gleiche Proportion $A:B:C:T:|\mathfrak{S}|$ erfüllen, zueinander konjugiert, ja sogar identisch [wie Ziff. 12, Gleichung (1) zeigt], falls man die Raumstellung des Schwungvektors ungeändert läßt.

Es ist aber bemerkenswert, daß es außer dieser Schar von identischen konjugierten Poinsotbewegungen noch eine zweite Schar dazu konjugierter und nicht mit der ersten Schar identischer Poinsotbewegungen gibt, die zu einer anderen Proportion $A':B':C':T'|\mathfrak{S}'|$ gehören. Diese zweite Schar erhält man, wenn man beachtet, daß die Polbahngleichungen auch ungeändert bleiben, wenn man p, q, r durch $p' = -p$, $q' = -q$, $r' = -r$ ersetzt, also zu dem zweiten Ast der Polbahn übergeht, der mit dem ersten kongruent ist (vgl. Abb. 10 von Ziff. 13). Nun sind freilich die Eulerschen Gleichungen der Bewegung gegenüber einer solchen Vertauschung von o gegen $-o'$ nicht unempfindlich; sie bleiben vielmehr nur dann richtig, wenn man gleichzeitig die Trägheitsmomente A, B, C durch solche A', B', C' ersetzt, welche die Gleichungen

$$\frac{B'-C'}{A'} = -\frac{B-C}{A}, \qquad \frac{C'-A'}{B'} = -\frac{C-A}{B}, \qquad \frac{A'-B'}{C'} = -\frac{A-B}{C} \tag{1}$$

erfüllen. Damit auch die Gleichungen der Polbahn gegenüber dieser Vertauschung der Trägheitsmomente unverändert bleiben, muß man, wie aus ihrer Form (5) von von Ziff. 13 folgt, auch die Bewegungsparameter T und $|\mathfrak{S}|$ in neue Parameter T' und $|\mathfrak{S}'|$ umwandeln, die mit den früheren durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{2A'T'-\mathfrak{S}'^2}{B'C'} = -\frac{2AT-\mathfrak{S}^2}{BC}, \qquad \frac{2B'T'-\mathfrak{S}'^2}{C'A'} = -\frac{2BT-\mathfrak{S}^2}{CA}, \\ \frac{2C'T'-\mathfrak{S}'^2}{A'B'} = -\frac{2CT-\mathfrak{S}^2}{AB} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1]) Vgl. F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 476, sowie E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. II, S. 126.

zusammenhängen. Die sechs Gleichungen (1) und (2), unter denen übrigens nur fünf voneinander unabhängig sind, ergeben aufgelöst

$$\left.\begin{aligned} A' = \varrho A(B+C-A), \quad B' = \varrho B(C+A-B), \quad C' = \varrho C(A+B-C), \\ T' = \varrho[(A+B+C)T - \mathfrak{S}^2], \\ \mathfrak{S}'^2 = \varrho^2\{8ABCT - [A(B+C-A) + B(C+A-B) + C(A+B-C)]\mathfrak{S}^2\}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wobei ϱ eine willkürliche reelle Zahl ist, die man positiv wählen muß.

Die so gefundene Schar von konjugierten Poinsotbewegungen ist von der ursprünglichen stets verschieden (außer in dem trivialen Falle $A = B = C$, wo sie mit jener identisch wird). Daß sie aber auch stets verwirklichbar ist, kann man leicht einsehen. Wegen der für Trägheitsmomente gültigen Ungleichungen $B + C > A$ usw. sind nämlich nach den drei ersten Gleichungen (3) auch die neuen Trägheitsmomente A', B', C' positive Größen; und auch sie erfüllen die für Trägheitsmomente reeller Körper immer nötigen Ungleichungen $B' + C' > A'$ usw., wie man aus den Gleichungen (3) durch Auflösen nach

$$B' + C' - A' = \varrho(C + A - B)(A + B - C)$$

usw. findet. Um nachzuweisen, daß auch die neuen Parameter T' und $\mathfrak{S}'^2$ positiv sind, wie es eine reelle Bewegung verlangt, schreiben wir die Ungleichung (4) von Ziff. 13 in der Form

$$\mathfrak{S}^2 = 2AT - s^2,$$

wo s eine reelle Zahl ist, und führen dies in die beiden letzten Gleichungen (3) ein; so kommt in der Tat

$$T' = \varrho[(B + C - A)T + s^2] > 0,$$
$$\mathfrak{S}'^2 = \varrho^2[(B + C - A)^2\mathfrak{S}^2 + 4BCs^2] > 0.$$

Weiter schließt man aus den Gleichungen (3), daß, wenn für die alten Trägheitsmomente die Folge $A > B > C$ gilt, die neuen die Rangordnung $A' < B' < C'$ besitzen. Endlich zeigt die zweite der Gleichungen (2), daß der Ausdruck $2B'T' - \mathfrak{S}'^2$ immer das entgegengesetzte Vorzeichen des Ausdruckes $2BT - \mathfrak{S}^2$ hat, und dies besagt nach Ziff. 13, daß, wenn die eine Schar von konjugierten Poinsotbewegungen dem epizykloidischen Bereich angehört, die andere Schar im perizykloidischen Bereiche liegt. Sollen beispielsweise zwei symmetrische kräftefreie Kreisel konjugierte, nicht identische Poinsotbewegungen vollziehen, so muß der eine ein gestrecktes, der andere ein abgeplattetes Trägheitsellipsoid haben[1]).

19. Der Einfluß der Reibung. Die Bewegungsform des idealen kräftefreien Kreisels wird in Wirklichkeit durch energieverzehrende Kräfte, wie Lagerreibung und Luftwiderstand, stark beeinträchtigt. Zunächst haben wir es mit der Lagerreibung zu tun, wobei wir uns auf die beim kräftefreien Kreisel meist verwendete Cardanische Aufhängung (vgl. Abb. 14b von Ziff. 16) beschränken. Die vollständige und erschöpfende Berücksichtigung der Reibung ist freilich formelmäßig kaum durchführbar. Immerhin gelingt es, durch einleuchtende Annahmen über die Art der Reibungskräfte ihren Einfluß auf den Charakter der Bewegung wenigstens abzuschätzen. Man begnügt sich dabei mit dem symmetrischen Kreisel und nimmt an, daß die Reibungsmomente R' und R'' in den Lagern der Figurenachse und der Lotachse (ursprünglichen Schwungachse) konstant und den Drehgeschwindigkeiten ν und μ entgegengesetzt und überdies sehr klein seien. Die Reibungsmomente setzen also die Eigendrehung ν und die Präzessionsdrehung μ

[1]) Über weitere zugeordnete Poinsotbewegungen (korrelativer, kontrarelativer Körper) s. E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. II, S. 138.

herab; geschieht dies für die beiden Größen μ und ν nicht proportional zueinander, so muß sich der Winkel ϑ gemäß der Präzessionsgleichung (1) von Ziff. 14 ändern. Man kann zeigen[1]), daß diese Änderung für schwache Reibung immer so erfolgt, daß der Winkel ϑ beim abgeplatteten Kreisel ($C > A$) gegen Null, beim gestreckten ($C < A$) gegen 90° strebt. Insbesondere kann die Lagerreibung so die Stabilität der stationären Drehung um die Figurenachse des gestreckten Kreisels bedrohen.

Qualitativ dasselbe Ergebnis findet man für den Einfluß des Luftwiderstandes. Freilich muß man hier noch summarischer verfahren, teils aus Mangel an experimentellen Kenntnissen, teils um die mathematischen Verwicklungen zu vermeiden, die mit der Heranziehung genauerer aerodynamischer Überlegungen verknüpft wären. Analog der Behandlung gedämpfter Pendelschwingungen wird ein dem augenblicklichen Drehvektor $\mathfrak{o}$ entgegengesetztes hemmendes Moment $-\varepsilon\mathfrak{o}$ angenommen[2]), obwohl die Größe dieses Momentes sicherlich viel eher dem Quadrat $\mathfrak{o}^2$ proportional sein muß. Die Eulerschen Gleichungen lauten dann für den symmetrischen Kreisel

$$
\begin{aligned}
A\dot{p} + (C-A)qr &= -\varepsilon p,\\
A\dot{q} + (A-C)rp &= -\varepsilon q,\\
C\dot{r} \qquad\qquad &= -\varepsilon r
\end{aligned}
$$

und liefern für die „axiale" Drehkomponente r und für die „äquatoriale" $s = \sqrt{p^2 + q^2}$ die Integrale

$$r = r_0 e^{-\frac{\varepsilon t}{C}}, \qquad s = s_0 e^{-\frac{\varepsilon t}{A}},$$

wo r_0 und s_0 die Anfangswerte sind. Der Neigungswinkel β zwischen Drehachse $\mathfrak{o}$ und Figurenachse gehorcht demnach der Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{s}{r} = \frac{s_0}{r_0} e^{\varepsilon\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)t} = \operatorname{tg}\beta_0 \cdot e^{\varepsilon\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)t}, \tag{1}$$

geht also in der Tat beim abgeplatteten Kreisel wieder gegen Null, beim gestreckten gegen 90°. Im ersten Falle verengert sich der Polkegel und zieht sich spiralig in die Figurenachse zusammen, im zweiten Falle breitet er sich fächerförmig in die Äquatorebene aus. Während die Bewegung theoretisch unendlich lang andauert, wird die Zahl der Umläufe des Drehvektors $\mathfrak{o}$ um die Figurenachse, also die Windungszahl des Spiralkegels in beiden Fällen endlich, nämlich[3]) gleich

$$\frac{|C-A|}{A}\,\frac{C}{\varepsilon}\,\frac{r_0}{2\pi}.$$

Beim Kugelkreisel findet keine Verlagerung der Drehachse statt; es nimmt lediglich die Drehung ab. Doch wird man diesem Ergebnis nur dann Vertrauen schenken dürfen, wenn auch die geometrische Gestalt des Kugelkreisels kugelsymmetrisch ist.

Die (trockene) Reibung im Gehänge des Prandtlschen Kreisels (Ziff. 11) hat LANGE[4]) wenigstens für den Fall des sonst kräftefreien, symmetrischen

[1]) R. GRAMMEL, Der Kreisel, S. 82.
[2]) Vgl. F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, S. 584; R. GRAMMEL, Der Kreisel, S. 86.
[3]) Siehe F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, S. 588.
[4]) F. LANGE, Beiträge zur Theorie des Prandtlschen Kreisels. Dissert. Jena 1921 (nicht gedruckt).

Kreisels, aber hinsichtlich der Unstetigkeiten des Kraftfeldes, die durch die Haftreibung herbeigeführt werden, teils streng, teils angenähert untersucht, indem er gesondert die Reibung im Lager der Figurenachse, in der Querachse des Wagebalkens und im Aufhängelager behandelte.

V. Der schwere symmetrische Kreisel.

20. Die Integrale der Bewegung. Wir schreiten nunmehr zur Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers, der in einem Punkte, dem Stützpunkt, festgehalten wird, sich aber um diesen Punkt unter der Wirkung von eingeprägten Kräften frei drehen kann. Wir beschränken uns vorerst auf die wichtigste eingeprägte Kraft, die Schwerkraft $\mathfrak{G}$. Hält man den Kreisel allerdings in seinem Schwerpunkt fest, so ist die Schwerkraft ohne Einfluß auf seine Poinsotbewegung. Ganz anders liegen die Verhältnisse, wenn der Stützpunkt nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Dann spricht man nach Ziff. 11 von einem schweren Kreisel. Die Stützkraft $\mathfrak{W}$ ist jetzt durch den Ausdruck (11) von Ziff. 4 (mit $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$) gegeben, aber erst bestimmbar, wenn die Bewegung selbst gefunden ist.

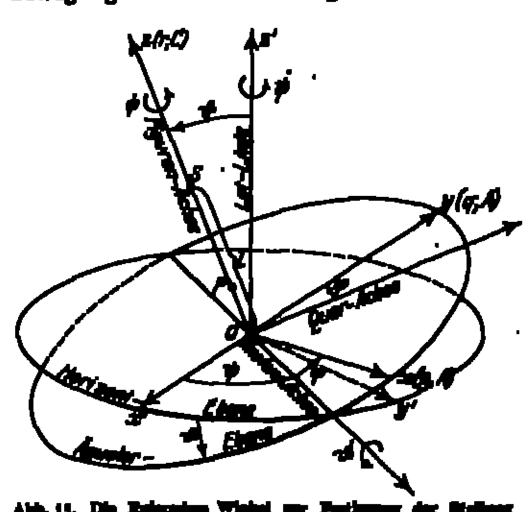


Abb. 15. Die Eulerschen Winkel zur Festlegung der Stellung eines schweren symmetrischen Kreisels.

Weiterhin haben wir es zunächst mit einem schweren symmetrischen Kreisel zu tun, d. h. mit einem im Stützpunkt O festgehaltenen starren Körper, der bezüglich O ein rotationssymmetrisches Trägheitsellipsoid hat und dessen Schwerpunkt auf der Rotationsachse dieses Ellipsoids im Abstand l_s vom Stützpunkt liegt. Dieser Fall ist von LAGRANGE behandelt worden. Man überträgt die Bezeichnungen Figurenachse und Äquatorebene ohne weiteres vom kräftefreien symmetrischen Kreisel (Ziff. 14) und nennt, wie dort, A das äquatoriale und C das axiale Trägheitsmoment. Die Raumstellung des Kreisels kann durch die in Abb. 15 definierten drei Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ angegeben werden. Die Drehungen $\dot\psi$ und $\dot\varphi$ entsprechen den in Ziff. 14 benutzten Größen μ und ν und heißen auch hier Präzessions- und Eigendrehgeschwindigkeit. Ein Punkt P auf der Figurenachse im Abstand 1 vom Stützpunkt O heißt die Kreiselspitze. Zur Abkürzung setzen wir beständig

$$\cos\vartheta = u, \qquad \sin\vartheta = v. \tag{1}$$

Anstatt von den Eulerschen Gleichungen (12) in Ziff. 4 auszugehen, worin jetzt M'_x usw. die Komponenten der Schwerkraft $\mathfrak{G}$ und R'_{0x} usw. gleich Null sind, mögen wir die Bewegungsgleichungen nach der Lagrangeschen Vorschrift[1])

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

[1]) Vgl. Kap. 2, Ziff. 9 ds. Bd. des Handb.

mit Hilfe der Bewegungsenergie T und des Potentials V der Schwere bilden. Beachtet man, daß das Mittelglied (7) von Ziff. 3 verschwindet, so hat man nach Ziff. 5, Gleichung (6) und Ziff. 16, Gleichungen (10)

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(\dot\vartheta^2 + \dot\psi^2 v^2) + C(\dot\varphi + \dot\psi u)^2 \qquad (2)$$

und außerdem

$$V = lGu. \qquad (3)$$

Da T und V nicht explizit von φ und ψ abhängen, so sind φ und ψ zyklische[1] Koordinaten. In der Tat lauten mit den zu φ und ψ gehörenden Impulskoordinaten

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = C(\dot\varphi + \dot\psi u), \qquad p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = A\dot\psi v^2 + C(\dot\varphi + \dot\psi u)u \qquad (4)$$

die beiden Lagrangeschen Gleichungen für die Koordinaten φ und ψ einfach

$$\dot p_\varphi = 0, \qquad \dot p_\psi = 0,$$

wonach die zyklischen Impulskoordinaten zeitlich konstant sind:

$$p_\varphi = N, \qquad p_\psi = N'. \qquad (5)$$

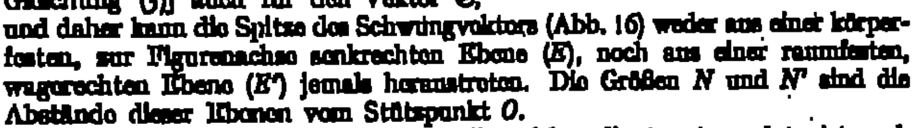


Abb. 16. Die Schwungkomponenten des schweren symmetrischen Kreisels.

Übrigens sind p_φ und p_ψ die senkrechten Projektionen des Schwungvektors $\mathfrak{S}$ auf die Figurenachse und auf die Lotlinie. Da die Drehkomponente in der Figurenachse gleich $r = \dot\varphi + \dot\psi u$, in der Querachse gleich $\dot\psi v$ ist, so kann man die Ausdrücke (4) auch unmittelbar anschreiben. Aber auch ihre Unveränderlichkeit ist leicht einzusehen; da der Vektor $\mathfrak{M}$ der Schwere $\mathfrak{G}$ sowohl auf der Figurenachse als auf der Lotlinie senkrecht steht, also in der Knotenachse liegt, so gilt dies wegen der Grundgleichung $\dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{M}$ [Ziff. 4, Gleichung (3)] auch für den Vektor $\dot{\mathfrak{S}}$, und daher kann die Spitze des Schwungvektors (Abb. 16) weder aus einer körperfesten, zur Figurenachse senkrechten Ebene (E), noch aus einer raumfesten, wagerechten Ebene (E') jemals heraustreten. Die Größen N und N' sind die Abstände dieser Ebenen vom Stützpunkt O.

Infolge der Unveränderlichkeit der Impulskoordinaten p_φ und p_ψ ist nach der allgemeinen Theorie der zyklischen Systeme die Elimination von $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ aus den Lagrangeschen Gleichungen möglich. Setzt man noch

$$\frac{N}{A} = n, \qquad \frac{N'}{A} = n', \qquad \frac{A - C}{C} = \varepsilon, \qquad \frac{lG}{A} = \sigma > 0, \qquad (6)$$

so folgt in der Tat aus (4) und (5)

$$\dot\varphi = n\varepsilon + \frac{n - n'u}{1 - u^2}, \qquad \dot\psi = \frac{n' - nu}{1 - u^2}, \qquad (7)$$

und damit können dann $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ aus der Bewegungsenergie entfernt werden.

Die Zahl ε mißt die Elliptizität des Kreisels, die Größe σ ist das auf A bezogene maximale Drehmoment der Schwere, welches bei wagerechter Lage

[1] Vgl. Kap. 2, Ziff. 11 ds. Bd. des Handb.

der Figurenachse wirklich erreicht wird; man kann σ das **reduzierte Stützpunktmoment** nennen.

Die beiden Gleichungen (5) sind erste Integrale der Bewegungsgleichungen. Ein drittes liefert das Energieprinzip [Ziff. 5, Gleichung (6)] $T + V = H$, wo H eine Konstante ist oder ausführlich nach (2) und (3), wenn man noch $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ aus (7) einsetzt und die Abkürzung

$$\frac{H}{A} = h \tag{8}$$

für die auf A bezogene Gesamtenergie benutzt,

$$\dot u^2 = U(u) \equiv (1 - u^2)[2h - n^2(\varepsilon + 1) - 2\sigma u] - (n' - nu)^2. \tag{9}$$

Die Funktion $U(u)$ ist eine ganze Funktion dritten Grades in u und soll die **Kreiselfunktion** heißen. Man hätte natürlich (9) auch durch direkte, allerdings umständliche Integration der gar nicht erst angeschriebenen dritten Lagrangeschen Gleichung für die Koordinate ϑ erhalten können[1]).

Für die drei Kreiselkoordinaten u, φ, ψ, von denen nun u, die Erhebung der Kreiselspitze über den Stützpunkthorizont, an die Stelle von ϑ gerückt ist, gelten gemäß (9) und (7) die drei Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{U}, \qquad d\varphi = n\varepsilon dt + \frac{n - n'u}{1 - u^2}\frac{du}{\sqrt{U}}, \qquad d\psi = \frac{n' - nu}{1 - u^2}\frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Ihre Integration hängt von der Ausführung der drei Quadraturen ab

$$t = \int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{U}}, \qquad \varphi - \varphi_0 = n\varepsilon t + \int_{u_0}^{u}\frac{n - n'u}{1 - u^2}\frac{du}{\sqrt{U}}, \qquad \psi - \psi_0 = \int_{u_0}^{u}\frac{n' - nu}{1 - u^2}\frac{du}{\sqrt{U}}, \tag{10}$$

wobei u_0, φ_0 und ψ_0 die Werte der Koordinaten für $t = 0$ sein sollen. Auf die rein mathematische Auswertung und Umkehrung dieser elliptischen Integrale, die offenbar die Verallgemeinerung der Integrale des punktförmigen Kugelpendels[2]) darstellen, brauchen wir auch hier um so weniger einzugehen[3]), als wir die Haupteigenschaften der Bewegung schon an den Integralen ablesen können.

Mit den vorstehenden Gleichungen sind die sechs voneinander unabhängigen und zur eindeutigen Beschreibung des Bewegungszustandes erforderlichen Integrationskonstanten $u_0(\vartheta_0), \varphi_0, \psi_0; n, n', h$ eingeführt. Die ersten drei bestimmen die Anfangslage unmittelbar; die letzten drei bestimmen die Anfangsgeschwindigkeiten $\dot\vartheta_0$, $\dot\varphi_0$, $\dot\psi_0$ wenigstens mittelbar, wie man aus (7) und (8) sieht.

Gewöhnlich wird der Kreisel in Gang gesetzt, indem er „aufgezogen" wird, d. h. um die Figurenachse einen Drehstoß $\mathfrak{C}_\varphi^0$ erhält und dann noch einen zur Figurenachse senkrechten Anfangsstoß (der natürlich auch Null sein kann) mitbekommt. Dieser seitliche Stoß bedeutet einen in die Äquatorebene fallenden Drehimpuls $\mathfrak{C}_a^0$, den man sich in zwei Komponenten $\mathfrak{C}_\vartheta^0$ und $\mathfrak{C}_q^0$ in Knoten- und Querachse zerlegt denken mag (vgl. Abb. 16). Führt man auch hier wieder die auf A reduzierten Drehstöße

$$s_\vartheta = \frac{|\mathfrak{C}_\vartheta^0|}{A}, \qquad s_\varphi = \frac{|\mathfrak{C}_\varphi^0|}{A}, \qquad s_q = \frac{|\mathfrak{C}_q^0|}{A} \tag{11}$$

---

1) Andere Herleitungen der ersten Integrale findet man bei F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, S. 218; R. GRAMMEL, Der Kreisel, S. 96; R. GRAMMEL, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 64, S. 120. 1917.

2) Siehe Kap. 7, Ziff. 15 ds. Bd. des Handb.

3) Vgl. etwa F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, Kap. IV und VI.

ein, so berechnen sich die Größen $\dot\vartheta_0$, n und n' aus dem Anfangsdrehstoß wie folgt:

$$\dot\vartheta_0 = s_\vartheta, \qquad n = s_\varphi, \qquad n' = s_\varphi u_0 + s_\psi v_0. \tag{12}$$

Man kann natürlich auch die Kreiselfunktion U in den Komponenten des Anfangsstoßes s_ϑ, s_φ und s_ψ ausdrücken, wenn man in (9) die Größe $2h$ ersetzt durch

$$2h = p_0^2 + q_0^2 + \frac{C r_0^2}{A} + 2\sigma u_0 = s_\vartheta^2 + s_\psi^2 + s_\varphi^2(\varepsilon + 1) + 2\sigma u_0; \tag{13}$$

so erhält man mit Beachtung von (12)

$$U = (1 - u^2)[s_\vartheta^2 + s_\psi^2 + 2\sigma(u_0 - u)] - [s_\varphi(u_0 - u) + s_\psi v_0]^2. \tag{14}$$

Die Anfangsdrehungen $\dot\varphi_0$ und $\dot\psi_0$ bleiben übrigens unbestimmt, wenn der Kreisel seine Bewegung in der aufrechten Lage $\vartheta_0 = 0$ oder $\vartheta_0 = 180°$ (Höchst- oder Tiefstlage des Schwerpunktes) beginnt. Dann wird

$$u_0 = \pm 1, \qquad n' = \pm n, \qquad \dot\varphi_0 \pm \dot\psi_0 = n(\varepsilon + 1) = n\frac{A}{C}, \tag{15}$$

und nur noch die Summe bzw. Differenz von $\dot\varphi_0$ und $\dot\psi_0$ hat nun physikalische Bedeutung.

21. Polbahn, Spurbahn und Schwungbahn. Der Endpunkt des Drehvektors $\mathfrak{v}$ beschreibt im Kreisel die körperfeste **Polbahn**. Die Polbahn ist eine **ebene Kurve**; ihre Ebene ist parallel zur Äquatorebene. Denn die Komponente von $\mathfrak{v}$ in der Figurenachse ist $r = N/C$, also zeitlich unveränderlich.

Im Raume beschreibt der Endpunkt des Drehvektors $\mathfrak{v}$ die **Spurbahn**. Sind ξ, η, ζ seine raumfesten rechtwinkligen Koordinaten (ξ, η wagerecht, ζ lotrecht aufwärts positiv gerechnet), so ist

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = p^2 + q^2 + r^2. \tag{1}$$

Nach Ziff. 20, Gleichung (7) hat man für die lotrechte Komponente

$$\zeta = \dot\varphi u + \dot\psi = n\varepsilon u + n'. \tag{2}$$

Den Energiesatz $T + V = H$ kann man nach (2) und (3) von Ziff. 20 mit den Abkürzungen (6) und (8) von Ziff. 20 und wegen $r = N/C = n(\varepsilon + 1)$ schreiben

$$p^2 + q^2 = 2h - 2\sigma u - n^2(\varepsilon + 1),$$

so daß statt (1) kommt

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2h - 2\sigma u + n^2\varepsilon(\varepsilon + 1). \tag{3}$$

Solange die Elliptizität $\varepsilon \neq 0$ ist, also die Trägheitsmomente A und C verschieden bleiben, kann man die Koordinate u aus (2) und (3) eliminieren und erhält

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta + \frac{\sigma}{n\varepsilon}\right)^2 = R^2, \quad \text{wo} \quad R^2 = 2h + \frac{\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} + \frac{2\sigma n'}{n\varepsilon} + n^2\varepsilon(\varepsilon + 1). \tag{4}$$

Dies ist die Gleichung einer Kugel vom Halbmesser R, deren Mittelpunkt im Abstand $-\sigma/n\varepsilon$ senkrecht über dem Stützpunkt liegt. Die Spurbahn ist also eine **sphärische Kurve**[1]).

Ist aber $\varepsilon = 0$, der Kreisel mit $A = C$ also ein sog. **schwerer Kugelkreisel** geworden (der Schwerpunkt braucht dabei keineswegs in den Stützpunkt gerückt zu sein), so folgt aus (2) unmittelbar $\zeta = n'$. Beim Kugelkreisel artet die sphärische Spurbahn in eine ebene Kurve aus; ihre Ebene ist wagerecht. Dieses Ergebnis war auch unmittelbar einzusehen.

[1]) F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 236.

Der Endpunkt des Schwungvektors $\mathfrak{S}$ beschreibt eine körperfeste und eine raumfeste **Schwungbahn** (Impulskurven). Wie schon aus der Unveränderlichkeit der Komponenten N und N' (Ziff. 20) hervorgeht, sind beide Bahnen ebene Kurven; ihre Ebenen (E bzw. E' in Abb. 16) sind parallel zur Äquatorebene bzw. wagrecht.

Das genauere Aussehen dieser vier Kurven kann natürlich nur nach Auswertung der Bewegungsintegrale (10) von Ziff. 20 gefunden werden.

22. Homologe Kreisel. Zwei schwere symmetrische Kreisel heißen **homolog**, wenn sie dasselbe äquatoriale Trägheitsmoment A, dasselbe reduzierte Stützpunktsmoment σ, dieselbe Anfangslage u_0, φ_0, ψ_0 und denselben Anfangsschwung $\mathfrak{S}_0$ haben. Homologe Kreisel können sich nur im axialen Trägheitsmoment C und also in der Elliptizität ε unterscheiden.

Ihre Bewegungen bleiben dauernd in einer sehr engen Verwandtschaft zueinander. Denn infolge des gleichen Anfangsstoßes $\mathfrak{S}_0$ stimmen homologe Kreisel auch in den Werten n, n'; $s_\vartheta, s_\varphi, s_\psi$ überein, die ja (durch A geteilte) Komponenten des Anfangsstoßes sind, und haben also nach Ziff. 20, Gleichung (11) dieselbe Kreiselfunktion U und dann nach Ziff. 20, Gleichung (9) dieselbe Kreiselkoordinate u, so daß nach Ziff. 20, Gleichung (7) auch ihre Präzessionsgeschwindigkeiten $\dot\psi$ dieselben sind. Folglich haben zwei homologe Kreisel identische Bahnen der Kreiselspitze, und ihre Eigendrehgeschwindigkeiten $\dot\varphi$ und $\dot\varphi^*$ sowie ihre Energiekonstanten h und h^* unterscheiden sich [vgl. Ziff. 20, Gleichung (7) und (13)] lediglich je um einen von den Elliptizitäten ε und ε^* oder den axialen Trägheitsmomenten C und C^* abhängigen Festwert

$$\left.\begin{aligned} \dot\varphi - \dot\varphi^* &= n(\varepsilon - \varepsilon^*) = N\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C^*}\right), \\ 2h - 2h^* &= n^2(\varepsilon - \varepsilon^*) = \frac{N^2}{A}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C^*}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dieser von DARBOUX[1]) gefundene Satz erlaubt, die Bewegung jedes symmetrischen Kreisels auf den homologen Kugelkreisel zurückzuführen.

Die Bewegung des **schweren Kugelkreisels** läßt sich, wie JACOBI[2]) entdeckt hat, auf die Bewegung zweier konjugierter, kräftefreier, aber im allgemeinen unsymmetrischer Kreisel zurückführen. Man kann nämlich stets zwei konjugierte kräftefreie Kreisel so finden, daß die Schwungachse des ersten mit der Lotlinie, die des zweiten mit der anfänglichen Lage der Figurenachse des schweren Kugelkreisels zusammenfällt, und daß außerdem der anfängliche Drehvektor $\mathfrak{o}_0$ des schweren Kugelkreisels mit dem doppelten Drehvektor $2\mathfrak{o}_0'$ der Anfangsbewegung der beiden konjugierten kräftefreien Kreisel übereinstimmt. Läßt man alsdann den Spurkegel des zweiten kräftefreien Kreisels auf dem Spurkegel des ersten mit der jeweiligen Drehgeschwindigkeit $2\mathfrak{o}'$ gleitfrei abrollen, so beschreibt die Schwungachse des zweiten Kreisels genau die Bewegung der Figurenachse des schweren Kugelkreisels. Bezüglich der mannigfachen Beweise dieses Satzes sei auf die Literatur[3]) verwiesen. Die folgende Untersuchung der Bewegung stützt sich jedoch nicht auf den Jacobischen Satz, sondern geht unmittelbar von der Kreiselfunktion U in Ziff. 20 aus.

23. Die Bewegung der Kreiselspitze. Wir denken uns den Beginn der Bewegung in dem Augenblick, wo die Kreiselkoordinate u einen größten oder

---

[1]) G. DARBOUX, Liouvilles Journ. de math. (4) Bd. 1, S. 403. 1885.

[2]) C. G. J. JACOBI, Ges. Werke Bd. 2, S. 510. Vgl. auch die soeben zitierte Arbeit von DARBOUX.

[3]) Etwa bei F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, S. 409.

kleinsten Wert u_0 besitzt und demgemäß $\dot{u}_0$ verschwindet. In diesem Augenblick muß wegen $\dot{u}^2 = U$ auch $U(u_0)$ verschwinden, also nach Ziff. 20, Gleichung (14)

$$U(u_0) = (1 - u_0^2)\, s_\vartheta^2 = 0$$

sein. Wir wollen vorläufig den Fall, daß $u_0 = \pm 1$ ist, ausschließen, setzen also bis auf weiteres auch $n' \neq \pm n$ voraus und haben daher $s_\vartheta = 0$ zu wählen: bei Bewegungsbeginn soll der Schwungvektor mit der Lotlinie und der Figurenachse in einer Ebene liegen. Man formt mit $s_\vartheta = 0$ die Kreiselfunktion leicht um in

$$U \equiv 2\sigma (u - u_0)(u^2 - 2au - b)\,, \tag{1}$$

wo zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{s_\psi^2 + s_\varphi^2}{4\sigma} = \frac{n^2 + n'^2 - 2nn'u_0}{4\sigma v_0^2}\,,\\ b &= 1 + \frac{(s_\psi^2 - s_\varphi^2)u_0 - 2 s_\psi s_\varphi v_0}{2\sigma} = 1 + \frac{(n^2 + n'^2)u_0 - 2nn'}{2\sigma v_0^2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

gesetzt ist. Indem man die zweite Klammer von (1) in ihre Linearfaktoren zerspaltet, gewinnt man

$$U \equiv 2\sigma (u - u_0)(u - u_1)(u - u_2) \tag{3}$$

mit

$$u_1 = a - \sqrt{a^2 + b}\,, \quad u_2 = a + \sqrt{a^2 + b}\,. \tag{4}$$

Da die Funktion U gemäß Ziff. 20, Gleichung (9) für $u = \pm 1$ je einen negativen Wert hat, für $u = \pm\infty$ aber wegen $\sigma > 0$ ebenfalls gleich $\pm\infty$ wird, so muß ihr Verlauf von der in Abb. 17 dargestellten Art sein, wobei es offenbleiben kann, ob $u_0 \gtrless u_1$ ist. Den Sonderfall $u_0 = u_1$ schließen wir vorläufig noch aus. Weil in den Integralen (10) von Ziff. 20 überall $\sqrt{U}$ vorkommt, so kann die Bewegung nur zwischen den Grenzen u_0 und u_1 verlaufen. Wir nennen die zu u_0 und u_1 gehörenden wagerechten Kreise der Einheitskugel um O die **Grenzkreise**.

Abb. 17. Die Kreiselfunktion des schweren symmetrischen Kreisels.

Man liest nunmehr aus den Gleichungen (10) von Ziff. 20 folgendes ab: Die Kreiselspitze schwankt zwischen den Grenzkreisen periodisch hin und her; sie besteht aus lauter unter sich kongruenten, in sich symmetrischen Kurvenstücken, die in der Periode 2τ mit der Azimutzunahme $2\psi_\tau$ und der Zunahme $2\varphi_\tau$ des Eigendrehwinkels so durchlaufen werden, daß in gleicher Höhe u gleiche Geschwindigkeitskoordinaten $|\dot{u}|$, $\dot{\psi}$ und $\dot{\varphi}$ vorhanden sind, und zwar wird

$$\tau = \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\mp\sqrt{U}}\,, \qquad \psi_\tau = \int_{u_0}^{u_1} \frac{n' - nu}{1 - u^2} \cdot \frac{du}{\mp\sqrt{U}}\,, \qquad \varphi_\tau = n s \tau + \int_{u_0}^{u_1} \frac{n - n'u}{1 - u^2} \cdot \frac{du}{\mp\sqrt{U}}\,, \tag{5}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $u_0 \gtrless u_1$ ist. Die Bahnkurve besitzt Schleifen, falls die Funktion

$$f(u) \equiv n' - nu \equiv s_\varphi(u_0 - u) + s_\psi v_0$$

innerhalb des Bereiches $u_0 \leftrightarrow u_1$ verschwindet; sie setzt auf dem oberen Grenzkreis mit Spitzen auf, falls $f(u)$ auf dem oberen Grenzkreis verschwindet. Eine genauere Untersuchung ergibt, daß der Doppelpunkt der Schleifen immer mit dem dazwischenliegenden Berührpunkt der Bahn an den oberen Grenzkreis dasselbe Azimut ψ besitzt, und daß (wegen $\sigma > 0$) keine Spitzen am unteren

Grenzkreis vorkommen können. Abb. 18a, b, c zeigen die drei Typen der Bahnkurven[1]), die sich im allgemeinen nicht schließen.

Während beim punktförmigen Raumpendel[2]) von den beiden Grenzkreisen mindestens einer unterhalb des Stützpunkts liegen muß, können beim schweren symmetrischen Kreisel sehr wohl beide Grenzkreise über dem Stützpunkt liegen, so daß der Schwerpunkt dauernd über dem Stützpunkt bleibt. Wählt man nämlich mit $u_0 > 0$ den einen Grenzkreis über dem Stützpunkt, so liegt auch der zweite über dem Stützpunkt, falls $u_1 > 0$ wird, wozu nach (4) nur nötig ist, daß $b < 0$ bleibt. Dies aber kann nach (2) stets erreicht werden, wenn man s_φ^2 hinreichend groß macht, d. h. den Kreisel stark genug um die Figurenachse antreibt.

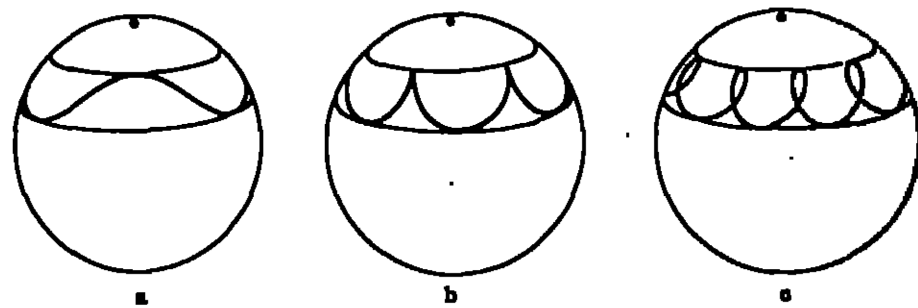


Abb. 18a—c. Bahnen der Kreiselspitze des schweren symmetrischen Kreisels.

Man bemerkt übrigens, daß in unseren Formeln zugleich die Theorie des Kreisels ohne Eigendrehung, d. h. des **körperlichen (physikalischen) Raumpendels** vollständig enthalten ist. Wir verzichten darauf, die leichte Spezialisierung der Formeln hierfür vorzunehmen.

24. Die Bewegung des aufrechten Kreisels. Es bleiben nun die bisher ausgeschlossenen Fälle $u_0 = \pm 1$ nachzutragen, wo der Kreisel mit lotrechter, aufwärts oder abwärts gerichteter Figurenachse angetrieben wird. Wir behandeln zuerst den Fall $u_0 = +1$ der anfänglich **aufwärts** gestellten Figurenachse und unterscheiden hier zwei Unterfälle.

a) Der Anfangsschwung $\mathfrak{S}_0$ sei lotrecht, d. h. $s_\psi = 0$ und $s_\varphi = 0$. Die für diese Voraussetzungen noch gültigen Formeln (1) bis (4) von Ziff. 23 liefern jetzt

$$a = \frac{s_\varphi^2}{4\sigma}, \qquad b = 1 - \frac{s_\varphi^2}{2\sigma}, \qquad u_1 = 1, \qquad u_2 = \frac{s_\varphi^2}{2\sigma} - 1. \tag{1}$$

Solange also $u_2 \geq 1$ oder

$$s_\varphi^2 \geq 4\sigma \tag{2}$$

bleibt, ist für $u < 1$ die Kreiselfunktion U stets negativ, und dies besagt: Unter der Bedingung (2), d. h. wenn der Kreisel genügend stark angetrieben ist, kann die Figurenachse aus ihrer lotrecht aufwärts gerichteten Lage ohne seitlichen Stoß nicht heraustreten.

Ist jedoch die Bedingung (2) nicht erfüllt, also $u_2 < 1$, so kann eine Bewegung im Bereich $1 \leftrightarrow u_2$ eintreten. Da jetzt

$$U \equiv 2\sigma(1-u)^2(u-u_2)$$

---

[1]) Genau berechnete stereographische Projektionen der Bahnkurven findet man bei F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Fig. 25 bis 35. Stereoskopbilder zeichneten Greenhill und Dewar, Proc. London Math. Soc. Bd. 27, S. 587. 1896 und Engineering Bd. 64, S. 311. 1897.

[2]) Vgl. Kap. 7, Ziff. 15 ds. Bd. des Handb.

wird, so lassen sich die Integrale (10) von Ziff. 20 elementar auswerten, wobei man als untere Integrationsgrenze, d. h. als Bewegungsbeginn nicht $u = 1$, sondern zweckmäßig den Wert $u = u_2$ wählt. Man findet mit $n = n' = s_\varphi$

$$t = \sqrt{\frac{2}{\sigma(1-u_2)}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{\frac{u-u_2}{1-u_2}} \quad \text{oder} \quad u = u_2 + (1-u_2)\,\mathfrak{Tg}^2 t\sqrt{\frac{\sigma}{2}(1-u_2)}, \tag{3}$$

$$\dot\psi = \frac{s_\varphi}{1+u}, \qquad \dot\varphi = \dot\psi + s_\varphi s \tag{4}$$

und als Gleichung der Bahn der Kreiselspitze

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{u-u_2}{1+u_2}} + \sqrt{\frac{1+u_2}{1-u_2}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\sqrt{\frac{u-u_2}{1-u_2}}. \tag{5}$$

Diese Gleichung stellt eine sphärische Spirale dar (Abb. 19), die den Grenzkreis u_2 berührt, den oberen Kugelpol in unzähligen Windungen umschlingt und sich ihm rasch nähert, ohne ihn jemals zu erreichen (t wird aber mit $u \to 1$ logarithmisch unendlich, so daß praktisch schon nach kurzer endlicher Zeit der Unterschied von der lotrechten Endlage unmerklich wird). Bemerkenswert ist, daß die Gestalt der Bahnkurve nur von der Anfangslage der Figurenachse, dagegen weder vom Kreiselgewicht G, noch von der Lage (l) des Schwerpunkts abhängt. Die Präzessionsgeschwindigkeit $\dot\psi$ nähert sich asymptotisch dem Festwert $\frac{1}{2}s_\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2\sigma(1+u_2)}$, die Eigenrotation $\dot\varphi$ ebenso dem Festwert $(\frac{1}{2}+s)s_\varphi = (\frac{1}{2}+s)\sqrt{2\sigma(1+u_2)}$.

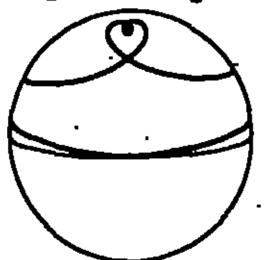


Abb. 19. Aperiodische Bahn der Kreiselspitze des schweren symmetrischen Kreisels.

Geht man von der untersten Lage u_2 der Figurenachse aus, so wird diese asymptotische oder aperiodische Kreiselbewegung nur möglich, wenn erstens ein ganz bestimmter, durch (1) vorgeschriebener (reduzierter) Eigenschwung $s_\varphi = \sqrt{2\sigma(1+u_2)}$ vorhanden ist, und wenn zweitens außerdem ein wagerechter und zur Figurenachse senkrechter Schlag von solcher Stärke ausgeübt wird, daß der zugehörige (reduzierte) Drehimpuls s_ϑ', dessen Vektor in die Querachse fällt, den Wert $s_\vartheta' = s_\varphi \operatorname{tg}\frac{\vartheta_2}{2} = \sqrt{2\sigma(1-u_2)}$ besitzt; denn die Resultante von s_φ und s_ϑ' wirft dann in die Lotlinie gerade die zur Erreichung der aufrechten Kreiselstellung nötige Komponente vom Betrag s_φ. Die Energie zum Aufrichten entnimmt der Kreisel der Bewegungsenergie der ψ- und φ-Drehungen, die ja in der Tat abnehmen.

Diese asymptotische Bewegungsform, die beim ebenen Pendel längst bekannt war und analog zum asymptotischen Fall der Poinsotbewegung (Ziff. 17) ist, wurde beim schweren symmetrischen Kreisel von KLEIN und SOMMERFELD entdeckt.

b) Der Anfangsstoß $\mathfrak{S}_0$ soll jetzt bei lotrecht aufwärts gerichteter Anfangsstellung der Figurenachse nicht mehr lotrecht sein; vielmehr soll der aufrechte Kreisel außer seinem Eigenschwung s_φ noch einen seitlichen Stoß, also einen Zusatzschwung s_q, mitbekommen. Da nach wie vor $n = n' = s_\varphi$ ist, so bleibt für die ganze Bewegung auch hier nach Ziff. 20, Gleichung (7),

$$\dot\varphi = \psi + s_\varphi s. \tag{6}$$

Die Formeln (1) bis (4) von Ziff. 23 lauten hier

$$U = 2\sigma(1-u)(u-u_1)(u_2-u) \tag{7}$$

mit

$$u_1 = a - \sqrt{a^2+b}, \qquad u_2 = a + \sqrt{a^2+b} \tag{8}$$

und

$$a = \frac{s_q^2 + s_\varphi^2}{4\sigma}, \qquad b = 1 + \frac{s_q^2 - s_\varphi^2}{2\sigma}. \tag{9}$$

Man schließt daraus, daß die Kreiselspitze zwischen dem oberen Kugelpol und dem Grenzkreis u_1 hin und her schwankt, den die Bahnkurve stets berührt. Ihr rosettenartiges Aussehen zeigt Abb. 20.

Man kann von hier aus leicht entscheiden, wann der aufrecht tanzende Kreisel **stabil** ist. Man nennt diese Bewegung stabil[1]), wenn mit unbegrenzt abnehmendem seitlichem Anstoß s_χ der Grenzkreis u_1 sich dem oberen Kugelpol unbegrenzt nähert, andernfalls labil. Läßt man aber s_χ gegen Null gehen, so geht nach (8) und (9) der Wert u_1 gegen

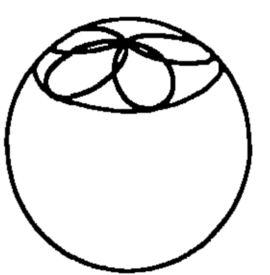


Abb. 20. Bahn der Kreiselspitze des aufrechten schweren symmetrischen Kreisels.

$$u_1 = 1\,, \qquad \text{falls} \qquad s_\varphi^2 \geq 4\sigma\,,$$

$$u_1 = \frac{s_\varphi^2}{2\sigma} - 1 < 1\,, \qquad \text{falls} \qquad s_\varphi^2 < 4\sigma$$

ist. Folglich lautet die Stabilitätsbedingung des aufrechten Kreisels

$$s_\varphi^2 \geq 4\sigma \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{S}^2 \geq 4AGl\,. \tag{10}$$

25. Die Bewegung des hängenden Kreisels. Der Fall der anfänglich lotrecht abwärts gestellten Figurenachse kann ebenso behandelt werden wie der vorangehende.

a) Der Anfangsschwung $\mathfrak{S}_0$ sei lotrecht, d. h. $s_\vartheta = 0$ und $s_\chi = 0$. Jetzt hat man statt Ziff. 24, Gleichung (1),

$$a = \frac{s_\varphi^2}{4\sigma}\,, \qquad b = 1 + \frac{s_\varphi^2}{2\sigma}\,, \qquad u_1 = -1\,, \qquad u_2 = \frac{s_\varphi^2}{2\sigma} + 1 > 1\,, \tag{1}$$

und die Kreiselfunktion

$$U = -2\sigma(1+u)^2(u_2 - u) \tag{2}$$

bleibt mithin immer negativ, ausgenommen den Wert $u = -1$. Beim hängenden Kreisel tritt die Figurenachse aus ihrer lotrecht abwärts gerichteten Lage ohne seitlichen Anstoß nicht heraus; eine asymptotische Bewegung wie in Ziff. 24 ist hier unmöglich.

b) Tritt ein seitlicher Anstoß s_χ hinzu, so hat man an Stelle von Gleichung (6) und (9) von Ziff. 24

$$\dot\varphi = -\dot\psi + s_\varphi s\,, \tag{3}$$

$$a = \frac{s_\chi^2 + s_\varphi^2}{4\sigma}\,, \qquad b = 1 - \frac{s_\chi^2 - s_\varphi^2}{2\sigma}\,. \tag{4}$$

Die Bahnkurven liegen beim hängenden Kreisel zum unteren Kugelpol in derselben Art wie beim aufrechten zum oberen Kugelpol, doch läuft der hängende Kreisel mit jedem Eigenschwung s_φ stabil.

26. Die reguläre Präzession. Einer besonderen Überlegung bedarf der partikuläre oder, wenn man lieber will, singuläre Fall, daß die Kreiselfunktion U im Bereich zwischen $u = +1$ und $u = -1$ eine Doppelwurzel aufweist, also die beiden Grenzkreise u_0 und u_1 in einen einzigen zusammenrücken. Dies tritt nach Ziff. 23, Gleichung (1), ein, wenn

$$u_0^2 - 2a u_0 - b = 0$$

ist, wofür man nach Ziff. 23, Gleichung (2), auch schreiben kann

$$\frac{u' - u u_0}{1 - u_0^2} \cdot \frac{u - u' u_0}{1 - u_0^2} = \sigma\,. \tag{1}$$

[1]) Vgl. hierzu Kap. 7, Ziff. 37 ds. Bd. des Handb.

Nun sind aber, da $u = u_0$ festliegt, nach Ziff. 20, Gleichung (7), auch $\dot{\psi}$ und $\dot{\varphi}$ Festwerte, die wir ähnlich wie früher mit μ und ν bezeichnen:

$$\mu = \frac{n' - n u_0}{1 - u_0^2}, \qquad \nu = n s + \frac{n - n' u_0}{1 - u_0^2}. \tag{2}$$

Diese singuläre Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels ist also eine reguläre Präzession von derselben Art, wie es die allgemeine Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels war (Ziff. 14). Die Präzessionsachse ist jetzt aber die Lotlinie und nicht, wie damals, die Schwungachse (falls $u_0 \neq \pm 1$); vielmehr beschreibt nun auch der Schwungvektor $\mathfrak{S}$ einen Kreiskegel um die Lotlinie, wobei er (wegen $s_\vartheta = 0$) mit der Figurenachse und Lotlinie in einer Ebene bleibt.

Man hat als Bedingung für das Eintreten einer solchen regulären Präzession nach (1) und (2)

$$\mu(\nu - n s) = \sigma$$

oder, wenn man noch n in μ und ν durch $n = \frac{C}{A}(\nu + \mu u_0)$ ausdrückt,

$$\mu(\nu - \mu s u_0) = \sigma(s + 1) \tag{3}$$

oder auch, wenn man die Werte von s und σ aus Ziff. 20, Gleichung (6), einsetzt,

$$C\mu\nu + (C - A)\mu^2 \cos\vartheta_0 = Gl, \tag{4}$$

eine Beziehung, die mit $Gl = 0$ wieder in die Präzessionsbedingung (1) von Ziff. 14 des kräftefreien symmetrischen Kreisels übergeht.

Während aber die reguläre Präzession die allgemeinste Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels bildet, so ist sie für den schweren symmetrischen nur eine singuläre Bewegungsform. Die Mannigfaltigkeit der Bewegungen ist (wegen der sechs in den Integralen auftretenden Konstanten; s. Ziff. 20) eine ∞^6-fache. Durch die für die reguläre Präzession kennzeichnende Bedingung (1) und $\dot{u} = 0$ wird ihre Mannigfaltigkeit als ∞^4-fache aus den allgemeinen Bewegungen ausgeschieden. Ist aber $\sigma = 0$, so sind zwar μ und ν immer noch durch eine Gleichung verbunden, aber die durch die Schwerkraft vorgezeichnete Lotrichtung hat für den kräftefreien Kreisel keine ausgezeichnete Bedeutung mehr: jede vom Stützpunkt ausgehende Richtung kann vielmehr als Präzessionsachse dienen, womit sich die Mannigfaltigkeit dieser kräftefreien Präzessionen wieder auf die ∞^5-fache erhöht.

Um eine reguläre Präzession beim schweren symmetrischen Kreisel zu erzeugen, muß man ihm neben einem Eigenschwung s_φ einen seitlichen Anstoß mit dem Schwung s_ψ so erteilen, daß zwischen s_φ und s_ψ die Bedingung

$$s_\psi(s_\varphi v_0 - s_\psi u_0) = \sigma v_0^2 \tag{5}$$

erfüllt ist, in welche sich die Präzessionsgleichung (1) leicht umsetzen läßt. Ohne seitlichen Anstoß ist also eine reguläre Präzession unmöglich.

Für die Untersuchung der kinematischen Einzelheiten der regulären Präzession (3) unterscheiden wir zwei Fälle.

a) $s u_0 \neq 0$: die Figurenachse ist entweder gehoben ($u_0 > 0$) oder gesenkt ($u_0 < 0$), und wir sprechen dann geradezu von einem gehobenen oder gesenkten Kreisel. Ferner heiße der Kreisel gestreckt oder abgeplattet, je nachdem $A \gtrless C$, also $s \gtrless 0$ ist, wobei jedoch stets $s + 1$ positiv bleibt. Wir unterscheiden weiter zwei Unterfälle:

α) $s u_0 > 0$: gestreckter gehobener und abgeplatteter gesenkter Kreisel. Hier ist gemäß (3)

$$\mu = \frac{1}{2 s u_0}\left[\nu \mp \sqrt{\nu^2 - 4\sigma s u_0(s + 1)}\right], \tag{6}$$

und es gibt somit zu jeder Eigendrehgeschwindigkeit ν zwei, eine oder keine reguläre Präzession μ, je nachdem

$$\nu^2 \gtreqless 4\sigma s u_0 (s+1)$$

ist.

Sind zwei vorhanden, so hat für beide die Größe μ dasselbe Vorzeichen wie ν; d. h. beide Präzessionen erfolgen von oben gesehen beim gestreckten gehobenen Kreisel im selben Sinne wie die Eigendrehung, beim abgeplatteten gesenkten im entgegengesetzten Sinne. Man unterscheidet diese beiden regulären Präzessionen wohl auch als langsame und schnelle.

β) $s u_0 < 0$: gestreckter gesenkter und gehobener abgeplatteter Kreisel. Hier gibt es gemäß (6) zu jedem Eigendrehwert ν zwei reguläre Präzessionen, und zwar hat die langsame das gleiche Vorzeichen wie ν, die schnelle das entgegengesetzte; d. h. die langsame Präzession erfolgt, von oben gesehen, beim gestreckten gesenkten Kreisel im umgekehrten Sinne der Eigendrehung, die schnelle im gleichen Sinne wie die Eigendrehung, und beim gehobenen abgeplatteten Kreisel ist es gerade umgekehrt.

b) $s u_0 = 0$: die Figurenachse läuft entweder wagerecht um ($u_0 = 0$) oder der Kreisel ist ein Kugelkreisel ($s = 0$). In beiden Fällen ist die rasche Präzession mit $\mu = \infty$ kinematisch bedeutungslos geworden, und für die langsame gilt statt (6)

$$\mu\nu = \sigma(s+1), \tag{7}$$

d. h. die Präzession μ erfolgt um so langsamer (rascher), je rascher (langsamer) die Eigendrehung ν ist.

Sehr bemerkenswert ist hier die Spezialisierung auf das körperliche (physikalische) Raumpendel ($\nu = 0$). Man hat nach (5)

$$\mu^2 = -\frac{s+1}{s} \cdot \frac{\sigma}{u_0}, \tag{8}$$

also nur für $s u_0 < 0$ eine reelle Präzession (Kegelbewegung). Das körperliche Raumpendel vermag mithin eine Kegelbewegung von beliebigem Umlaufsinn zu vollziehen, wenn seine Figurenachse entweder gesenkt ist und ein kleineres Trägheitsmoment als irgendeine andere Stützpunktachse besitzt, oder aber wenn sie gehoben ist und das größte Trägheitsmoment hat. Dieser letzte Fall (der beim punktförmigen Raumpendel wegen $C = 0$ fehlt) ist außerordentlich merkwürdig, weil hier der Schwerpunkt dauernd höher liegt als der Stützpunkt.

Die Sonderfälle $u_0 = \pm 1$ des aufrechten und des hängenden Kreisels sind bereits in Ziff. 24 und 25 erledigt.

27. Die Nachbarbewegungen der regulären Präzession. Wird eine reguläre Präzession, etwa mit den Konstanten u_0, u, u', durch einen Drehstoß $\Delta\mathfrak{S}$ gestört, dessen Größe klein gegenüber dem vorhandenen Schwung $\mathfrak{S}$ vorausgesetzt sei, so tritt eine benachbarte Bewegung auf, insofern als die Kreiselspitze sich nun zwischen zwei Grenzkreisen u_0' und u_0'' bewegt, die, wie sich für $u_0^2 \neq 1$ leicht zeigen läßt, mit unbegrenzt abnehmendem $\Delta\mathfrak{S}$ sich dem ungestörten Präzessionskreise u_0 beliebig nähern, womit die reguläre Präzession $u_0 < 1$ als stabile Bewegungsform nachgewiesen ist (bezüglich der Stabilität des Falles $u_0^2 = 1$ s. Ziff. 24 u. 25).

Am besten zerlegt man den Stoß $\Delta\mathfrak{S}$ in drei Komponenten nach Figurenachse, Querachse und Knotenachse und untersucht die Wirkung jeder der drei (reduzierten) Komponenten Δs_φ, Δs_ϑ und Δs_ψ je für sich. Wir mögen uns hier auf einen störenden Drehstoß Δs_ψ beschränken und bilden dann am zweckmäßigsten aus Ziff. 20, Gleichung (9) und (14), durch Differentiation

$$\ddot{u} = 3\sigma u^2 - (s_\psi^2 + s_\varphi^2 + s_\vartheta^2 + 2\sigma u_0)u + (s_\varphi^2 u_0 + s_\varphi s_\psi v_0 - \sigma), \tag{1}$$

Setzt man hierin, solange $u_0^2 \neq 1$ ist, die Figurenachse also nicht und auch nicht angenähert lotrecht zeigt,

$$u = u_0 + \bar{u}, \qquad s_\vartheta = \Delta s_\vartheta$$

und behandelt $\bar{u}$ und Δs_ϑ als kleine Größen, so kommt mit Rücksicht auf Gleichung (5) von Ziff. 26

$$\ddot{\bar{u}} + \bar{u}(s_\varphi^2 + s_\psi^2 - 4\sigma u_0) = 0$$

mit dem für $t = 0$ auch $\bar{u} = 0$ liefernden Integral

$$\bar{u} = c \sin \omega t, \qquad \text{wo} \qquad \omega = \sqrt{s_\varphi^2 + s_\psi^2 - 4\sigma u_0}. \tag{2}$$

Man weist auf Grund von Ziff. 26, Gleichung (5), leicht nach, daß ω stets reell und von Null verschieden ist. Um c zu bestimmen, bildet man

$$\dot{\bar{u}})_{t=0} = c\omega.$$

Da aber der Anfangsstoß Δs_ϑ nur den Schwungvektor verlegt, so ist im ersten Augenblick, also für $t=0$, auch noch $u=u_0$ und daher nach Ziff. 20, Gleichung (14).

$$\dot{\bar{u}})_{t=0} = \sqrt{U}\Big)_{\substack{u=u_0 \\ s_\vartheta=\Delta s_\vartheta}} = v_0 \Delta s_\vartheta$$

und also

$$c = \frac{v_0 \Delta s_\vartheta}{\omega}. \tag{3}$$

Setzt man den Wert $u = u_0 + \bar{u}$ schließlich in die Gleichungen (7) von Ziff. 20 ein, so erhält man, wenn man nach wie vor $\bar{u}$ als klein gegen u_0 behandelt,

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \mu t + c\,\frac{s_\varphi - 2u_0\mu}{\omega v_0^2}\cos\omega t, \\ \varphi &= \nu t + c\,\frac{s_\varphi u_0 + s_\psi v_0 - 2u_0\nu}{\omega v_0^2}\cos\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Man sieht zunächst, daß in der Tat mit $\Delta s_\vartheta \to 0$ auch $c \to 0$ geht, wonach die reguläre Präzession gegenüber den Störungen Δs_ϑ stabil ist. Weiter aber entnimmt man den Formeln (2) bis (4), daß die gestörte Bewegung der Kreiselspitze sich als Überlagerung der ungestörten Präzession und einer elliptisch polarisierten harmonischen Schwingung von der Frequenz ω und den sphärischen Amplituden c/v_0 und $c(s_\varphi - 2u_0\mu)/\omega v_0$ darstellt. Man nennt diese Schwingung nach dem astronomischen Vorbild des Erdkreisels eine Nutation (Nickbewegung).

In ähnlicher Weise und mit ähnlichem Ergebnis lassen sich auch die Störungen Δs_φ und Δs_ψ untersuchen.

28. Die Störungen des lotrecht stehenden und hängenden Kreisels. Die beiden Fälle $u_0 = \pm 1$, also $v_0 = 0$, mußten in der vorigen Ziffer ausdrücklich ausgeschlossen werden. Wir untersuchen jetzt die Störungen, die einen um seine lotrechte Figurenachse rotierenden Kreisel, den man wohl auch „schlafend" (sleeping top) nennt, „aufwecken".

Im Falle des aufrecht stehenden Kreisels ($u_0 = +1$) kann man wieder von der Formel (1) von Ziff. 27 ausgehen. Man setzt dort genähert

$$1 - u = 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} \approx \frac{\vartheta^2}{2}, \qquad s_\vartheta = \Delta s_\vartheta$$

und dann ohne Einschränkung $s_\psi = 0$ und hat, wenn man ϑ und Δs_ϑ als klein behandelt,

$$\frac{d^2\vartheta^2}{dt^2} + \vartheta^2(s_\varphi^2 - 4\sigma) = 2\Delta s_\vartheta^2$$

mit dem für $t = 0$ verschwindenden Integral

$$\vartheta = \frac{2\Delta s_\vartheta}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2}, \qquad \text{wo} \qquad \omega = \sqrt{s_\varphi^2 - 4\sigma}\,. \tag{1}$$

Wie man sieht, hat diese Näherung nur dann unbeschränkte Gültigkeit, wenn $s_\varphi^2 > 4\sigma$ bleibt, und zwar, wegen des Nenners ω, wenn s_φ^2 auch nicht annähernd bei 4σ liegt, so daß jedenfalls $1/\omega$ immer noch als klein gegen die Störung Δs_ϑ gelten kann. Daß dann mit $\Delta s_\vartheta \to 0$ auch $\vartheta \to 0$ geht, bestätigt nur wieder das schon in Ziff. 24 gefundene Ergebnis, daß für $s_\varphi^2 > 4\sigma$ der aufrechte Kreisel um seine lotrechte Figurenachse stabil rotiert.

Aus Ziff. 20, Gleichung (7), folgt dann mit $n = n' = s_\varphi$ in gleicher Näherung

$$\dot\psi = \frac{s_\varphi}{1+x} \approx \frac{s_\varphi}{2 - \frac{\vartheta^2}{2}} \approx \frac{s_\varphi}{2}, \qquad \dot\varphi = s_\varphi\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)$$

und also

$$\psi = \frac{s_\varphi t}{2}, \qquad \varphi = s_\varphi\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)t. \tag{2}$$

Sieht man ϑ und ψ als sphärische Polarkoordinaten um den oberen Kugelpol an, so kann man die Bewegung der Kreiselspitze deuten als eine harmonische Schwingung von der Periode $\omega/2$ und der Amplitude $\vartheta_1 = 2\Delta s_\vartheta/\omega$ auf einem Meridianbogen, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot\psi = s_\varphi/2$ gleichförmig dreht. Die Kreiselspitze geht jeweils nach der Zeit $\tau = 2\pi/\omega$ durch den oberen Kugelpol, und das Azimut nimmt mit jeder Vollschwingung um den Betrag $\psi_{2\tau} = 2\pi s_\varphi/\omega > 2\pi$ zu, d. h. der Berührpunkt der rosettenartigen Bahn der Kreiselspitze mit dem Grenzkreis ϑ_1 schreitet auf diesem Kreise im Sinne der Eigendrehung $\dot\varphi$ fort.

Der nun noch zu erledigende Fall $n_0 = -1$ des lotrecht hängenden Kreisels wird am besten auf den soeben behandelten dadurch zurückgeführt, daß man σ gegen $-\sigma$ vertauscht und dafür die Kreiselspitze dann auf der negativen Figurenachse wählt, also in der Umgebung des oberen Kugelpols beläßt. So gelten die Näherungsformeln (1) und (2) auch für den lotrecht hängenden Kreisel, und zwar gelten sie jetzt mit

$$\omega = \sqrt{s_\varphi^2 + 4\sigma} \tag{3}$$

unbeschränkt, entsprechend der in Ziff. 25 festgestellten Tatsache, daß der hängende Kreisel stets stabil läuft. Die Azimutzunahme $\psi_{2\tau}$ bleibt jetzt kleiner als 2π, d. h. die Bahnrosetten wandern nun gegen die Eigendrehung $\dot\varphi$ rückwärts.

Wir bemerken noch, daß die Näherungsformeln dieser und der vorhergehenden Ziffer natürlich erst dann ihre volle Berechtigung erhalten, wenn man auch den in ihnen begangenen Fehler abschätzt. Diese Fehlerabschätzung ist von Klein und Sommerfeld sorgfältig vorgenommen worden[1]).

29. Der schnelle Kreisel und die pseudoreguläre Präzession. Bei Kreiselversuchen an den üblichen Modellen treibt man den Kreisel um seine Figurenachse in der Regel sehr rasch an. Man beobachtet dann eine Bewegung, die der regulären Präzession sehr ähnlich sieht, oft mit ihr verwechselt wurde und

[1]) F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 269ff.

daher ein Tummelplatz der populären Kreiselliteratur, die sich gerade diesem häufigsten und paradoxen Fall des Experiments mit Vorliebe zugewandt hat, mit ihren mathematisch wie mechanisch wenig einwandfreien Erklärungsversuchen gewesen ist.

Ein stark angetriebener Kreisel, dessen Figurenachse wie üblich in geneigter Lage ohne merkbaren seitlichen Anstoß losgelassen wird, beschreibt für die ungenaue Beobachtung anscheinend eine reguläre Präzession. Der Schwerkraft zum Trotz würde also die Kreiselspitze beständig horizontal ausweichen. Das ist aber in Wahrheit nicht der Fall. Aufzeichnungen der Bahn der Kreiselspitze zeigen an Stelle der glatten Kreisbahn Kräuselungen mit mehr oder minder gut ausgeprägten Spitzen; Geräusch und Erzitterungen des Fundaments weisen auf kleine Schwingungen hin, die sich der Präzessionsbewegung überlagern und erst durch allerlei Nebenumstände (Reibung, Elastizität der Unterlage) abklingen. Andere, in Ziff. 11 kurz erwähnte, namentlich neuere Kreiselinstrumente (z. B. das Prandtlsche), die beliebige Abänderung des Kreiselschwunges gestatten, erweisen in stetigem Übergang den völlig anderen Charakter dieser Bewegung, die nur im Mittel einer langsamen regulären Präzession gleicht und von KLEIN und SOMMERFELD eine **pseudoreguläre Präzession** genannt worden ist. Die pseudoreguläre Präzession kommt also zustande, wenn der Schwungvektor anfangs „nahezu" in die Richtung der Figurenachse fällt und im Vergleich zur Schwerkraft eine „beträchtliche" Größe hat. „Nahezu" soll heißen: die Anfangsrichtung von Figurenachse und Schwungvektor markieren auf der Einheitskugel mit bloßem Auge nicht oder nicht merkbar unterscheidbare Spurpunkte; „beträchtlich" soll heißen: das Verhältnis der gleich dimensionierten Größen $s_\varphi^2 : \sigma$ soll, unter der Voraussetzung, daß auch die Querstoßkomponenten s_ψ und s_ϑ klein gegen s_φ sind, größer als irgendeine vereinbarte große Zahl (z. B. 100) sein.

Man kann die Bahnkurven der Kreiselspitze entweder aus den strengen Bewegungsgleichungen von Ziff. 20 herleiten oder anschaulicher und unmittelbar durch folgende Überlegung finden. Im ersten Augenblick liegen die Schwungachse, die Drehachse und die Figurenachse ununterscheidbar nahe zusammen. Eine einfache Betrachtung[1]) zeigt, daß diese drei Achsen beim schnellen Kreisel auch weiterhin in erster Näherung nahezu zusammenbleiben, so daß man in **erster Näherung** so rechnen kann, als läge der Schwerpunkt S auf der Schwungachse. Nun ist aber der Vektor des Schweremomentes bezüglich des Stützpunkts O

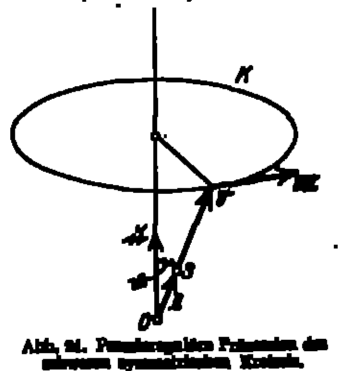


Abb. 21. Pseudoreguläre Präzession des schweren symmetrischen Kreisels.

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{l}\mathfrak{G}]$$

(wo $\mathfrak{l}$ den von O nach S gezogenen Fahrstrahl bedeutet) stets wagerecht und in unserem Falle überdies in erster Näherung tangential zu demjenigen Kreise K, den man in wagerechter Ebene konzentrisch um die Lotlinie des Stützpunkts durch den Endpunkt des Schwungvektors $\mathfrak{S}$ legen kann (Abb. 21). Da nun aber nach Ziff. 4, Gleichung (3), der Vektor $\mathfrak{M}$ die Änderungsgeschwindigkeit des Schwungvektors $\mathfrak{S}$, also die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mißt, mit der der Endpunkt von $\mathfrak{S}$ weiterläuft, so sieht man sofort ein, daß der Vektor $\mathfrak{M}$ von (in erster Näherung) festem Betrag diesen Endpunkt auf dem genannten Kreise K mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ herumführt: Der Schwungvektor und mit ihm die Figurenachse beschreiben in **erster Näherung** eine reguläre Präzession

1) Siehe R. GRAMMEL, Der Kreisel, S. 61.

um die Lotlinie. Ist $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit dieser Präzession, μ ihr Be
so gilt

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{u}\mathfrak{S}],$$

woraus mit den Bezeichnungen (6) und (11) von Ziff. 20 und mit der e
Näherung $\mathfrak{S} \approx \mathfrak{S}_\varphi^0$ die **Präzessionsgeschwindigkeit** zu

$$\mu = \frac{s}{s_\varphi}$$

folgt, unabhängig vom Öffnungswinkel 2ϑ des Präzessionskegels.

Die Figurenachse des schnellen Kreisels weicht mithin der Schwere in e
Näherung senkrecht aus. Das Paradoxe dieser Erscheinung löst sich sofort
wenn man zur **zweiten Näherung** überg
Ist A (Abb. 22) der im ersten Augenblick
meinsame Durchstoßungspunkt von Figu
achse und Schwungachse mit der um O
legten Einheitskugel, so bewegt sich der Pu
als Punkt des Schwungvektors im ersten Z
element dt auf einem wagerechten Wegele
des wagerechten Kugelkreises K weiter.
können uns die Wirkung der Schwerkraft

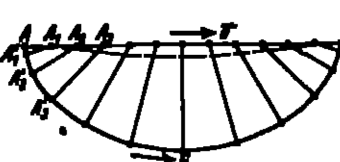


Abb. 22. Die Nutation des schweren symmetrischen Kreisels.

radezu durch einen kleinen momentanen Drehstoß $\mathfrak{M}dt$ ersetzt denken,
den Punkt A des Schwungvektors momentan nach A_1 verlegt, und den Kr
dann während des ersten Zeitelementes dt als kräftefrei ansehen. Die Figu
achse eines symmetrischen kräftefreien Kreisels aber beschreibt, wie wir
Ziff. 14 wissen, allemal eine reguläre Präzession um die Schwungachse; mit
muß der Punkt A' als Punkt der Figurenachse, im Zeitelement dt einen unend
kleinen Kreisbogen um A_1 von A nach A_1' beschreiben, wobei sich der Fahrstr
A_1A mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\mu' = s_\varphi$$

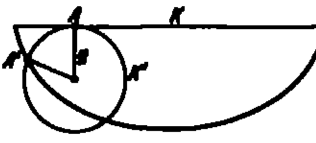


Abb. 23. Die Nutation des schweren symmetrischen Kreisels.

dreht, wie wir aus Ziff. 14, Gleichung (1),
nehmen, wenn wir die dortige Größe μ, die
der jetzt in (2) berechneten Größe μ nichts zu
hat, lieber mit μ' bezeichnen und wieder
hinreichender Genauigkeit $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\varphi$ setzen. D
Drehung μ' der Figurenachse um die Schwungachse ist als Präzession zwe
Ordnung anzusprechen; man nennt sie auch hier wieder **Nutation** und d
gemäß μ' die **Nutationsgeschwindigkeit**.

Man sieht, wie die Bewegung weitergeht: solange der Punkt A als Pu
der Schwungachse auf seinem wagerechten Parallelkreise gleichmäßig wei
wandert, beschreibt der von ihm nach der Figurenachse gezogene Fahrstr
A_1A_1', A_2A_2' usw. eine gleichförmige Drehung um ihn. Eine solche Beweg
des Punktes A' verläuft aber, wie bekannt, auf einer gespitzten Zykloide (Abb.
genauer auf einer sphärischen Zykloide, deren Spitzen stets aufwärts wei
(Da somit Figurenachse und Schwungachse in zweiter Näherung nicht ge
zusammenfallen, wird auch die Präzession des Schwungvektors nicht ge
regulär sein; einerseits wird μ leichte Schwankungen zeigen, andererseits
die Bahn von A leicht gewellt sein, wie es die gestrichelte Linie in Abb. 22
deutet. Aber diese Abweichungen brauchen für die zweite Annäherung ni
berücksichtigt zu werden.)

Man kann sich die sphärische Zykloide auch dadurch erzeugt denken,
die Kreiselspitze A' dem Umfang eines sphärischen Kreises K' vom sphärisch

Halbmesser ϱ angehört, der auf dem Kreise K vom Halbmesser $\sin\vartheta$ gleichförmig abrollt. Aus der Proportion

$$\varrho : \sin\vartheta = \mu : \mu'$$

folgt für den sphärischen Halbmesser des rollenden Kreises gemäß (2) und (3)

$$\varrho = \frac{\mu}{\mu'}\sin\vartheta = \frac{\varepsilon}{s_\psi^2}\sin\vartheta, \tag{4}$$

was nach unseren Voraussetzungen eine kleine Größe sein soll.

Beachtet man noch, daß die Eigendrehgeschwindigkeit $\nu = |\mathfrak{S}| : C = s_\psi A/C = s_\psi(\varepsilon + 1)$ ist, so folgt noch

$$\frac{\nu}{\mu'} = \varepsilon + 1. \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (2), (3) und (5) schließt man: Je schneller der Kreisel angetrieben worden ist, um so langsamer läuft die Präzession, und um so rascher erfolgen die Nutationen; diese sind beim gestreckten Kreisel immer langsamer, beim abgeplatteten immer schneller als die Eigendrehungen, verlaufen aber in jedem Falle gleichsinnig mit der Eigendrehung.

Wird der schnelle Kreisel mit einer gegen $\mathfrak{S}_\psi^0$ kleinen Störung $\mathfrak{S}_\chi^0$ oder $\mathfrak{S}_\vartheta^0$ losgelassen, oder kommt im Laufe der Bewegung infolge eines kleinen Stoßes auf die Figurenachse eine solche Störung hinzu, so ändert sich an den Formeln (1) bis (5) nichts, aber die Spitzen der Zykloide lösen sich nun auf: die Zykloide wird eine verschlungene oder eine gestreckte. Würde der ursprüngliche Eigenschwung $\mathfrak{S}_\psi^0$ beispielsweise im ersten Augenblick (wo die gespitzte Zykloide gerade mit der Spitze beginnen würde) durch einen Drehstoß $\mathfrak{S}_\chi^0$, dessen Vektor parallel zur dortigen Tangente des Kugelmeridians aufwärts weist, gestört, so würde der Punkt A der Schwungachse auf dem Meridian momentan um die sphärisch gemessene Strecke

$$\varrho^* = \frac{|\mathfrak{S}_\chi^0|}{|\mathfrak{S}_\psi^0|} = \frac{s_\chi}{s_\psi} \tag{6}$$

gegen den oberen Kugelpol hin versetzt, und die Figurenachse würde dann eine gestreckte Zykloide beschreiben, die man sich wieder in der Weise erzeugt denken könnte, daß die Kreiselspitze A' ein innerer Punkt des rollenden Kreises K' (Halbmesser ϱ) wäre, der auf dem um ϱ^* nach oben verschobenen Kugelkreise K abrollt, wobei A' vom Mittelpunkt des Kreises K' den Abstand

$$\varrho' = \varrho - \varrho^* = \frac{\varepsilon}{s_\psi^2}\sin(\vartheta - \varrho^*) - \frac{s_\chi}{s_\psi} \tag{7}$$

besäße. Bei umgekehrt gerichtetem Drehstoß $\mathfrak{S}_\chi$ würde $s_\chi < 0$ und also die Zykloide eine verschlungene sein.

Wählt man den Anfangstoß $\mathfrak{S}_\chi^0$ so, daß

$$s_\chi = \frac{\varepsilon}{s_\psi}\sin(\vartheta - \varrho^*) \tag{8}$$

wird, so fällt wegen $\varrho' = 0$ die Kreiselspitze A' dauernd mit dem Mittelpunkt des rollenden Kreises zusammen, und die pseudoreguläre Präzession ist jetzt wieder eine **reguläre** geworden. In der Tat geht die Gleichung (8) für hinreichend kleine Werte von s_χ/s_ψ ununterscheidbar genau in die Bedingungsgleichung (5) von Ziff. 26 für die reguläre Präzession über. Die so erzeugte reguläre Präzession ist identisch mit der in Ziff. 26 untersuchten **langsamen** regulären Präzession.

Man kann die vorstehenden Näherungsformeln wieder durch eine sorgfältige Fehlerabschätzung[1]) stützen, aus der übrigens hervorgeht, daß sie nur

[1]) F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 300.

so lange zuverlässig sind, als der Winkel ϑ von Null wesentlich verschieden bleibt, solange also die Figurenachse des schnellen Kreisels nicht und auch nicht angenähert lotrecht steht. Der Fall $\vartheta \approx 0$ aber ist schon in den Untersuchungen von Ziff. 28 enthalten.

30. Der Einfluß der Lagerung. Auch die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels wird durch die Reibung in Wirklichkeit wesentlich beeinflußt. Die quantitative Untersuchung stößt aber auch hier wie schon beim kräftefreien Kreisel auf erhebliche Schwierigkeiten. Immerhin gelingt es, wenigstens bei Beschränkung auf gewisse Haupttypen der Bewegung, durch einleuchtende Annahmen mit Näherungsmethoden qualitativen Aufschluß über die Wirkung der Reibung zu gewinnen und in befriedigender Weise die Beobachtungen zu erklären.

Die Lagerreibung hängt wieder ganz von der Art der Stützung des Kreisels ab. Die bisher vorliegenden Untersuchungen beschränken sich auf den schnellen Kreisel und seine pseudoreguläre Präzession (Ziff. 29).

Für den im Cardanischen Gelenk (vgl. Abb. 14b von Ziff. 16) aufgehängten schweren schnellen Kreisel macht Grammel[1]) den schematischen Ansatz (vgl. schon Ziff. 19), daß die in den Lagern der Figuren- und Lotachse auftretenden Reibungsmomente der Größe nach konstant sind, dem Sinne nach den herrschenden Winkelgeschwindigkeiten $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ um diese Achse entgegenwirken, während die Reibung im Lager der Knotenachse (Gelenk zwischen Innen- und Außenring) wegen der „langsamen" Änderung des Winkels ϑ außer acht bleibt. Hat das Reibungsmoment um die Figurenachse den Wert R', um die Lotachse (Präzessionsachse) den Wert R'', so folgt aus den Ansätzen für die Bewegung des immer nahezu in die Figurenachse fallenden Schwungvektors $\mathfrak{S}$ relativ zum Kreisel

$$\frac{d|\mathfrak{S}|}{dt} = -R', \qquad |\mathfrak{S}|\dot\vartheta = R''\sin\vartheta \tag{1}$$

durch Integration mit den Anfangswerten ϑ_0 und $\mathfrak{S}_0$

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta_0}{2}\cdot\left[\frac{|\mathfrak{S}_0|}{|\mathfrak{S}_0| - R't}\right]^{\frac{R''}{R'}}. \tag{2}$$

Bei Cardanischer Aufhängung senkt sich somit die Figurenachse des schnellen Kreisels mehr und mehr; die Kreiselspitze beschreibt an Stelle eines Kreises eine gegen den unteren Kugelpol konvergierende Spirale. Die Eigengeschwindigkeit nimmt dabei wegen ihrer Proportionalität mit $\mathfrak{S}$ zufolge der ersten Gleichung (1) mehr und mehr ab, ebenso die Nutationsgeschwindigkeit [Ziff. 29, Gleichung (3)], wogegen die Präzessionsgeschwindigkeit [Ziff. 29, Gleichung (2)] unter dem Einfluß der Reibung merkwürdigerweise zunimmt, eine Erscheinung, die sich gut beobachten läßt. Diese Ergebnisse beanspruchen aber nur so lange Gültigkeit, als durch die ständige Abnahme von $|\mathfrak{S}|$ nicht der Charakter eines schnellen Kreisels aufgehoben wird.

Ganz anders äußert sich der Einfluß der Reibung bei Pfannenlagerung, d. h. wenn das untere kugelförmig ausgebildete Ende der Figurenachse in einer flachkegelförmigen Pfanne (mit lotrechter Kegelachse) ruht, wie dies die Abb. 24a und b für die beiden Fälle zeigen, daß der Schwerpunkt S entweder schräg über oder schräg unter dem Stützpunkt O liegt. Man beschränkt sich wieder auf den schnellen Kreisel und setzt überdies voraus, daß die Figurenachse nicht und auch nicht angenähert wagerecht aufgesetzt wird; ferner vernachlässigt

[1]) R. Grammel, Der Kreisel, S. 116.

man die von den Nutationen herrührenden Schwankungen des Auflagerdruckes sowie die Reibungswirkungen infolge der Drehkomponente $\dot{\vartheta}$ gegenüber denen von $\dot{\psi}$ und sieht von der bohrenden Reibung (deren Moment lotrecht weist) ab gegenüber der gleitenden Reibung, deren Kraft als wagerecht und auf der Präzessionsebene senkrecht stehend angenommen werden darf, so daß das Moment der Gleitreibung bezüglich des Stützpunkts O ein in der Präzessionsebene liegender wagerechter Vektor von merklich festem Betrag R ist.

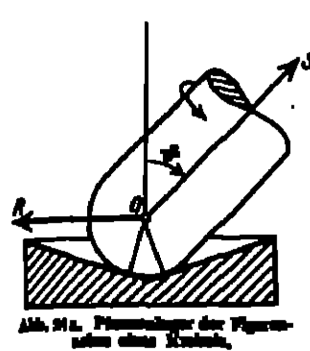


Abb. 24 a. Pfannenlager der Figurenachse eines Kreisels.

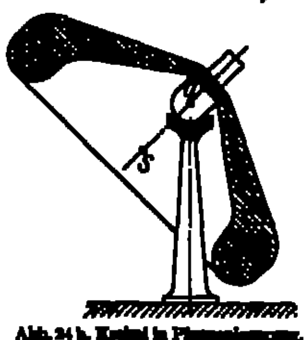


Abb. 24 b. Kreisel in Pfannenlagerung.

Je nachdem der Schwerpunkt S höher oder tiefer liegt als der Stützpunkt O, und je nachdem die Eigendrehung des Kreisels im einen oder anderen Sinne erfolgt, hat man vier Fälle zu unterscheiden, die in Abb. 25 dargestellt sind. Zerlegt man den Vektor R in zwei Komponenten R_1 und R_2 nach Figurenachse und Querachse, so erkennt man, daß erstens die Größe des Schwungvektors $\mathfrak{S}$, also die Eigendrehgeschwindigkeit ν, infolge der Reibung abnimmt, wogegen dann die Präzessionsgeschwindigkeit μ auch hier wieder zunimmt, und daß zweitens der Schwungvektor $\mathfrak{S}$ auf kürzestem Wege gegen die Lotrechte hin gezogen wird: Die Pfannenreibung richtet die Figurenachse des schnellen Kreisels auf oder senkt sie, je nachdem der Schwerpunkt höher oder tiefer als der Stützpunkt liegt. Auch diese Erscheinung, insbesondere das Aufrichten des Kreisels, läßt sich gut beobachten.

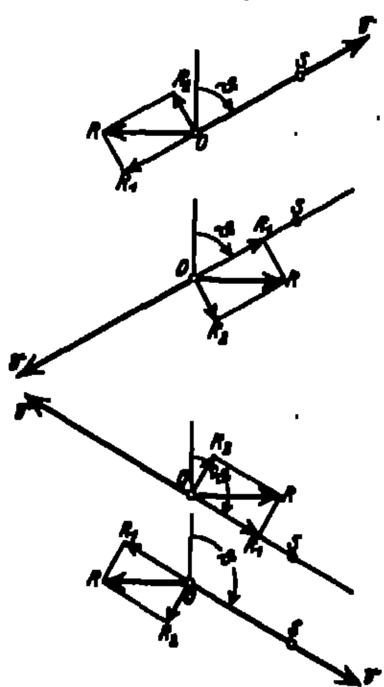


Abb. 25. Dynamik der Lagerreibung des schweren symmetrischen Kreisels.

Diese Schlüsse können auch formelmäßig durchgeführt werden[1]) und zeigen dann, daß das Lotrechtstellen der Figurenachse in endlicher Zeit erfolgt, wobei die Kreiselspitze eine Kurve beschreibt, die den oberen bzw. unteren Kugelpol wie eine Archimedische Spirale, also nicht bloß asymptotisch, sondern nach einer endlichen Anzahl von Windungen erreicht. Die Rechnung zeigt überdies, daß die Nutationen um so rascher erlöschen, je größer die Reibung ist.

Hat sich der Kreisel nahezu aufgerichtet bzw. gesenkt, so läßt die Wirkung der gleitenden Reibung nach, und nun tritt die bohrende Reibung ins Spiel. Sie verringert den Schwungvektor und drängt ihn von der Lotlinie ab, arbeitet also hier der Wirkung der gleitenden Reibung entgegen und kann das völlige

[1]) F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 557; R. Grammel, Der Kreisel, S. 118.

Aufrichten der Figurenachse verhindern. Auf alle Fälle hört der Kreisel mit der Zeit auf, ein schneller zu sein, und dann kann man je nach dem Kräfteverhältnis von bohrender zu gleitender Reibung sehr mannigfache, bis jetzt nicht genauer untersuchte Bewegungsformen beobachten. In der Regel ist der Lebenslauf eines schnellen Kreisels derart, daß zuerst die Nutationen, dann die Präzession und zuletzt die Eigendrehung erlöschen.

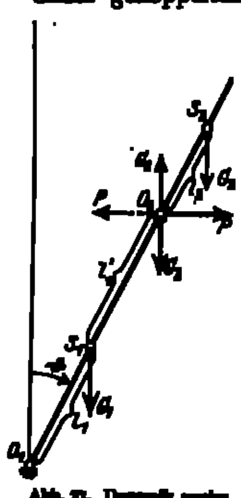
Abb. 26. Zwei symmetrische Kreisel aufeinandergesetzt.

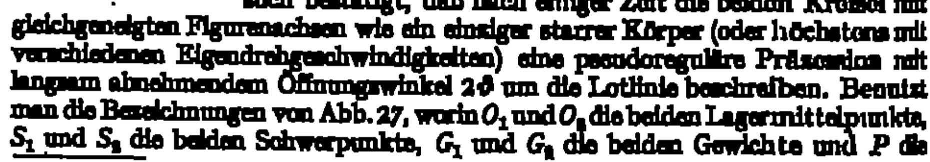
Eine Diskussion der Reibungserscheinungen am schweren symmetrischen Kreisel im Prandtlschen Gehänge (Ziff. 11) ist bisher nicht versucht worden.

Ebenso ist über die Wirkung der Luftreibung wenig bekannt. Lediglich für den schweren Kugelkreisel haben Klein und Sommerfeld[1]) einige Rechnungen durchgeführt, die naturgemäß auf sehr unsicherer Grundlage ruhen.

Es sei übrigens angemerkt, daß auch die Elastizität des Kreisels sowohl wie seiner Unterlage die Bewegung etwas beeinflussen; wir verweisen hierüber auf die Literatur[2]).

Schließlich erwähnen wir hier noch das merkwürdige Verhalten zweier gleichsinnig rotierenden Kreisel, von denen der eine mit dem unteren Ende seiner Figurenachse auf das pfannenförmige obere Ende des anderen aufgesetzt ist (Abb. 26). Beide Kreisel mögen schnell sein. Ohne uns auf die Dynamik dieses gekoppelten Systems näher einzulassen, können wir doch von vornherein folgendes feststellen: Die gleitende Reibung des unteren Kreisels in seinem Pfannenlager sucht diesen aufzurichten, die bohrende Reibung setzt seine Eigendrehzahl herab. Die gleitende Reibung des oberen Kreisels im pfannenförmigen oberen Ende des unteren Kreisels sucht die Figurenachse des oberen Kreisels in die Richtung der Figurenachse des unteren Kreisels zu stellen, die bohrende Reibung zwischen unterem und oberem Kreisel sucht die Eigendrehzahlen beider Kreisel einander anzupassen. Das Gleitreibungsmoment R_2, das der obere Kreisel auf den unteren ausübt, solange ihre Figurenachsen noch nicht gleichgestellt sind, wird bei gleicher Lagerbeschaffenheit beider Kreisel kleiner sein als das aufrichtende Gleitreibungsmoment R_1 des unteren Kreisels in seiner Lagerpfanne und kann daher das Aufrichten des unteren Kreisels wohl verzögern, aber in der Regel nicht verhindern. (Denn das untere Gleitreibungsmoment R_1 rührt vom Gesamtgewicht beider Kreisel her, das obere R_2 nur vom Gewicht des oberen Kreisels.) Es ist also zu erwarten und wird durch den Versuch bestätigt, daß nach einiger Zeit die beiden Kreisel mit


Abb. 27. Dynamik zweier aufeinandergesetzter symmetrischer Kreisel.


gleichgeneigten Figurenachsen wie ein einziger starrer Körper (oder höchstens mit verschiedenen Eigendrehgeschwindigkeiten) eine pseudoreguläre Präzession mit langsam abnehmendem Öffnungswinkel 2ϑ um die Lotlinie beschreiben. Benutzt man die Bezeichnungen von Abb. 27, worin O_1 und O_2 die beiden Lagermittelpunkte, S_1 und S_2 die beiden Schwerpunkte, G_1 und G_2 die beiden Gewichte und P die

[1]) F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 593.
[2]) F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 596.

wagerechte Reaktionskraft zwischen beiden Kreiseln bedeutet, und sind C_1 und C_2 die beiden axialen Trägheitsmomente, ν_1 und ν_2 die beiden Eigendrehgeschwindigkeiten, μ die gemeinsame Präzessionsgeschwindigkeit, so lauten die beiden nach dem Muster von Ziff. 29, Gleichung (1), aufgestellten Präzessionsgleichungen für die beiden Kreisel (die erste bezogen auf O_1, die zweite [gemäß Ziff. 4, Bemerkung zu Gleichung (6)] bezogen auf S_2)

$$\left.\begin{aligned}\mu\nu_1 C_1 \sin\vartheta &= [l_1 G_1 + (l_1 + l_1') G_2]\sin\vartheta + P(l_1 + l_1')\cos\vartheta,\\ \mu\nu_2 C_2 \sin\vartheta &= l_2 G_2 \sin\vartheta + P l_2 \cos\vartheta.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Aus ihnen folgt

$$\mu = \frac{l_1 l_2 G_1}{l_2\nu_1 C_1 - (l_1 + l_1')\nu_2 C_2}.$$

Nun muß, damit eine solche Präzession möglich ist, μ gemäß (5) immer positiv sein (wegen $|\vartheta| < 90°$), also $l_2\nu_1 C_1 > (l_1 + l_1')\nu_2 C_2$ bleiben. Soll die Zentrifugalkraft

$$P = \frac{\mu^2}{g}(l_1 + l_1' + l_2) G_2 \sin\vartheta$$

nicht allzu groß werden, der obere Kreisel also nicht aus seiner Pfanne springen, so muß μ ziemlich klein, also $l_2\nu_1 C_1$ sogar erheblich größer als $(l_1 + l_1')\nu_2 C_2$ sein. In der Tat gelingt der Versuch nur dann, wenn der Schwung $\nu_1 C_1$ des unteren Kreisels wesentlich größer als derjenige $\nu_2 C_2$ des oberen gewählt worden ist.

Läßt man die beiden Kreisel ungleichsinnig rotieren, so würden sie ihre Präzessionen in entgegengesetzter Richtung beschreiben. Die gleichrichtende Wirkung der Gleitreibung reicht dann nicht hin, zu verhindern, daß die (etwa mit annähernd gleicher Richtung aufeinandergesetzten) Figurenachsen alsbald infolge des ungleichen Präzessionssinnes einen scharfen Knick miteinander bilden und ihre Verbindung lösen: der obere Kreisel springt sofort aus seiner Pfanne. Eine quantitative Durchrechnung dieses interessanten Problems, dessen Ergebnisse hier qualitativ gegeben sind, wäre wegen der Rückwirkung des oberen auf den unteren Kreisel erwünscht.

VI. Weitere Bewegungen des starren Körpers.

31. Der unsymmetrische schwere Kreisel. Als symmetrisch haben wir einen schweren Kreisel dann bezeichnet, wenn erstens sein Trägheitsellipsoid bezüglich seines Stützpunkts O rotationssymmetrisch ist, und wenn zweitens der Schwerpunkt S auf der Symmetrieachse sitzt. Verliert der Körper eine dieser beiden Eigenschaften oder beide, so nennt man ihn einen unsymmetrischen schweren Kreisel. Es ist bis jetzt nicht gelungen, das Fundamentalproblem der Kinetik des starren Körpers ganz zu lösen, d. h. die Bewegung eines beliebig gestalteten, in einem Punkte drehbar festgehaltenen starren Körpers unter dem Einfluß der Schwerkraft in voller Allgemeinheit, sei es formelmäßig[1]), sei es auch nur anschaulich, zu beschreiben. Mathematisch würde das darauf hinauskommen, das aus Gleichung (11) von Ziff. 4

$$\mathsf{E}\dot{\mathfrak{o}} + [\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o})] = G[\mathfrak{e}\mathfrak{r}_s] \qquad (1)$$

sowie der kinematischen Gleichung

$$\dot{\mathfrak{e}} = [\mathfrak{e}\mathfrak{o}] \qquad (2)$$

bestehende System (wo $\mathfrak{r}_s$ der Fahrstrahl OS, ferner G das Gewicht des Körpers und $\mathfrak{e}$ einen von O aus lotrecht aufwärts weisenden Einheitsvektor bedeuten)

[1]) Eine formelmäßige Lösung durch trigonometrische Reihen, jedoch ohne Durchführung bis zur Erkenntnis der Bewegungsform, gab A. Rauter, Münchener Ber. 1914.

zu integrieren, d. h. den Drehvektor o und die Lage des Vektors c im Körp[er], d. h. die Raumstellung des Körpers, als Funktion der Zeit zu ermitteln. D[ie] Mannigfaltigkeit dieser Bewegungen ist ∞^{12}-fach (sechs Konstante verfügen üb[er] die Massenverteilung, z. B. die drei Hauptträgheitsmomente und die drei Schwe[r]punktskoordinaten im Gerüste der Hauptachsen des Stützpunkts; sechs weite[re] Konstanten definieren Anfangslage und Bewegungsbeginn). Wir berichten hi[er] ohne Wiedergabe der analytischen Rechnungen über diejenigen Sonderfälle, d[ie] bisher bewältigt sind.

Es gibt im wesentlichen drei Wege, auf denen man diesem Fundamenta[l]problem der Kinetik des starren Körpers nähergekommen ist: man hat entwed[er] die Mannigfaltigkeit der Massenverteilung oder die Mannigfaltigkeit der B[e]wegungsart eingeschränkt oder sich bei der ∞^{12}-fachen Mannigfaltigkeit auf d[ie] Nachbarschaft bekannter Fälle beschränkt.

Beispiele für die erste Einschränkung sind die in Abschnitt IV und V b[e]handelten Fälle des unsymmetrischen kräftefreien Kreisels (EULER) und d[es] symmetrischen schweren Kreisels (LAGRANGE). Einen dritten Fall hat SON[JA] KOWALEWSKI[1]) gelöst, bei welchem der Schwerpunkt in der Äquatorebene d[es] rotationssymmetrischen Trägheitsellipsoids des Stützpunkts liegt und überdi[es] das äquatoriale Trägheitsmoment doppelt so groß als das axiale sein muß. Auc[h] dieser Fall läßt sich auf Quadraturen zurückführen, da außer den für al[le] schweren Kreisel gültigen Integralen $N =$ konst. (Flächensatz) und $T + V =$ kon[st.] (Energiesatz) hier noch ein drittes, in den Komponenten von o und c algebraisch[es] Integral gefunden werden kann; eine anschauliche Beschreibung der Bewegun[g] ist aber nur schwer zu geben[2]). Weitere Fälle, wo das Problem durch Quadr[a]turen lösbar wäre, sind nicht möglich[3]). Die Mannigfaltigkeit der Bewegunge[n] ist in diesen drei integrablen Fällen jeweils ∞^{6}-fach.

Ebenso groß ist die Mannigfaltigkeit der von HESS[4]), JOUKOWSKY u. [a.] untersuchten sphärischen Pendelungen (im verallgemeinerten Sinne): d[er] Schwerpunkt wird aus irgendeiner Anfangslage mit oder ohne Stoß losgelasse[n]; seine Lage im Kreisel ist aber bei beliebigen Trägheitsmomenten noch an gewis[se] Bedingungen gebunden, und er bewegt sich dann wie der Massenpunkt eine[s] punktförmigen Raumpendels.

Eigentlich nur analytisches Interesse besitzen einige weitere Fälle v[on] spezialisierter Massenverteilung und spezialisierter Anfangsbewegung, die v[on] STEKLOFF[5]) und anderen russischen Mathematikern untersucht worden sin[d], aber kaum anschauliche Deutungen zulassen.

Ist der Kreisel nahezu symmetrisch, so kann man die Bewegung dadurch e[r]mitteln, daß man von der Bewegung des symmetrischen Kreisels (als intermediär[e] Bewegung im Sinne der Störungstheorie) ausgeht und dann mit den Methoden d[er] Störungstheorie die wirkliche Bewegung durch sukzessive Approximation aufsucht[6]).

Für Kreisel von ganz beliebiger Massenverteilung hat STAUDE[7]) eine auße[r]ordentlich einfache Bewegungsmöglichkeit gefunden, nämlich die gleichförmige

[1]) S. KOWALEWSKI, Acta math. Bd. 12, S. 177. 1889; vgl. auch E. T. WHITTAKER, An[a]lytische Dynamik, S. 175; sowie H. TALLQVIST, Acta soc. scient. Fennicae Bd. 50, Nr. 14. 192[.]

[2]) Einen Versuch dazu findet man bei F. KÖTTER, Bemerkungen zu F. Kleins u[nd] A. Sommerfelds Buch über die Theorie des Kreisels. Berlin 1899.

[3]) P. BURGATTI, Rend. Palermo Circ. Mat. Bd. 29, S. 369. 1910.

[4]) W. HESS, Math. Ann. Bd. 37, S. 153. 1890; P. A. NEKRASOFF, ebenda Bd. 47, S. 44[.] 1896; A. SOMMERFELD, Göttinger Nachr. 1898, S. 83.

[5]) Siehe den Bericht von R. MARCOLONGO, Rend. Palermo Circ. Mat. Bd. 16, S. 34[.] 1902; ferner P. STÄCKEL, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. Bd. 18, S. 120. 1909.

[6]) M. WINKELMANN, Zur Theorie des Maxwellschen Kreisels. Dissert. Göttingen 19[..]

[7]) O. STAUDE, Journ. f. Math. Bd. 113, S. 318. 1894; W. v. D. WOUDE, Math. Z[.] Bd. 16, S. 170. 1923.

Drehungen mit bestimmter Winkelgeschwindigkeit um gewisse ausgezeichnete körperfeste Stützpunktsachsen, die dabei lotrecht gestellt sein müssen. Diese Bewegungen folgen aus (1), wenn man dort $\dot{\mathfrak{o}} = 0$ nimmt; setzt man noch $\mathfrak{o} = \omega_0 \mathfrak{e}$, so hat man also

$$\omega_0^2[\mathfrak{e}(\mathsf{E}\mathfrak{e})] = G[\mathfrak{e}\mathfrak{r}_s], \tag{3}$$

woraus noch folgt

$$\mathfrak{r}_s[\mathfrak{e}(\mathsf{E}\mathfrak{e})] = 0. \tag{4}$$

Die Gesamtheit der durch $\mathfrak{e}$ definierten Achsen bildet einen körperfesten Kegel zweiter Ordnung, dessen Gleichung (4) in körperfesten Koordinaten mit $\mathfrak{e} = (x, y, z)$ und $\mathfrak{r}_s = (\xi, \eta, \zeta)$ lautet

$$(B - C)\xi y z + (C - A)\eta z x + (A - B)\zeta x y = 0. \tag{4a}$$

Diesem Kegel gehören insbesondere die drei Hauptträgheitsachsen sowie der Vektor $\mathfrak{r}_s$ als Erzeugende an. Es ist stets nur eine der beiden Halbstrahlen jeder Erzeugenden als lotrecht aufwärts gerichtete Drehachse brauchbar. Die zugehörige Drehgeschwindigkeit ω_0 ist durch (3) vollends bestimmt, der Drehsinn ist gleichgültig; und zwar ist $\omega_0 = 0$ für die permanente Drehachse $\mathfrak{r}_s$, und i. a. $\omega_0 = \infty$ für die drei Hauptträgheitsachsen. Bei besonderer Massenverteilung treten zahlreiche Sonderfälle ein, die wir hier nicht aufzählen. Die Frage nach der Stabilität der Staudeschen Drehungen ist von Grammel[1]) erledigt worden. Nur ein Teil der Staudeschen Achsen liefert stabile Drehungen: die Stabilität ist teils an eine untere, teils an eine obere Grenze für ω_0^2 geknüpft und bei manchen Kreiseln überhaupt ausgeschlossen.

Die Staudeschen Bewegungen sind übrigens die einzigen regulären Präzessionen, deren ein unsymmetrischer schwerer Kreisel fähig ist.

Dagegen sind in neuerer Zeit mehrere Bewegungsklassen des unsymmetrischen schweren Kreisels gefunden worden[2]), die man teils als Nachbarbewegungen einer regulären Präzession, teils als pseudoreguläre Präzession bezeichnen darf. Die erste Bewegungsklasse sind die Nachbarbewegungen der stabilen Staudeschen Drehungen und lassen sich folgendermaßen beschreiben: Auf einer die Drehung ω_0 mitmachenden Kugel mit dem Mittelpunkt O beschreiben die Durchstoßungspunkte der drei Hauptträgheitsachsen je zwei superponierte elliptisch polarisierte Schwingungen. Der Sonderfall des körperlichen Raumpendels von kleinen Amplituden[3]) ist hierin enthalten. Die zweite Bewegungsklasse betrifft den schnellen unsymmetrischen schweren Kreisel, d. h. einen solchen, der um eine seiner Hauptträgheitsachsen, welche aber nicht die des mittleren Hauptträgheitsmoments sein darf, so rasch rotiert, daß der resultierende Drehvektor der Gesamtbewegung merklich genau in diese Hauptachse hineinfällt. Ist C das Hauptträgheitsmoment um die Hauptachse und S' der Fußpunkt des vom Schwerpunkt S auf diese Hauptachse gefällten Lotes, so ist die Drehgeschwindigkeit μ der um die Vertikale erfolgenden Präzession die gleiche wie bei einem symmetrischen Kreisel, dessen Schwerpunkt in S' liegt und der denselben Stützpunkt O, dasselbe Trägheitsmoment C, dasselbe Gewicht und dieselbe Eigendrehgeschwindigkeit ν hat. Die Nutationen, von einem die gleichmäßige Präzessionsdrehung mitmachenden Beobachter gesehen, bestehen im allgemeinen aus vier zirkularpolarisierten Schwingungen; zwei dieser Schwingungen, die eine von größerer, die andere von kleinerer Frequenz als die Eigendrehung ν,

---

[1]) R. Grammel, Math. ZS. Bd. 6, S. 124. 1920.
[2]) R. Grammel, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. Bd. 29, S. 150. 1920, wo weitere Literatur angegeben ist.
[3]) L. Lecornu, Bull. Soc. Math. de France Bd. 30, S. 71. 1902.

hängen vom Anfangsstoß ab (sie arten beim symmetrischen schweren Kreisel in die eine Nutationsschwingung aus); die dritte Schwingung hat die Frequenz ν, hängt von der Schwerpunktslage ab und verschwindet nur dann, wenn entweder der Schwerpunkt auf die Rotationsachse rückt, oder wenn diese wagerecht präzessiert; die vierte Schwingung hat die Frequenz 2ν, hängt von der Schwerpunktslage und von der Unsymmetrie ab und verschwindet nur, wenn entweder der Punkt S' mit O zusammenfällt, oder die Hauptträgheitsmomente A und B gleich groß sind, oder die Rotationsachse merklich lotrecht steht.

32. Kreisel in allgemeineren Kraftfeldern; Geschosse als Kreisel. Unterliegt ein in einem Punkte drehbar festgehaltener starrer Körper einer beliebigen eingeprägten Kraft, und ist das Moment $\mathfrak{M}$ dieser Kraft bezüglich des Stützpunkts unabhängig von der Raumstellung des Körpers, so kennt man vermöge der kinetischen Grundgleichung (3) von Ziff. 4, $\dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{M}$, die Wanderung des Schwungvektors und vermöge der Energiegleichung (9) von Ziff. 5, $\dot{T} = \mathfrak{o}\mathfrak{M}$, die Änderungsgeschwindigkeit der Energie. Da der Körper aber in jedem Zeitelement das Element einer durch $\mathfrak{S}$ und T definierten Poinsot- oder MacCullagh-Bewegung beschreibt, so ist in diesem Falle auch seine Bewegung als bekannt anzusehen.

In der Regel ist freilich $\mathfrak{M}$ nicht unabhängig von der Raumlage des Körpers, und dann bereitet die Ermittlung der Bewegung selbst im Falle der einfachsten eingeprägten Kraft, der Schwere, erhebliche Schwierigkeiten (Abschn. V und Ziff. 31). Von allgemeineren Kraftgesetzen, für die wenigstens die Bewegung des symmetrischen Kreisels gefunden worden ist, erwähnen wir (wegen seiner Anwendungsmöglichkeiten auf Elektronen) das Folgende: Der Vektor $\mathfrak{M}$ liegt, wie bei der Schwere, in der Knotenachse, sein Betrag ist aber eine beliebige (in vernünftiger Weise einzuschränkende) Funktion des Eulerschen Winkels ϑ. Es läßt sich zeigen[1]), daß viele der für den schweren symmetrischen Kreisel gefundenen Ergebnisse qualitativ erhalten bleiben: so gibt es auch hier reguläre Präzessionen, darunter können labile sein; ferner schwankt auch hier die Bahn der Kreiselspitze im allgemeinen zwischen zwei Parallelkreisen hin und her, die Mannigfaltigkeit dieser Bahnkurven ist aber natürlich viel größer geworden.

Hierher gehört auch die Kinetik des fliegenden Langgeschosses, das beim Abschuß eine rasche Eigendrehung (Drall) mitbekommen hat, also — wenn man von seiner Vorwärtsbewegung absieht — einen schnellen Kreisel vorstellt. Das eingeprägte Moment rührt vom Luftwiderstand her, ist eine Funktion des Winkels ϑ zwischen Geschoßachse und Flugbahntangente und steht senkrecht auf der Ebene dieses Winkels. Die Flugbahntangente verringert ihre Neigung mehr und mehr, die Geschoßachse beschreibt also eine Art pseudoreguläre Präzession um die bewegliche Flugbahntangente als Präzessionsachse, und zwar im Sinne der Eigendrehung. Man stellt sich leicht vor und bestätigt auch durch genauere Rechnung[2]), daß für einen mitbewegten Beobachter die Geschoßspitze eine zykloidenartige Kurve beschreibt, die langsam von oben nach unten verläuft, und deren Bögen bei Rechtsdrall nach links, bei Linksdrall nach rechts offen sind und sich im Verlauf des Flugs mehr und mehr erweitern, bei flachen Bahnkurven aber doch dauernd sehr nahe der Bahntangente bleiben, falls das Geschoß „folg-

---

[1]) R. GRAMMEL, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 64, S. 129. 1916; offenbar ohne Kenntnis dieser Untersuchungen ist die Arbeit von H. TALLQVIST, Acta soc. scient. Fennicae Bd. 50, Nr. 14. 1926, über dasselbe Kraftgesetz entstanden.

[2]) Vgl. etwa C. CRANZ, Lehrbuch der Ballistik Bd. I, 5. Auflage, § 58. Berlin 1925; ferner den neuesten Bericht von C. CRANZ u. W. SCHMUNDT, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 4, S. 449. 1924.

sam" ist, was voraussetzt, daß sein Drall eine bestimmte obere Größe nicht übersteigt. Eine untere Grenze für den Drall ist durch die Stabilität der Langgeschosse vorgeschrieben. Bei Steilbahnen kann die Forderung der Folgsamkeit zu der der Stabilität in Widerspruch geraten. Die Erweiterung der Theorie auf diesen noch keineswegs geklärten Fall ist wiederholt in Angriff genommen worden[1]). Da die Geschoßpendelungen bei Rechtsdrall rechts von der Schußebene erfolgen, so erfährt das Geschoß eine Abtrift nach rechts, bei Linksdrall nach links. Bezüglich der genaueren Berechnung dieser Abtrift, die einige schwer erklärliche Abweichungen von der Theorie zeigt, muß auf die oben angeführte Literatur verwiesen werden.

33. Himmelskörper als Kreisel. Die Himmelskörper bilden Kreisel, die in erster Näherung als kräftefrei anzusehen sind; in zweiter Näherung sind die Gravitationswirkungen der benachbarten Massen zu berücksichtigen. Dies mag am Beispiel der Erde entwickelt werden[2]).

Die Erde besitzt ein sehr nahezu rotationssymmetrisches abgeplattetes Trägheitsellipsoid und dreht sich nahezu genau um ihre Symmetrieachse (Figurenachse). Indessen fallen Schwung- und Drehachse nicht völlig unter sich und mit der Figurenachse zusammen. Die wirkliche Bewegung ist in erster Näherung eine reguläre Präzession, wobei ein erdfester sehr enger Polkegel auf einem um die Schwungachse gelegten noch viel engeren Spurkegel perizykloidisch, d. h. ihn umschließend, abrollt (Ziff. 14). Die Vektoren der Präzessionsdrehung μ und der Eigendrehung ν fallen nahezu genau in entgegengesetzte Richtung (vgl. Abb. 12b von Ziff. 14), so daß aus Ziff. 14, Gleichung (1), mit $\cos\vartheta = -1$ für das Verhältnis von Präzessionsdauer t_1 zu siderischem Tag t_0 folgt

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{\omega}{\mu} = \frac{\mu - \nu}{\mu} = \frac{A}{C}. \tag{1}$$

Die halben Öffnungswinkel α und β des Pol- und Spurkegels verhalten sich sehr annähernd wie

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{C}{C - A}. \tag{2}$$

Endlich verhält sich die Umlaufsdauer t_2 des Drehvektors $\mathfrak{o}$ zum siderischen Tag wie

$$\frac{t_2}{t_0} = \frac{\omega}{\nu} = \frac{\mu - \nu}{\nu} = \frac{A}{C - A}. \tag{3}$$

Da A nur wenig kleiner als C ist, so ist ν sehr klein gegen μ, also ω nahezu identisch mit μ: die Präzessionsdrehung ist im wesentlichen das, was man gemeinhin die „Eigendrehung" der Erde nennt, die Eigendrehung im Sinne der Kreiseltheorie ist eine darübergelagerte ganz langsame Zusatzbewegung.

Wäre die Erde ein aus homogenen elliptischen Schalen zusammengesetztes Rotationsellipsoid vom axialen und äquatorialen Halbmesser a und b, so wäre

$$\frac{C}{A} = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2}{1 + \delta},$$

wo nach BESSEL

$$\delta = \frac{a^2}{b^2} = 0{,}9933$$

[1]) F. NOETHER, Artiller. Monatshefte 1919, S. 170, sowie Göttinger Nachr. 1919, S. 373.

[2]) Vgl. die mustergültige Darstellung bei F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, S. 633; ferner Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2, Art. 20 (BAUSCHINGER), sowie F. TISSERAND, Traité de mécanique céleste, 1891.

ist[1]). Demnach würde aus (1) bis (3)

$$\frac{t_1}{t_0} = 0{,}997, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = 300, \qquad \frac{t_2}{t_0} = 300.$$

Die Präzessionsdauer müßte also etwas weniger als einen Sterntag betragen, der Umlauf der Drehachse um die Figurenachse in der Erde etwa zehn Monate, eine von EULER theoretisch, wenn auch noch nicht dem Zahlenwert nach, entdeckte Periode; der halbe Öffnungswinkel des Spurkegels wäre 1/300 von demjenigen des Polkegels, welcher auf der Erdoberfläche um den Nordpol herum einen kleinen Kreis ausschneiden müßte. Die Wanderung des eigentlichen Drehpols auf diesem Kreise im Sinne der Erddrehung müßte sich in Schwankungen der geographischen Breite mit etwa zehnmonatiger Periode äußern.

Solche Schwankungen werden tatsächlich beobachtet. Ihre mittlere Amplitude ist 1/8″, was einem Halbmesser von etwa 4 m für den Kreis des Drehpols entspricht. Aber in Wirklichkeit ist die Bahn weder genau ein Kreis, noch wird sie in zehn Monaten durchlaufen. Es scheint sich vielmehr um die Überlagerung von mehreren Bewegungen zu handeln, von denen zwei von CHANDLER entdeckte mit Perioden von 14 und 12 Monaten die wichtigsten sind. Die erste läßt sich ansehen als diejenige Präzession, die der Erdkreisel vollzöge, wenn er nicht starr, sondern elastisch nachgiebig wäre; die zweite dürfte von den durch die Jahreszeiten bedingten Massenverlagerungen an den periodisch zu- und abnehmenden polaren Eiskappen herrühren. Wichtig ist die Erkenntnis, daß der halbe Öffnungswinkel des Spurkegels, nämlich 1/300 von 1/8″, so außerordentlich klein ist, daß die Drehachse auch bei äußersten Anforderungen an die astronomische Genauigkeit als vollkommen richtungsfest im Raume anzusehen ist, soweit die Bewegung des Erdkreisels als kräftefrei gelten kann.

In zweiter Näherung ist nun aber die Gravitationswirkung der übrigen Himmelskörper zu berücksichtigen, von denen natürlich nur der kleine, nahe Mond und die große, entferntere Sonne in Betracht kommen. Die Äquatorebene der Erde bildet mit der Ekliptik einen Winkel ϑ = rund 23,5°. In der Ekliptik befinden sich die Sonne und nahezu auch der Mond, und zwar umlaufen sie scheinbar die Erde in einem siderischen Jahr bzw. Monat. Ihre Wirkung auf den Erdkreisel ist so gering, daß sie sich erst in Jahrhunderten zu merklichen Beträgen anhäuft. Die elementare Theorie begnügt sich daher mit einem Mittelwert der jährlichen bzw. monatlichen Einwirkung von Sonne und Mond und sieht deren scheinbare Bahnen als Kreislinien an, auf denen die Sonnen- bzw. Mondmasse nach einem Vorschlag von GAUSS gleichförmig ringsum verteilt gedacht wird. Die Erde besteht infolge ihrer Abplattung sozusagen aus einer ungefähr homogenen Kugel, welche einen vom Äquator nach den Polen hin abnehmenden Ringwulst trägt. Die Anziehung der Sonnen- und Mondmasse auf die Kugel ist im Mittel Null; die Anziehung auf den Wulst dagegen bildet wegen der Schiefe der Erdachse gegen die Ekliptik ein Moment $\mathfrak{M}$, dessen Vektor in die Schnittlinie von Ekliptik und Äquatorebene der Erde („Knotenlinie") fällt. Die Erde ist gegenüber diesem kleinen Moment als ein schneller Kreisel anzusehen, dessen Figurenachse dauernd in großer Nähe der Schwungachse bleibt. Genau wie beim schweren Kreisel das um die Knotenachse wirkende

[1]) Über die genauesten Werte für die Trägheitsmomente der Erde, die auch im Äquator ein wenig verschieden sind, vgl. A. BERROTH, Gerlands Beiträge zur Geophysik Bd. 14, S. 259. 1918. Umgekehrt dient der neuesten Astronomie der aus Fixsternbeobachtungen sehr genau berechenbare Wert der Präzessionskonstanten dazu, aus ihr die Elliptizität $(C-A)/C$ der Erde zu finden, ohne daß man irgendwelche andere Hypothesen über die Massenverteilung des Erdkörpers machen muß als seine Starrheit und die Rotationssymmetrie seines Trägheitsellipsoids. Vgl. F. TISSERAND, Traité de mécanique céleste.

Schweremoment eine pseudoreguläre Präzession um die Lotlinie, d. h. um die Senkrechte des geometrischen Ortes aller Knotenachsen erzeugt und unterhält (Ziff. 29), so ruft unser jetziges Moment eine pseudoreguläre Präzession der Erdachse um die Lotlinie der Ekliptik hervor, und zwar erfolgt die Präzession, von der Nordseite der Ekliptik aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers, so daß der auf der Knotenlinie liegende Frühlingspunkt vorrückt und das tropische Jahr sich gegen das siderische langsam verkürzt. Das Vorrücken beträgt infolge des Einflusses der Sonne theoretisch etwa 16″ im Jahr, infolge des Mondes etwa 34″, insgesamt also rund 50″, in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die Erdachse beschreibt demgemäß in rund 26000 Jahren einen Präzessionskegel um die Lotlinie der Ekliptik.

An diesem Ergebnis muß die genauere Astronomie allerdings einige kleinere Verbesserungen anbringen. Die Momente der Wirkung von Sonne und Mond sind in Wirklichkeit nicht konstant, sondern schwanken mit der doppelten Umlaufsfrequenz der Erde um die Sonne und des Mondes um die Erde. Synchrone Schwankungen muß also auch die Präzession der Erdachse zeigen. Ferner sind die Exzentrizität der Erd- und Mondbahn sowie das Vorrücken des Perihels und Perigäums zu berücksichtigen. Die Amplitude aller so geweckten Schwankungen macht beim Vorrücken des Frühlingspunkts etwa 1″ aus. Wichtiger ist noch der Einfluß der Schiefe der Mondbahn gegen die Ekliptik; sie beträgt etwa 5°. Nun vollzieht aber der Mondkreisel[1] seinerseits unter dem Einfluß von Sonne und Erde eine pseudoreguläre Präzession, indem die Mondknotenachse, d. h. die Schnittlinie der Mond- und Erdbahnebene, langsam vorrückt mit einer Präzessionsdauer von $18^2/_3$ Jahren, genauer 6793 Tagen. Dieselbe Periode muß sich infolge der Rückwirkung des Mondes auf die Erde in deren Präzession wieder äußern. Sie wurde von Bradley entdeckt, und zwar zeigen Rechnung wie Beobachtung, daß die Erdachse außer ihrem großen Präzessionskegel vom halben Öffnungswinkel 23,5° noch einen viel kleineren elliptischen Kegel von 7″ bis 9″ halbem Öffnungswinkel in $18^2/_3$ Jahren beschreibt. Man nennt diese Präzession zweiter Ordnung die „Nutation“. Es wird aber nützlich sein, zu betonen, daß diese „Nutation“ mit der Nutation eines pseudoregulär präzessierenden Kreisels nichts zu tun hat. Dessen Nutationen müßten ungefähr die Dauer eines Tages haben und sind nicht im geringsten nachzuweisen. Im Gegensatz dazu sind die „Nutationen“ der Erde erzwungene Schwingungen, deren Periode mit der Umlaufsdauer der Mondknoten auf der Ekliptik übereinstimmt.

34. Der Spielkreisel[2]. Als **Spielkreisel** bezeichnet man einen rotationssymmetrischen, unten zugespitzten Körper, dessen Schwerpunkt S auf der Symmetrieachse liegt, und der mit seiner Spitze O auf einer wagerechten Ebene tanzt, die wir zunächst als vollkommen glatt ansehen mögen. Da hier im allgemeinen kein Punkt festbleibt oder auch nur festgehalten gedacht werden kann, so fällt der Spielkreisel nicht eigentlich unter die in Ziff. 11 gegebene Definition eines Kreisels; vielmehr sind bei ihm die Drehbewegung um den Schwerpunkt und die Gleitbewegung des Schwerpunkts kinetisch untrennbar miteinander verkoppelt. Kinematisch gehört der Spielkreisel zu denjenigen gebundenen Bewegungen, bei denen, im Unterschied zu den später (Ziff. 37) zu behandelnden Rollbewegungen, ein und derselbe Punkt des Körpers gezwungen ist, auf einer Fläche zu bleiben.

Da sowohl die Schwere wie auch (bei fehlender Reibung) der Reaktionsdruck der Stützebene lotrecht weisen, so kann sich die Geschwindigkeit des

[1] Über die genauere Mondtheorie vgl. außer den Lehrbüchern der theoretischen Astronomie namentlich: E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. II, Kap. 12.

[2] S. D. Poisson, Traité de mécanique Bd. 2, S. 198. Paris 1811.

Schwerpunkts nur in lotrechter Richtung ändern; seine Horizontalprojektion beschreibt eine Gerade mit konstanter Geschwindigkeit. Diese gleichförmige Bewegung denken wir uns weiterhin auf Ruhe transformiert, so daß die Schwerpunktsbewegung auf eine lotrechte Gerade beschränkt bleibt.

Führt man Eulersche Winkel ϑ, φ, ψ analog zum schweren symmetrischen Kreisel (Ziff. 20) ein, jedoch so, daß nun an Stelle des früheren Stützpunkts der jetzige Schwerpunkt S zum Scheitelpunkt von ϑ, φ, ψ gewählt wird, und benutzt man auch sonst sinngemäß die in Ziff. 20 gebrauchten Benennungen, wobei überall das auf den Stützpunkt bezogenen äquatoriale Trägheitsmoment A durch das auf den Schwerpunkt bezogene A' zu ersetzen ist, so kann man das in Ziff. 20 entwickelte Integrationsverfahren Schritt für Schritt mit geringfügigen Änderungen auf den Spielkreisel übertragen. Zunächst stellt man leicht fest, daß die Gleichungen (5) und (7) von Ziff. 20 für die Konstanz der Schwungkomponenten N und N' und für die Eulerschen Winkel φ und ψ erhalten bleiben. Lediglich das Energieintegral (9) von Ziff. 20 lautet etwas anders, weil jetzt die doppelte Bewegungsenergie $2T$ anstatt (2) von Ziff. 20 durch

$$2T = A'(p^2 + q^2) + Cr^2 + ml^2\dot{u}^2 \tag{1}$$

gegeben ist, wo m die Masse bedeutet. Man erhält so an Stelle von (9) Ziff. 20

$$\dot{u}^2 = W(u) \equiv \frac{U(u)}{1 + \lambda(1 - u^2)}, \tag{2}$$

wo noch zur Abkürzung

$$\frac{ml^2}{A'} = \lambda \tag{3}$$

gesetzt ist und U die frühere Kreiselfunktion (in A' statt A geschrieben) vorstellt. Zuletzt erscheinen die Bewegungsintegrale (10) von Ziff. 20 mit der neuen Kreiselfunktion W statt U.

Der kinematische Inhalt dieser Gleichungen, die nun von der hyperelliptischen Gattung sind, ist der Art nach derselbe wie derjenige der früheren Integrale. Insbesondere gilt auch für den Spielkreisel der Darbouxsche Satz über homologe Kreisel. Die Drehung um den Schwerpunkt S, der jetzt im allgemeinen periodisch auf und ab schwankt, ist von qualitativ ähnlichem Charakter wie die Drehung des schweren symmetrischen Kreisels um seinen Stützpunkt. Die Kurven, die die untere Spitze O auf der wagerechten Ebene aufzeichnet (Abb. 28a bis d), entsprechen durchaus den sphärischen Kurven (Abb. 18a bis c von Ziff. 23 und Abb. 20 von Ziff. 24) der früheren „Kreiselspitze". Der Stützdruck D schließlich folgt aus dem Schwerpunktsatz

$$ml\ddot{u} = D - G. \tag{4}$$

Auch beim Spielkreisel kann eine reguläre Präzession vorkommen, wobei dann der Schwerpunkt S in Ruhe verharrt und die untere Spitze O auf ihrer Stützebene gleichförmig einen Kreis beschreibt; die Präzessionsbedingung (4) von Ziff. 26 kann (mit A' statt A) ohne weiteres übernommen werden. Dasselbe gilt von der Stabilitätsbedingung (10) von Ziff. 24 für den aufrechten Spielkreisel; doch ist zu bemerken, daß, da stets $A' < A$ bleibt, ein und derselbe Kreisel als Spielkreisel schon bei geringerem Schwung, also schwächerem Antrieb, aufrecht stabil steht, als wenn seine untere Spitze (wie beim schweren symmetrischen Kreisel) festgehalten würde. Endlich wird man die Bewegung des schnellen Spielkreisels ebenfalls als pseudoreguläre Präzession bezeichnen müssen, weil auch bei ihm die Figurenachse im Mittel bei ungenauer Beobachtung einen Kreiskegel beschreibt. Die Präzessionsgleichung (2) von Ziff. 29 gilt unverändert;

die Nutationen tragen hier freilich ein verwickelteres Gepräge: von einem Nutationskegel kann nicht mehr die Rede sein[1]).

Der Einfluß der Reibung[2]) ist beim Spielkreisel wenigstens für den Fall der pseudoregulären Präzession untersucht worden. Nimmt man an Stelle der unteren Spitze eine kugelförmige Abrundung, so bewirkt die Reibung, daß der Schwerpunkt näherungsweise einen Kreis K, die Figurenachse näherungsweise ein einschaliges Rotationshyperboloid mit lotrechter Achse beschreibt, dessen Kehlkreis im allgemeinen etwas über jenem Schwerpunktskreise K liegt, wobei der Berührpunkt mit der wagerechten Stützebene dem Schwerpunkt immer ein

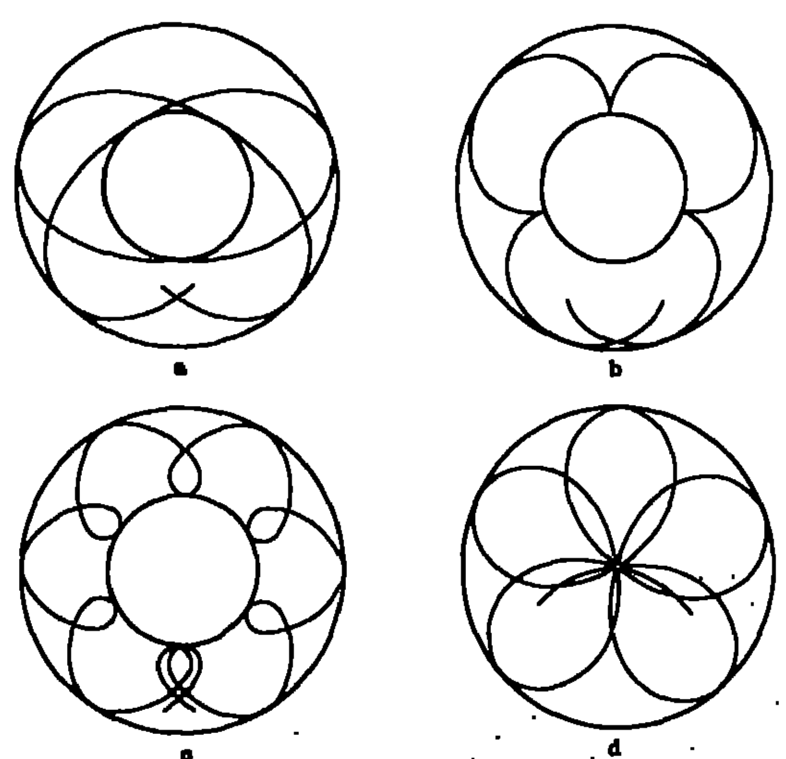


Abb. 28 a—d. Spuren des Spielkreisels.

wenig voraus ist und die Figurenachse sich mit enger werdendem Kreis K mehr und mehr aufrichtet. Und zwar richtet sich, wie Theorie und Beobachtung bestätigen, der Spielkreisel infolge der Reibung rascher auf als ein gleicher und gleich stark angetriebener Kreisel mit festem Stützpunkt.

Ist allerdings der Halbmesser der Kugel, die das untere Ende der Figurenachse bildet, recht klein, so kann sich der Kreis K auf einen Punkt zusammenziehen: die Kugel rollt dann ohne Gleiten auf der wagerechten Stützebene, und der Kreisel richtet sich nicht weiter auf. Wenn nun infolge der Rollreibung

[1]) Vgl. F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 513, wieder mit sorgfältiger Fehlerabschätzung des Näherungsverfahrens.

[2]) A. Smith, Cambridge Math. Journ. Bd. 1, S. 47. 1848; vgl. F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, S. 619; sowie R. Grammel, Der Kreisel, S. 123. Sehr schön werden die Kurven der unteren Kreiselspitze von tanzenden Uhrgläschen auf einer berußten Glasplatte aufgezeichnet.

die Eigendrehgeschwindigkeit kleiner wird, so erweitert sich der punktförmig gewordene Kreis K wieder und tritt nun über den Kehlkreis des Hyperboloids: von jetzt an eilt der Schwerpunkt dem Berührpunkt voraus, der Kreis erweitert sich, und die Figurenachse senkt sich.

Hier mag schließlich als Abart des Spielkreisels noch das tanzende Ei[1]) erwähnt werden, welches sich, rasch genug angetrieben, auf wagerechter rauher Ebene infolge der Reibung aufrichtet und auf die Spitze stellt, falls es hartgekocht ist; das weiche Ei tut dies nicht.

35. Das rollende Rad. Unter einem schweren Rad mag ein rotationssymmetrischer Körper verstanden sein, der unter dem Einfluß der Schwere auf einer wagerechten Ebene mit seinem schneidenförmigen Äquatorkreise (d. h. dem größten Parallelkreise) abrollt und dessen Schwerpunkt S im Mittelpunkt des Äquators liegt. Ist die Stützebene rauh, so besitzt der Reaktionsmotor $\mathfrak{R}$ einen durch den Berührpunkt P gehenden Kraftvektor $\mathfrak{R}$, der im allgemeinen schief steht, und außerdem ein durch P gehendes Moment $\mathfrak{R}_0$, dessen Vektor ebenfalls im allgemeinen geneigt ist. Vernachlässigt man Rollwiderstand und Drehwiderstand um die Schneide, so steht der Vektor $\mathfrak{R}_0$ auf der Stützebene senkrecht und drückt das Moment der bohrenden Reibung aus.

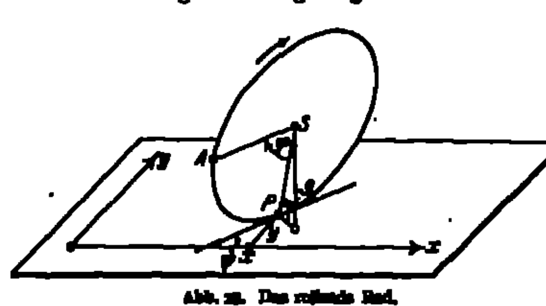


Abb. 29. Das rollende Rad.

Die eingeleitete Bewegung hat manche Ähnlichkeit mit der Bewegung eines Kreisels, ist aber analytisch viel verwickelter. Man kennzeichnet die Stellung des Rades am zweckmäßigsten durch die fünf in Abb. 29 erklärten Koordinaten $x, y, \varphi, \psi, \vartheta$; und zwar sind x, y die kartesischen Koordinaten des Berührpunktes P, φ der Winkel der Eigendrehung, ψ das Azimut der Äquatortangente in P und ϑ die Neigung der Äquatorebene. Ferner sei a der Halbmesser, m die Masse des Rades und C bzw. A das axiale bzw. äquatoriale Trägheitsmoment. Aus der nach Ziff. 5, Gleichung (4), gebildeten doppelten Bewegungsenergie

$$\left.\begin{aligned}2T = m[\dot x^2 + \dot y^2 &+ 2a\dot x(\dot\psi\cos\vartheta\cos\psi - \dot\vartheta\sin\vartheta\sin\psi)\\ &+ 2a\dot y(\dot\psi\cos\vartheta\sin\psi + \dot\vartheta\sin\vartheta\cos\psi) + a^2(\dot\psi^2\cos^2\vartheta + \dot\vartheta^2)]\\ &+ C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)^2 + A(\dot\psi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2)\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

folgen nach der Lagrangeschen Vorschrift für die fünf Koordinaten die fünf Bewegungsgleichungen[2]), in denen die Komponenten des Reaktionsmotors (einschließlich der Gleitreibung) in leicht verständlicher Weise mit R_x, R_y, $R_{0\vartheta}$, $R_{0\varphi}$, $R_{0\psi}$ bezeichnet sind und zur Abkürzung

$$ma^2 = F \qquad (2)$$

---

[1]) H. W. Searman, Phil. Mag. Bd. 5, S. 458. 1903; sowie L. Föppl, Rotierendes Ei auf horizontaler Unterlage. Göttingen 1914.

[2]) Vgl. etwa A. Föppl, Vorles. üb. techn. Mech. Bd. 6, § 30; P. Appell, Traité de mécanique Bd. 2, S. 282. Paris 1904; E. J. Routh, Dynamik, Bd. 2, § 241; H. Lamb, Higher mechanics, § 68.

gesetzt ist:

$$m\ddot{x} + ma\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\vartheta\sin\psi) = R_x, \tag{3}$$

$$m\ddot{y} + ma\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\psi) = R_y, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} & ma\sin\vartheta(-\ddot{x}\sin\psi + \ddot{y}\cos\psi) + (A+F)\ddot{\vartheta} \\ & \quad + (C-A+F)\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + C\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\vartheta = R_{s\vartheta} - mga\cos\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} & ma\cos\vartheta(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi) + [A + (C-A+F)\cos^2\vartheta]\ddot{\psi} + C\ddot{\varphi}\cos\vartheta \\ & \quad - 2(C-A+F)\dot{\vartheta}\dot{\psi}\sin\vartheta\cos\vartheta - C\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\vartheta = R_{s\psi}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$C(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}\cos\vartheta - \dot{\vartheta}\dot{\psi}\sin\vartheta) = -a(R_x\cos\psi + R_y\sin\psi) + R_{s\varphi} + R_{s\psi}\cos\vartheta. \tag{7}$$

Dieses System, das durch physikalische Vorschriften über die Gesetze der Reibungsgrößen R_x, R_y, $R_{s\vartheta}$, $R_{s\psi}$, $R_{s\varphi}$ und durch die Gleichung für die Vertikalbewegung des Schwerpunkts

$$ma\frac{d^2\sin\vartheta}{dt^2} = R_z - mg \tag{8}$$

zu ergänzen wäre, ist einer allgemeinen Integration bis jetzt unzugänglich geblieben.

Wohl aber gibt es auch hier leicht integrable Sonderbewegungen von großer Wichtigkeit, welche man als **reguläre Präzessionen** und deren **Nachbarbewegungen** bezeichnen könnte. Sieht man nämlich von der Schneidendrehreibung $R_{s\vartheta}$ sowie vom Rollwiderstand $R_{s\varphi}$ ab und setzt außerdem **reines Rollen** voraus, nimmt also die Bedingungen des Nichtgleitens und des Nichtbohrens

$$\dot{x} = a\dot{\varphi}\cos\psi, \qquad \dot{y} = a\dot{\varphi}\sin\psi, \qquad \dot{\psi} = -\dot{\varphi}\cos\vartheta \tag{9}$$

hinzu, so werden die Gleichungen (3) bis (7) durch die „intermediären" Integrale

$$\vartheta = \text{konst.} = \vartheta_0, \qquad \dot{\varphi} = \text{konst.} = \nu \tag{10}$$

erfüllt und liefern die Bohrreibung $R_{s\psi} = 0$ sowie die Bedingung

$$[A + (C-A+F)\sin^2\vartheta_0]\nu^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 = mga\cos\vartheta_0. \tag{11}$$

Diese verlangt entweder $\vartheta_0 = 90°$ bei beliebiger Eigendrehgeschwindigkeit ν (aufrechte „reguläre Präzession", d. h. aufrechte ebene Rollbewegung, vgl. Ziff. 9) oder für $\vartheta_0 \neq 90°$ die Eigendrehgeschwindigkeit

$$\nu = \sqrt{\frac{mga}{[A + (C-A+F)\sin^2\vartheta_0]\sin\vartheta_0}}, \tag{12}$$

wobei der Berührpunkt P einen Kreis vom Halbmesser $a/\cos\vartheta_0$ in der wagerechten Stützebene beschreibt. Tatsächlich bewirken Schneiden-, Roll- und Luftwiderstand ein allmähliches Abnehmen von ϑ_0 und damit ein Zunehmen von ν: der Schwerpunkt senkt sich und die Bewegung wird zuletzt plötzlich am Boden abgebremst.

Man hätte die Gleichungen (10) und (11) auch aus (1) und den **nichtholonomen** Bedingungen (9) unmittelbar herleiten können, wenn man die Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome Bewegungen[1]) benutzt hätte.

Dasselbe gilt von den Gleichungen, die man aus (3) bis (7) erhält, wenn man darin $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{\psi}$ vermittels (9) eliminiert. Diese Gleichungen dienen dann dazu, die **Nachbarbewegungen** der gleit- und bohrfreien regulären Prä-

[1]) Vgl. Kap. 2, Ziff. 13 ds. Bd. des Handb.

zessionen zu untersuchen, vorausgesetzt, daß dabei die Haftreibung R_x, R_y und der Widerstand gegen Bohren $R_{\vartheta\psi}$ hinreichend groß sind. So findet man statt (5)

$$(A+F)\ddot{\vartheta} - [A+(C-A+F)\sin^2\vartheta]\,\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta = -mga\cos\vartheta \qquad (13)$$

und ebenso aus (3), (4), (6), (7), indem man zugleich noch R_x, R_y, $R_{\vartheta\psi}$ eliminiert,

$$[A+(C-A+F)\sin^2\vartheta]\,\ddot{\varphi}\sin\vartheta + [2A+3(C-A+F)\sin^2\vartheta]\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\cos\vartheta = 0. \qquad (14)$$

Dabei ist die Voraussetzung $R_{\vartheta\vartheta} = R_{\vartheta\varphi} = 0$ des Verschwindens des Schneckendreh- und Rollwiderstandes beibehalten und der uninteressante Fall $\vartheta = 0$ ausgeschieden.

Die Nachbarbewegung der **aufrechten regulären Präzession** kann durch $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \vartheta'$ und $\dot{\varphi} = \nu + \nu'$ dargestellt werden, wo ϑ' und ν' als kleine Größen behandelt werden dürfen. Man erhält aus (13)

$$(A+F)\ddot{\vartheta}' + [\nu^2(C+F) - mga]\,\vartheta' = 0$$

und schließt hiernach, daß das aufrechte Rollen nur so lange stabil ist, als

$$\nu^2 > \frac{mga}{C+F} \qquad (15)$$

bleibt. Die Schwankungen ν' erweisen sich dann als klein von zweiter Ordnung; die Schwankungen ϑ' sind harmonisch, und die Spur des Berührpunktes P auf der Stützebene windet sich in Form einer Sinuslinie um eine Gerade, wobei auf jede volle Raddrehung

$$n = \sqrt{\frac{\nu^2(C+F) - mga}{\nu^2(A+F)}} \qquad (16)$$

Schwankungen entfallen.

Die Nachbarbewegung einer nicht und auch nicht annähernd aufrechten **schiefen regulären Präzession** $\vartheta_0 \neq 90^\circ$ kann durch $\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta'$ und $\dot{\varphi} = \nu + \nu'$ dargestellt werden, und die Gleichungen (13) und (14) zeigen dann, daß die kleinen Größen ϑ' und ν' harmonisch mit der Schwingungsdauer

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(A+F)\sin\vartheta_0}{3mga\cos^2\vartheta_0}} \qquad (17)$$

schwanken. Man schließt darum auf die Stabilität der regulären Präzessionen (12).

Übrigens kann man die Gleichungen (13) und (14) auch **allgemein** integrieren, wenn man nach dem Vorgang von APPELL und KORTEWEG[1]) die Gesamtdrehgeschwindigkeit um die Radachse

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta = \dot{\varphi}\sin^2\vartheta \qquad (18)$$

einführt, wobei auf die dritte Gleichung (9) zu achten war. Damit geht (14) über in

$$[A+(C-A+F)\sin^2\vartheta]\,\dot{r} + (C-A+F)\,r\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

mit dem Integral

$$[A+(C-A+F)\sin^2\vartheta]\,r^2 = D, \qquad (19)$$

wo D eine Integrationskonstante bedeutet. Setzt man den hiernach aus (18) folgenden Wert $\dot{\varphi}(\vartheta)$ in die Gleichung (13) ein, so nimmt diese die Form $\ddot{\vartheta} = f(\vartheta)$ an, aus der durch Integration zunächst ϑ und dann auch φ als Funktion der Zeit zu finden sind.

[1]) P. APPELL u. D. J. KORTEWEG, Rend. Palermo Circ. Mat. Bd. 14, S. 1. 1900.

Man spezialisiert die vorstehenden Ergebnisse auf eine homogene Scheibe mit $C = 2A = \frac{1}{2}F$, auf einen homogenen Reifen mit $C = 2A = F$.

In ähnlicher Weise ist das Problem des rollenden Rades der Behandlung zugänglich, wenn man die dritte Gleichung (9) des Nichtbohrens wegläßt. Die Mannigfaltigkeit der regulären Präzessionen wird dann größer; die allgemeine Lösung ist auch jetzt noch ebenso möglich. Dieser Fall ist für die Theorie des Fahrrades von Bedeutung und wird dort behandelt werden[1]).

36. Die Billardkugel. Die Theorie der auf einer rauhen wagerechten Stützebene mit oder ohne Gleiten rollenden Kugel[2]) läßt sich in vektorieller Schreibweise äußerst anschaulich wiedergeben, falls der Schwerpunkt in der Kugelmitte liegt. Bei einer solchen Kugel fallen nämlich der Drehvektor $\mathfrak{o}$ und der Schwungvektor $\mathfrak{S}$ immer in dieselbe Achse.

Von Rollwiderstand soll zunächst abgesehen werden. Die Wirkung der bohrenden Reibung und der Gleit- bzw. Haftreibung kann ganz getrennt behandelt werden. Der Momentvektor $\mathfrak{R}_0'$ der Bohrreibung steht auf der Stützebene senkrecht, und zwar entgegengesetzt der lotrechten Komponente $\mathfrak{o}'$ des Drehvektors. Nach der kinetischen Grundgleichung $\dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{R}_0'$ [Ziff. 4, Gleichung (3)] zieht also die Bohrreibung den Schwungvektor in die Wagerechte hinein, ohne dabei eine Wirkung auf die wagerechte Komponente von $\mathfrak{S}$ auszuüben. Ist A das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt S, so wird einfach

$$\omega' = \omega_0' - \frac{R_0'}{A}t, \tag{1}$$

falls ω' und R_0' die Beträge von $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{R}_0'$ sind und ω_0' den Anfangswert der lotrechten Drehkomponente bedeutet.

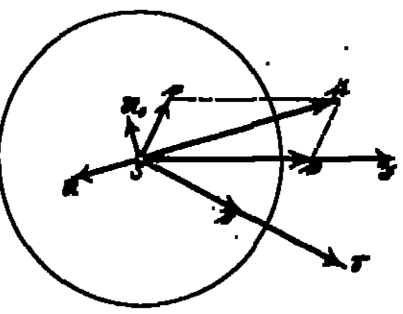


Abb. 30. Kinetik der Billardkugel.

Um die Wirkung der **Gleitreibung** zu finden, trage man (Abb. 30) in einer wagerechten Ebene durch S den Vektor $\mathfrak{v}$ der Schwerpunktsgeschwindigkeit, den Impulsvektor $\mathfrak{J} = m\mathfrak{v}$, die wagerechte Drehkomponente $\mathfrak{o}$, die wagerechte Schwungkomponente $\mathfrak{S} = A\mathfrak{o}$ sowie die von $\mathfrak{o}$ herrührende Geschwindigkeit $\mathfrak{c} = [\mathfrak{o}\mathfrak{r}]$ des senkrecht unter S liegenden Berührpunkts P auf, wo $\mathfrak{r}$ den Fahrstrahl von S nach P bedeutet. Dann ist die Gleitgeschwindigkeit von P

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + [\mathfrak{o}\mathfrak{r}] \tag{2}$$

und also, solange der Betrag $u \neq 0$ bleibt, die Gleitreibung

$$\mathfrak{R} = -\frac{mgf}{u}\mathfrak{u}$$

und ihr Moment bezüglich S

$$\mathfrak{R}_0 = [\mathfrak{r}\mathfrak{R}] = -\frac{mgf}{u}[\mathfrak{r}\mathfrak{u}],$$

wo f die Reibungsziffer ist. Hiernach lauten die kinetischen Grundgleichungen (3) von Ziff. 4

$$m\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{R} = -\frac{mgf}{u}\mathfrak{u}, \qquad A\dot{\mathfrak{o}} = \mathfrak{R}_0 = -\frac{mgf}{u}[\mathfrak{r}\mathfrak{u}], \tag{3}$$

---

[1]) S. Kap. 9, Ziff. 42ff. ds. Bd. des Handb.

[2]) T. A. Euler (der Jüngere), Mém. Acad. Berlin 1758; G. Coriolis, Théorie math. des effets du jeu de billard. Paris 1835. Das Rollen einer Kugel auf schiefer Ebene untersuchte F. Minding, Handbuch der theoret. Mechanik, S. 325. Berlin 1838; vgl. auch P. Painlevé, Leçons sur le frottement, S. 41. Paris 1895.

und daraus folgt nach (2) mit dem Kugelhalbmesser a und der schon in der vorigen Ziffer benutzten Abkürzung $F = ma^2$

$$\dot{\mathfrak{u}} = -\left(1 + \frac{F}{A}\right)\frac{gf}{u}\,\mathfrak{u}. \qquad (4)$$

Diese Gleichung sagt aber aus, daß sich die Richtung des Gleitvektors $\mathfrak{u}$ nicht ändert, daß vielmehr $\mathfrak{u}$ nur seinen Betrag ändert, und zwar gilt mit dem Anfangswert u_0 der Gleitgeschwindigkeit

$$u = u_0 - \left(1 + \frac{F}{A}\right)gft.$$

Das Gleiten hört also auf und es beginnt reines Rollen nach Verlauf der Zeit

$$t_1 = \frac{u_0}{\left(1+\frac{F}{A}\right)gf}.$$

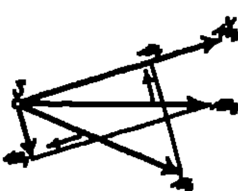


Abb. 31. Kinematik der Billardkugel.

Mit $\mathfrak{u}/u$ sind auch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ feste Vektoren geworden, und man schließt aus der ersten kinetischen Gleichung (3), daß der Schwerpunkt sich mit konstanter wagerechter Beschleunigung $\mathfrak{R}/m$ bewegt, also eine Parabel beschreibt, deren Achse parallel zu $\mathfrak{u}_0$ ist. Für einen die Bewegung von S mitmachenden Beobachter bewegt sich die Pfeilspitze von $\mathfrak{v}$ gleichförmig auf einer zu $\mathfrak{u}_0$ parallelen Geraden, die Pfeilspitze von $\mathfrak{o}$ ebenso auf einer zu $\mathfrak{u}_0$ normalen wagerechten Geraden (Abb. 31), und das reine Rollen beginnt in dem Augenblick t_1, wo $\mathfrak{o}$ in die Richtung von $\mathfrak{u}_0$ und $\mathfrak{v}$ in die dazu senkrechte Richtung gelangt ist. Die so erreichten Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{o}_1$ bleiben bei der dann folgenden reinen Rollbewegung konstant.

Diese Ergebnisse gelten nicht mehr, sobald Rollreibung hinzukommt. Vielmehr ändert der Momentvektor $\mathfrak{M}_0'$ des Rollwiderstandes von sich aus die wagerechte Schwungkomponente, indem er sie unablässig verkleinert. Dann aber behält $\mathfrak{u}$ im allgemeinen seine Richtung nicht mehr bei.

Für die homogene Kugel ist hierbei $A = \frac{2}{5}F$, für die Kugelschale $A = \frac{2}{3}F$ zu setzen.

37. Die allgemeine Roll- und Gleitbewegung des starren Körpers. Das in Ziff. 10 über die ebene Bewegung Gesagte gilt in entsprechender Erweiterung auch für die räumliche gebundene Bewegung. Neben den Führungskurven können hierbei noch körper- und raumfeste Führungsflächen auftreten. Außer den in Ziff. 34 bis 36 aufgezählten Problemen sind zahlreiche weitere Beispiele in der Literatur behandelt worden, die freilich nur selten mehr als analytisches Interesse besitzen. Besonders ausführlich ist die Roll- und Gleitbewegung von beliebig gestalteten Körpern auf einer glatten oder rauhen Ebene untersucht worden, ferner das Rollen und Gleiten von Kugeln auf Umdrehungsflächen[1]).

Soweit es sich dabei um gleitfreies Rollen handelt, kann man unmittelbar die Gleichungen (10) von Ziff. 4 verwenden. Wählt man, was häufig eine große Vereinfachung bringt, den Schwerpunkt S zum Bezugspunkt O', so lauten jene Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m(\dot{\mathfrak{v}}_s + [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_s]) &= \mathfrak{K} + \mathfrak{R}, \\ \mathsf{E}\dot{\mathfrak{o}} + [\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o})] &= \mathfrak{M}' + \mathfrak{R}_0', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

---

[1]) S. D. POISSON, Traité de mécanique; E. J. ROUTH, Dynamik, Bd. II, Kap. 5; E. T. WHITTAKER, Analytische Dynamik, Kap. 6 u. 8; F. NOETHER, Die Bewegung einer rollenden Kugel auf Rotationsflächen. Dissert. München 1909.

wobei $\mathfrak{v}_0$ die Geschwindigkeit des Bezugspunktes S und $\mathfrak{o}$ die Drehgeschwindigkeit des Körpers bedeutet. Dazu tritt die Bedingung des Nichtgleitens

$$\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{o}\mathfrak{r}'] = 0, \tag{2}$$

unter $\mathfrak{r}'$ den Fahrstrahl von S zum augenblicklichen Berührpunkt O'' der rollenden gegen die feste Fläche verstanden. Sieht man von rollender und bohrender Reibung ab, so ist außerdem

$$\mathfrak{R}'_s = [\mathfrak{r}'\mathfrak{R}]. \tag{3}$$

Durch Elimination von $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{R}$ sowie $\mathfrak{R}'_s$ folgt aus (1) bis (3)

$$\mathsf{E}\dot{\mathfrak{o}} + [\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o})] + m[\mathfrak{r}'\{[\dot{\mathfrak{o}}\mathfrak{r}'] + [\mathfrak{o}\dot{\mathfrak{r}}'] + [\mathfrak{o}[\mathfrak{o}\mathfrak{r}']]\}] = \mathfrak{M}' - [\mathfrak{r}'\mathfrak{K}]. \tag{4}$$

Nun sei die ruhende Fläche, bezogen auf einen ruhenden Punkt O, durch die Gleichung $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\varphi, \psi)$, die bewegte Fläche, bezogen auf das mit $O' \equiv S$ laufende körperfeste System durch die Gleichung $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}'(\varphi', \psi')$ dargestellt; die feste Fläche ist also mit einem Netz von φ- und ψ-Kurven, die bewegte mit einem Netz von φ'- und ψ'-Kurven bedeckt, und die Vektoren

$$\mathfrak{a} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varphi}, \qquad \mathfrak{b} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \psi}, \qquad \mathfrak{a}' = \frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial \varphi'}, \qquad \mathfrak{b}' = \frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial \psi'} \tag{5}$$

stellen die Tangentenrichtungen dieser Kurven vor. Die Bedingung des Berührens der beiden Flächen in dem Punkte $(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')$ lautet

$$\frac{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]}{|[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]|} = \frac{[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}']}{|[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}']|} = \mathfrak{n}, \tag{6}$$

wo $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor der gemeinsamen Flächennormalen ist. Die Bedingung des Nichtgleitens kann in der Form $d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}'$ geschrieben werden oder

$$\mathfrak{a}\,d\varphi + \mathfrak{b}\,d\psi = \mathfrak{a}'d\varphi' + \mathfrak{b}'d\psi'. \tag{7}$$

Definiert man noch einen Winkel ϑ am Berührpunkt O'' durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{|[\mathfrak{a}\mathfrak{a}']|}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'}, \tag{8}$$

so kann man die Größen φ, ψ, φ', ψ', ϑ als Lagekoordinaten des rollenden Körpers ansehen und muß sich die eingeprägte Kraft $\mathfrak{K}$ sowie ihr Moment $\mathfrak{M}'$ als Funktionen dieser Lagekoordinaten gegeben denken. Dann aber stellt die Differentialgleichung (4) auch die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ als Funktion dieser Lagekoordinaten dar und löst das Problem in Verbindung mit (5) bis (8).

Häufig erweist sich noch ein anderer Ansatz als wirksam, der zwar schon früher gelegentlich verwendet, aber erst von Heun[1]) systematisch durchgebildet worden ist. Man wählt außer dem raumfesten Bezugssystem um O und dem körperfesten um S noch ein drittes Bezugssystem, das an den Berührpunkt O'' und die gemeinsame Flächennormale $\mathfrak{n}$ sowie den Vektor $\mathfrak{a}'$ gebunden ist, und hat zunächst wegen (2)

$$\mathfrak{J} = m\mathfrak{v}_0 = -m[\mathfrak{o}\mathfrak{r}'], \qquad \mathfrak{S}' = \mathsf{E}\mathfrak{o} \tag{9}$$

bezüglich S. Nun geht man zu O'' als Bezugspunkt für das Impulsmoment über und erhält dieses nach Ziff. 4, Gleichung (5), und mit Benützung von (9):

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}'' = \mathfrak{S}' - [\mathfrak{r}'\mathfrak{J}] &= \mathsf{E}\mathfrak{o} + m[\mathfrak{r}'[\mathfrak{o}\mathfrak{r}']] \\ &= \mathsf{E}\mathfrak{o} + m\{\mathfrak{r}'^2\mathfrak{o} - \mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'\mathfrak{o}\};\end{aligned}$$

wo der Punkt die dyadische Multiplikation anzeigt[2]). Führt man den sog.

Rolltensor

$$\mathsf{P} = \mathsf{E} + m(\mathfrak{r}'^2\mathsf{I} - \mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}') \tag{10}$$

---

[1]) K. Heun, Encykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 2, S. 406.

[2]) Vgl. J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, 2. Aufl., S. 285.

ein (wo I der Einheitstensor oder Idemfaktor ist), so gewinnt $\mathfrak{S}''$ die einfache Form

$$\mathfrak{S}'' = \mathsf{P}\mathfrak{o}. \tag{11}$$

Jetzt lauten die Impulsgleichungen (8) von Ziff. 4 für das Bezugssystem $O''(\mathfrak{n};\mathfrak{a}')$, in welchem bei fehlender Roll- und Bohrreibung $\mathfrak{M}_r'' = 0$ (bezogen auf O'') ist,

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\mathfrak{J}} + [\mathfrak{o}''\mathfrak{J}] &= \mathfrak{L} + \mathfrak{R}, \\ \overset{*}{\mathfrak{S}}'' + [\mathfrak{o}''\mathfrak{S}''] + [\mathfrak{v}''\mathfrak{J}] &= \mathfrak{M}''. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Hier sind $\mathfrak{v}''$ und $\mathfrak{o}''$ die Geschwindigkeit von O'' und die Drehgeschwindigkeit des Systems $O''(\mathfrak{n};\mathfrak{a}')$, und die Sternchen (*) bedeuten Differentiationen von einem mit diesem System bewegten Beobachter aus. Für die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}''$ des Berührpunkts O'' hat man unmittelbar

$$\mathfrak{v}'' = \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{a}\dot{\varphi} + \mathfrak{b}\dot{\psi} = \mathfrak{a}'\dot{\varphi}' + \mathfrak{b}'\dot{\psi}'; \tag{13}$$

die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}''$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

$$\mathfrak{o}'' = \dot{\mathfrak{m}} + \dot{\mathfrak{n}}, \tag{14}$$

wo $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}'/|\mathfrak{a}'|$ ein Einheitsvektor in Richtung $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{n}$ der Normaleneinheitsvektor (6) ist.

Führt man schließlich die Werte von $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{v}''$ und $\mathfrak{o}''$ aus (9), (11), (13) und (14) in (12) ein, so stellt die zweite Gleichung (12) in Verbindung mit (5) bis (8) wiederum die Differentialgleichung der Bewegung vor, wogegen die erste Gleichung (12) zur Bestimmung der Reaktion $\mathfrak{R}$ dient. Die Hauptschwierigkeit bei der Lösung liegt in der Größe P, die im Gegensatz zu E kein konstanter Tensor mehr ist. Über die bisher gelösten Fälle muß auf die oben zitierte Literatur verwiesen werden.

38. Die vollständige Führungsbewegung des starren Körpers. Wenn der starre Körper vollständig geführt, seine Bewegung also von vornherein völlig bestimmt vorgeschrieben ist, so handelt es sich nicht mehr um ein kinetisches, sondern um ein rein kinetostatisches Problem (vgl. Ziff. 4 am Schluß), nämlich um die Ermittlung des Führungsmotors $\mathfrak{N}$. Die Lösung dieser Aufgabe wird nach Ziff. 4, Gleichung (5), gegeben durch

$$\mathfrak{N} = \dot{\mathfrak{J}} - \mathfrak{K}, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{K}$ der Motor der eingeprägten Kräfte ist. Der Widerstand, den der starre Körper kraft seiner Massenträgheit gegen die Führung ausübt, wird durch den Motor

$$\mathfrak{W} = -\mathfrak{N} = \mathfrak{K} - \dot{\mathfrak{J}} \tag{2}$$

dargestellt.

Dieser allgemeine Ansatz ist bis jetzt nur in wenigen Sonderfällen durchgeführt worden, deren wichtigster wohl die **erzwungene reguläre Präzession eines unsymmetrischen Kreisels um seinen Schwerpunkt** ist[1]). Diese Bewegung ist (in Analogie zu Ziff. 26) kinematisch dadurch gekennzeichnet, daß der Kreisel sich um eine Hauptträgheitsachse des Schwerpunkts gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ν dreht, während diese Hauptachse mit der gleichförmigen Präzessionsgeschwindigkeit μ einen Kreiskegel beschreibt, dessen Spitze im Schwerpunkt liegt, und dessen Achse auch hier die Präzessionsachse heißt.

[1]) R. GRAMMEL, Math. ZS. Bd. 6, S. 124. 1920.

Der Motor $\mathfrak{D}$ des Trägheitswiderstandes des Kreisels reduziert sich hier auf seine zweite Vektorkomponente $\mathfrak{D}_2$; man nennt diese das Kreiselmoment (auch das Deviationsmoment oder die Gyralkraft) und hat gemäß Ziff. 4, Gleichung (11),

$$\mathfrak{D}_2 = [(\mathsf{E}\mathfrak{v})\mathfrak{v}] - \mathsf{E}\dot{\mathfrak{v}}.$$

Die Komponenten des Kreiselmoments in dem körperfesten Hauptachsenkreuz des Schwerpunkts lauten gemäß Ziff. 4, Gleichung (12),

$$D_x = (B-C)qr - A\dot{p}, \quad D_y = (C-A)rp - B\dot{q}, \quad D_z = (A-B)pq - C\dot{r}. \quad (3)$$

Um im vorliegenden Falle die Drehkomponenten p, q, r in den (stets als positiv vorausgesetzten) Drehgeschwindigkeiten μ und ν der regulären Präzession ausdrücken zu können, führen wir die durch Abb. 32 definierten Eulerschen Winkel α und φ ein, indem wir unter α den halben Öffnungswinkel des Präzessionskegels und unter φ den Drehwinkel der ersten Hauptachse (x-Achse) gegen die Knotenachse verstehen. Die Begriffe Knotenachse, Querachse, Figurenachse ($= z$-Achse) und Äquatorebene ($= xy$-Ebene) sollen sinngemäß von früher her übernommen werden, und zwar die beiden letzten auch dann, wenn der Kreisel unsymmetrisch, d. h. wenn $A \neq B$ ist. Nun wird

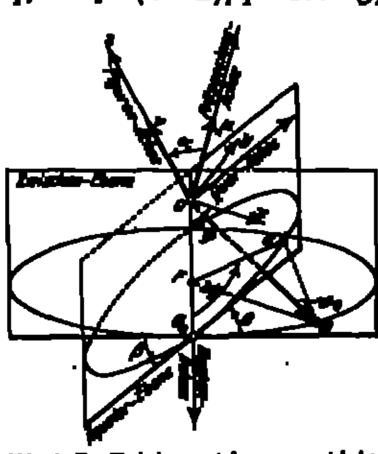


Abb. 32. Das Kreiselmoment des unsymmetrischen Kreisels.

$$p = \mu \sin\alpha \sin\varphi, \qquad q = \mu \sin\alpha \cos\varphi, \qquad r = \mu\cos\alpha + \nu \quad (4)$$

und also

$$D_x = (B-C)\mu^2 \sin\alpha \cos\alpha \cos\varphi - (C + A - B)\mu\nu \sin\alpha \cos\varphi,$$
$$D_y = (C-A)\mu^2 \sin\alpha \cos\alpha \sin\varphi + (B + C - A)\mu\nu \sin\alpha \sin\varphi,$$
$$D_z = (A-B)\mu^2 \sin^2\alpha \sin\varphi \cos\varphi,$$

oder mit den bei der ganzen Bewegung sich nicht ändernden Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \{C\nu + [C - \tfrac{1}{2}(A+B)]\mu\cos\alpha\}\mu\sin\alpha, \\ D_2 &= \tfrac{1}{2}(A-B)(\mu\cos\alpha + 2\nu)\mu\sin\alpha, \\ D_3 &= \tfrac{1}{2}(A-B)\mu^2\sin^2\alpha \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und durch Zerlegen des Kreiselmoments $\mathfrak{D}_2$ nach Knotenachse (D_k), Querachse (D_q) und Figurenachse (D_z)

$$\left.\begin{aligned} D_k &= -D_1 - D_2\cos 2\varphi, \\ D_q &= \qquad\; - D_2\sin 2\varphi, \\ D_z &= D_3 \sin 2\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Um die Lage des Vektors $\mathfrak{D}_2$ zu finden, drehe man (Abb. 32) die Äquatorebene um die Knotenachse um einen durch die Gleichung

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{D_2}{D_3} = \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2\nu}{\mu\sin\alpha} \quad (7)$$

definierten Winkel β, und zwar für positives β in demjenigen Drehsinne, der den Vektor ν auf kürzestem Wege in die Richtung des Vektors μ überführen würde.

Die gedrehte Ebene heiße die **Zwischenebene**. Man nenne ferner positive Knotenachse genauer denjenigen ihrer beiden Halbstrahlen, der mit diesem Drehsinn eine Linksschraube bildet. Sodann trage man vom Schwerpunkt O aus in der positiven Knotenachse die Strecke $OF = -D_1$ auf (also in der Richtung der negativen Knotenachse, falls $D_1 > 0$ ist), ebenso von F aus die Strecke $FG_0 = -D_2$ und lasse, beginnend mit dem Augenblick, wo $\varphi = 0$ ist (d. h. die positive x-Achse die positive Knotenachse passiert), den Fahrstrahl FG_0 sich um F in der Äquatorebene mit der Drehgeschwindigkeit 2ν drehen. Schließlich errichte man im jeweiligen Endpunkt G des rotierenden Fahrstrahls das Lot auf der Äquatorebene und bringe es mit der Zwischenebene zum Schnitt in D, so ist, wie aus (6) leicht zu erschließen, der Vektor $\mathfrak{D}_0$ durch die Strecke OD dargestellt (Abb. 32 ist für negative Werte von D_1, D_2, D_3 entworfen).

Das Kreiselmoment $\mathfrak{D}_0$ pulsiert also im allgemeinen, nämlich solange $A \neq B$ und $0 < \alpha < 180°$ bleibt, mit der doppelten Frequenz der Eigendrehung ν des Kreisels; jedesmal, wenn eine der beiden äquatorialen Hauptachsen durch die Knotenachsen geht, also nach jeder Vierteleigendrehung des Kreisels, fällt auch das Kreiselmoment in die Knotenachse.

Die in der Äquatorebene liegenden Komponenten $-D_1$ und $-D_2$ des die reguläre Präzession erzwingenden Führungsmomentes $\mathfrak{M}_0 = -\mathfrak{D}_0$ können durch eine (ebenfalls in geeigneter Weise pulsierende) Kraft auf einen Punkt der Figurenachse erzeugt werden; die dritte Komponente $-D_3$ dagegen erfordert ein Moment um die z-Achse. Führt man also die Figurenachse eines mit Eigendrehung begabten Kreisels auf einem Kreiskegel (mit dem Schwerpunkt als Spitze) gleichförmig um, so bleibt die Eigendrehung ν im allgemeinen nur dann unveränderlich, wenn ein pulsierendes Moment $-D_3$ um die Figurenachse ausgeübt wird. Fehlt ein solches Moment, so zeigt die dritte Gleichung (5), die mit $D_3 = 0$ und den Werten (4) sowie $\nu = \dot{\varphi}$ übergeht in

$$\frac{d^2(2\varphi)}{dt^2} + \frac{B-A}{C}\mu^2 \sin^2\alpha \sin 2\varphi = 0, \tag{8}$$

daß die Eigendrehung im allgemeinen periodisch schwankt und jedesmal dann einen Größtwert annimmt, wenn die Hauptachse des kleineren äquatorialen Trägheitsmoments durch die Knotenachse geht. [Es liegt hier die verhältnismäßig seltene Klasse einer Bewegung mit zwei Librationszentren[1]) vor.] Man folgert hieraus für den Fall $\nu = 0$, daß ohne ein Führungsmoment $-D_3$ die Hauptachse des kleineren der beiden äquatorialen Trägheitsmomente in der Knotenachse stabil, die andere dagegen dort labil ist.

Der Fall $\nu = 0$ bedeutet eine reine Drehung μ des Körpers um eine raumfeste Achse, und es wird dann statt (5)

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= [C - \tfrac{1}{2}(A+B)]\mu^2 \sin\alpha\cos\alpha, \\ D_2 &= \tfrac{1}{2}(A-B)\mu^2 \sin\alpha\cos\alpha, \\ D_3 &= \tfrac{1}{2}(A-B)\mu^2 \sin^2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Man kann durch unmittelbares Ausrechnen feststellen, daß der hieraus nach der Vorschrift (6) gebildete Vektor $\mathfrak{D}_0$ einfach das Moment aller Fliehkräfte darstellt; man nennt daher die Ausdrücke (9) wohl auch die Komponenten des **Schleudermomentes** und kann leicht zeigen[2]), daß dieses das Bestreben hat, jeweils die Achse des größten Trägheitsmomentes in die Drehachse hineinzuziehen.

---

[1]) Vgl. Kap. 4, Ziff. 5 ds. Bd. des Handb.
[2]) R. GRAMMEL, Der Kreisel, S. 81.

Der andere Grenzfall betrifft den schnellen Kreisel (vgl. Ziff. 29), wo ν gegen μ sehr groß ist. Dann hat man näherungsweise

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= C\mu\nu\sin\alpha,\\ D_2 &= (A-B)\mu\nu\sin\alpha,\\ D_3 &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ferner geht β gegen Null, d. h. die Zwischenebene fällt jetzt mit der Äquatorebene merklich zusammen. Die rasch pulsierende Komponente mit dem Betrag D_2 hat den zeitlichen Mittelwert Null, und es bleibt also nur die in die negative Knotenachse fallende Komponente D_1 wirksam. Sie hat das Bestreben, die Eigendrehachse ν des schnellen Kreisels in die Achse der Zwangsdrehung μ gleichstimmig (d. h. so, daß der Umdrehungssinn von μ und ν derselbe wird) hineinzuziehen. Dies ist die von BOHNENBERGER[1]) entdeckte, von FOUCAULT[2]) klar ausgesprochene Tendenz zum gleichstimmigen Parallelismus (tendance des rotations au parallélisme): der schnelle Kreisel antwortet auf jede Zwangsdrehung damit, daß er seine Eigendrehachse sofort gegen die Zwangsdrehachse gleichstimmig neigt, wenn er daran nicht durch ein das Kreiselmoment $\mathfrak{D}_e$ aufhebendes Führungsmoment $\mathfrak{K}_e$ gehindert wird.

39. Die vollständige Führungsbewegung des symmetrischen Kreisels. Ist mit $A = B$ der Kreisel im besonderen symmetrisch, so vereinfachen sich die Formeln der vorigen Ziffer erheblich. Man hat jetzt

$$D_1 = [C\nu + (C-A)\mu\cos\alpha]\mu\sin\alpha, \qquad D_2 = 0, \qquad D_3 = 0, \tag{1}$$

so daß das Kreiselmoment $\mathfrak{D}_e$ den festen Betrag D_1 angenommen hat und nun dauernd in der gleichmäßig umlaufenden Knotenachse liegt, und zwar in der positiven oder negativen, je nachdem D_1 negativ oder positiv ist. Man unterscheidet die beiden Teile von D_1, nämlich

$$D_1' = C\mu\nu\sin\alpha, \qquad D_1'' = (C-A)\mu^2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2}$$

als Kreiselmoment im engeren Sinne (D_1') und als Schleudermoment (D_1''), insofern wieder D_1'' nichts anderes als das Moment der Fliehkräfte im Falle $\nu = 0$ bedeutet. Da beim Kugelkreisel ($C = A$) das Moment D_1' allein übrigbleibt, so heißt D_1' wohl auch der sphärische, D_1'' dagegen der ellipsoidische Teil des Kreiselmomentes.

Fällt die erzwungene reguläre Präzession (μ, ν, α) mit einer der natürlichen regulären Präzessionen (μ, ν, ϑ) des symmetrischen kräftefreien Kreisels zusammen, so wird, wie der Vergleich mit Ziff. 14, Gleichung (1), zeigt, $D_1 = 0$, und das Kreiselmoment $\mathfrak{D}_e$ sowie das ihm entgegengesetzte Führungsmoment $\mathfrak{K}_e$ verschwindet.

Der ellipsoidische Bestandteil verschwindet mit $\alpha = 0°$ oder $\alpha = 90°$ oder mit $C = A$, also dann und nur dann, wenn die Präzessionsachse mit einer Hauptträgheitsachse zusammenfällt.

Je nachdem D_1 positiv oder negativ ist, sucht das Kreiselmoment $\mathfrak{D}_e$, wenn es nicht durch ein Führungsmoment $\mathfrak{K}_e$ kompensiert wird, die Eigendrehachse ν mit der Zwangsdrehungsachse μ oder mit $-\mu$ zur Deckung zu bringen. KLEIN und SOMMERFELD unterschieden beide Arten der Wirkung als Tendenz zum homologen (gleichstimmigen) bzw. antilogen (ungleichstimmigen) Parallelismus.

Beim schnellen symmetrischen Kreisel kann man das Schleudermoment gegen das Kreiselmoment im engeren Sinn vernachlässigen und $C\nu$ mit dem

[1]) J. G. F. BOHNENBERGER, Gilb. Ann. Bd. 60, S. 60. 1817.
[2]) L. FOUCAULT, C. R. Bd. 35, S. 602. 1852.

Schwungvektor $\mathfrak{S}$ identifizieren und hat dann mit dem Vektor $\mathfrak{u}$ der Präzessionsgeschwindigkeit in

$$\mathfrak{D}_s = -\mathfrak{K}_s = [\mathfrak{S}\mathfrak{u}] \tag{3}$$

wohl die für die Anwendungen wichtigste Formel der Kreiseltheorie. Der schnelle Kreisel hat stets die Tendenz zum **gleichstimmigen Parallelismus**, und man kann an Hand von Abb. 33 die durch (3) ausgedrückte Verkoppelung zwischen den Vektoren $\mathfrak{D}_s$, $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{u}$ folgendermaßen deuten: Auf ein Führungsmoment $\mathfrak{K}_s$ antwortet der schnelle symmetrische Kreisel mit einer Drehung $\mathfrak{u}$; eine Zwangsdrehung $\mathfrak{u}$ weckt in ihm ein Kreiselmoment $\mathfrak{D}_s$.

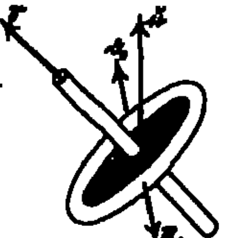


Abb. 33. Das Kreiselmoment des schnellen symmetrischen Kreisels.

Es muß noch betont werden, daß das Führungsmoment $\mathfrak{K}_s$ zwar ausreicht, die reguläre Präzession (μ, ν, α) zu unterhalten, dagegen nicht, sie einzuleiten, falls der Kreisel ursprünglich nur um seine Figurenachse umlief. Vielmehr ist der zu ν gehörige Eigenschwung $\mathfrak{C}$, zur Einleitung einer Präzession μ noch durch einen zusätzlichen Drehstoß $\mathfrak{S}_\mu$ zu ergänzen, der in die Figuren- und Querachse die Komponenten $C\mu\cos\alpha$ und $A\mu\sin\alpha$ wirft, in der Knotenachse dagegen keine Komponente hat[1]).

40. Der Kurvenkreisel. Wird ein in seinem Schwerpunkt gestützter symmetrischer Kreisel hinreichend stark aufgezogen und dann seine stofflich ausgestaltete, etwa kreiszylinderförmige „Figurenachse" mit einer ebenfalls stofflichen „Kurve", etwa einem steifen Drahte, in Berührung gebracht, so beobachtet man, daß die „Figurenachse" sofort an der „Kurve" abrollt und unter gewissen Umständen nicht nur allen Windungen und selbst Ecken der „Kurve" willig folgt, sondern sich sogar unerwartet heftig gegen die „Kurve" preßt. Man nennt solch einen Kreisel wohl auch **Kurvenkreisel** oder **perimetrischen Kreisel**[2]). Verbindet man die Berührungspunkte zwischen „Figurenachse" und „Kurve" mit dem Stützpunkt, so entsteht ein körperfester Kegel K_1 und ein raumfester Kegel K_2. Ist die „Kurve" rauh genug, so rollt K_1 auf K_2 ohne Gleiten ab, und daher ist dann K_1 einfach der Polkegel und K_2 der Spurkegel der ganzen Bewegung.

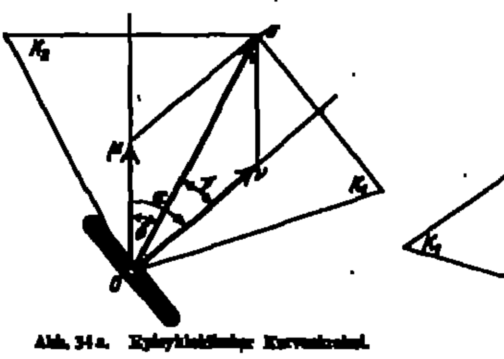


Abb. 34 a. Epizykloidischer Kurvenkreisel.

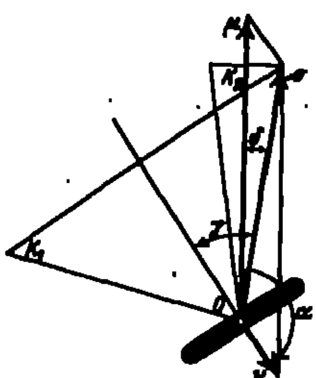


Abb. 34 b. Perizykloidischer Kurvenkreisel.

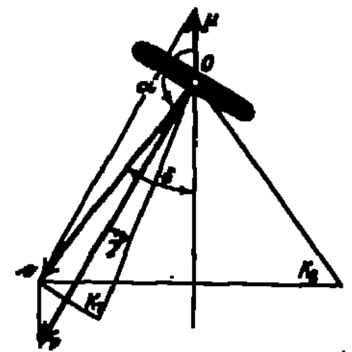


Abb. 34 c. Hypozykloidischer Kurvenkreisel.

[1]) M. WINKELMANN, Math.-nat. Blätter, Bd. 5, Nr. 9—12. 1908.
[2]) G. SIRE, Mém. de la Soc. d'émulation du Doubs. 1861.

Die Frage, unter welchen Bedingungen die „Figurenachse" der „Kurve" folgt, ist verschiedentlich untersucht worden[1]). Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn die beiden Kegel K_1 und K_2 Kreiskegel sind. Es gibt dann die drei in Abb. 34a bis c dargestellten Fälle der epi-, peri- und hypozykloidischen Präzession. (Man beachte, daß hypozykloidische Präzessionen beim kräftefreien Kreisel überhaupt nicht vorkommen können, wogegen andererseits jetzt die perizykloidische Präzession schwer zu verwirklichen sein wird, wenn die „Figurenachse" stofflich ist; doch kümmern wir uns um diese Schwierigkeit hier nicht weiter.) Die Anpressung wird natürlich gerade durch das in Ziff. 39 diskutierte Kreiselmoment $\mathfrak{D}_2$ hervorgerufen. Soll die Pressung positiv sein, der Polkegel K_1 (also die „Figurenachse") den Spurkegel K_2 (also die „Kurve") nicht verlassen, so muß die in Ziff. 39, Gleichung (1) angegebene Größe D_1 positiv sein. Sind aber γ und δ die halben Öffnungswinkel der Kegel K_1 und K_2, so lautet die Bedingung für das Nichtgleiten

$$\mu \sin\delta = \nu \sin\gamma,$$

und man kann dann in D_1 die Größe μ durch $\nu \sin\gamma / \sin\delta$ ersetzen und findet (in Anbetracht, daß α, γ und δ jeweils zwischen 0 und 180° liegen) als die gesuchte Bedingung positiver Pressung

$$C \sin\delta + (C - A) \cos\alpha \sin\gamma > 0. \tag{1}$$

Man erkennt leicht, daß diese Ungleichung im peri- und hypozykloidischen Fall stets erfüllt ist, und daß sie auch im epizykloidischen nur von einem gestreckten Kreisel ($C < A$) verletzt werden kann, nämlich wenn

$$\operatorname{tg}\delta \leqq \frac{(A - C)\operatorname{tg}\gamma}{C + A \operatorname{tg}^2\gamma} \tag{2}$$

wird. Dies tritt nur bei hinreichend engen Spurkegeln ein.

Im Falle einer beliebigen Kurve, also eines beliebigen Spurkegels K_2 und möglicherweise auch eines allgemeineren Polkegels K_1, ersetzt man beide Kegel an jeder Stelle durch ihre oskulierenden Kreiskegel K_1' und K_2' mit gleicher Spitze und hat dann unter der Voraussetzung des Nichtgleitens dieselbe Bedingung (2) für das Aufhören des Pressungsdrucks. Der Kurvenkreisel kann dann also seine „Kurve" nie an konkaven, höchstens an konvexen Stellen, insbesondere an scharfen Ecken, verlassen, und zwar auch nur dann, wenn er gestreckt ist (was bei den üblichen Modellen nicht der Fall zu sein pflegt).

Wesentlich verwickelter wird die Untersuchung, wenn auch Gleiten vorkommt. Die zur Verfügung stehende Haftreibungskraft (aus dem Pressungsmoment D_1 zu berechnen) wird dann jedesmal beansprucht, so oft die oskulierenden Kegel sich ändern; denn dort geht jedesmal eine bestimmte reguläre Präzession (μ, ν, α) in eine andere (μ', ν', α') über, und dies erfordert, wie am Schluß von Ziff. 39 angedeutet, außer dem Führungsmoment $\mathfrak{M}_e$ einen zusätzlichen Drehstoß. Es kann durchaus vorkommen, daß die Reibungskraft zu diesem Drehstoß nicht ausreicht, und dann tritt Gleiten ein, und da die Kegel K_1' und K_2' dabei nicht mehr die Rolle des Pol- und Spurkegels spielen, so verlieren die bisherigen Betrachtungen ihre Gültigkeit. Eine erschöpfende Erledigung des Problems steht noch aus.

---

[1]) M. Koppe, ZS. f. phys. u. chem. Unterr. Bd. 4, S. 80. 1890; D. Bobylew, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 47, S. 354. 1902; R. Grammel, ZS. d. Ver. deutsch. Ing. 1917, S. 372.

VII. Die Relativbewegung des starren Körpers auf der bewegten Erde.

41. Die Bewegungsgleichungen in einem bewegten Bezugssystem. Es handelt sich darum, festzustellen, wie die Bewegungsgesetze eines starren Körpers [Ziff. 4, Gleichung (5)] lauten, wenn die Bewegung von einem selbst irgendwie bewegten Raum aus betrachtet wird. Dieses tragende oder führende Bezugssystem, etwa ein Fahrzeug oder die Erde, möge durch die Bewegung des getragenen oder geführten Körpers, etwa eines Pendels oder Kreisels, keinerlei merkliche Rückwirkung erfahren. Die Aufstellung der Bewegungsgesetze solcher Relativbewegungen ist von HEUN[1]) und in noch durchsichtigerer Weise vermittels der Motorrechnung von v. MISES[2]) geleistet worden.

Sei $\mathfrak{V}'$ der Motor der **relativen** Bewegung des Körpers gegen das führende System und $\mathfrak{F}$ der Geschwindigkeitsmotor des führenden Systems selbst gegenüber einem „absoluten" Raum, in welchem der Impulssatz in der Form (5) von Ziff. 4

$$\dot{\mathfrak{J}} = \mathfrak{A} + \mathfrak{R} \qquad \text{mit} \qquad \mathfrak{J} = \mathsf{E}\mathfrak{V} \tag{1}$$

gilt, so ist der „absolute" Geschwindigkeitsmotor des Körpers

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}' + \mathfrak{F}, \tag{2}$$

weil die Zusammensetzung der beiden Vektorkomponenten von $\mathfrak{V}$ aus den entsprechenden von $\mathfrak{V}'$ und $\mathfrak{F}$ im Sinne der Motoraddition erfolgt.

Bezeichnet, wie schon in Ziff. 4, ein übergesetzter Stern (*) zeitliche Differentiation von einem **körperfesten** Beobachter aus, so ist [vgl. Ziff. 4, Gleichung (9)]

$$\dot{\mathfrak{J}} = \overset{*}{\mathfrak{J}} + [\mathfrak{V}\mathfrak{J}] = \mathsf{E}\overset{*}{\mathfrak{V}} + [\mathfrak{V}(\mathsf{E}\mathfrak{V})] = \mathsf{E}\overset{*}{\mathfrak{V}}{}' + \mathsf{E}\overset{*}{\mathfrak{F}} + [(\mathfrak{V}' + \mathfrak{F})(\mathsf{E}\mathfrak{V}' + \mathsf{E}\mathfrak{F})]. \tag{3}$$

Nun wird man aber in der Regel die Änderung der Führungsgeschwindigkeit $\mathfrak{F}$ nicht vom bewegten Körper aus, sondern lieber vom führenden Bezugssystem aus beurteilen wollen und also an Stelle von $\overset{*}{\mathfrak{F}}$ lieber $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ vermöge

$$\overset{\circ}{\mathfrak{F}} = \overset{*}{\mathfrak{F}} + [\mathfrak{V}'\mathfrak{F}]$$

einführen, indem man Änderungsgeschwindigkeiten, vom führenden System aus gemessen, durch übergesetzte Ringe (∘) andeutet. Damit erhält man aus (3) und (4)

$$\left.\begin{aligned} &\{\mathsf{E}\overset{\circ}{\mathfrak{V}}{}' + [\mathfrak{V}'(\mathsf{E}\mathfrak{V}')]\} + \{\mathsf{E}\overset{\circ}{\mathfrak{F}} + [\mathfrak{F}(\mathsf{E}\mathfrak{F})]\} \\ &\qquad + \{[\mathfrak{F}(\mathsf{E}\mathfrak{V}')] + [\mathfrak{V}'(\mathsf{E}\mathfrak{F})] + \mathsf{E}[\mathfrak{F}\mathfrak{V}']\} = \mathfrak{A} + \mathfrak{R} \end{aligned}\right| \tag{5}$$

als **allgemeine Motorgleichung der Relativbewegung.**

Auch hier tritt dieselbe (durch die geschweiften Klammern angedeutete) Dreigliederung der Impulsänderung auf, wie schon in der Punktmechanik[3]), nämlich ein **Relativbestandteil**

$$\mathfrak{W}_r = \mathsf{E}\overset{\circ}{\mathfrak{V}}{}' + [\mathfrak{V}'(\mathsf{E}\mathfrak{V}')],$$

den man auch als relative Änderungsgeschwindigkeit eines Relativimpulsmotors $\mathfrak{J}' = \mathsf{E}\mathfrak{V}'$ ansehen kann, ferner ein **Führungsbestandteil**

$$\mathfrak{W}_f = \mathsf{E}\overset{\circ}{\mathfrak{F}} + [\mathfrak{F}(\mathsf{E}\mathfrak{F})],$$

---

1) K. HEUN, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 2, S. 432.
2) R. v. MISES, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 4, S. 197. 1924.
3) Siehe Kap. 5, Ziff. 26 ds. Bd. des Handb.

den man als Änderungsgeschwindigkeit eines Führungsmotors $\mathfrak{H} = \mathsf{E}\mathfrak{F}$ (mit zeitlich unveränderlichem E) schreiben könnte, und endlich ein Coriolisbestandteil[1]), der jetzt die Form

$$-\mathfrak{W}_c = [\mathfrak{F}\mathfrak{J}'] + [\mathfrak{V}'\mathfrak{H}] + \mathsf{E}[\mathfrak{F}\mathfrak{V}']$$

annimmt und als gemischter Bestandteil ganz der Coriolisbeschleunigung der Punktmechanik entspricht.

Die vektorielle Zerlegung der Motorgleichung (4) erfordert Aufmerksamkeit. Die beiden Vektorkomponenten von $\mathfrak{V}'$ seien (vgl. Ziff. 2) $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{v}_0'$, wo $\mathfrak{v}_0'$ die Relativgeschwindigkeit eines körperfesten Punktes O bedeutet; die beiden Vektorkomponenten von $\mathfrak{F}$ seien $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{v}_0$, wo $\mathfrak{v}_0$ die Absolutgeschwindigkeit desjenigen Punktes des Führungssystems vorstellt, der augenblicklich mit O zusammenfällt. Dann sind [vgl. Ziff. 2, Gleichung (19) und (6), (12)] die beiden Vektorkomponenten von $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{H}$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}' &= m\{\mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{o}'\mathfrak{r}_s]\}, & \mathfrak{J}_0' &= m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{v}_0'] + \mathsf{E}\mathfrak{o}', \\ \mathfrak{H} &= m\{\mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{o}\mathfrak{r}_s]\}, & \mathfrak{H}_0 &= m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{v}_0] + \mathsf{E}\mathfrak{o}; \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

hierbei bedeutet $\mathfrak{r}_s$ den Fahrstrahl von O nach dem Schwerpunkt des Körpers und es sind

$$\mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{o}'\mathfrak{r}_s] = \mathfrak{v}_s', \qquad \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{o}\mathfrak{r}_s] = \mathfrak{v}_s \qquad (6)$$

die relative Schwerpunktsgeschwindigkeit ($\mathfrak{v}_s'$) und die absolute Geschwindigkeit ($\mathfrak{v}_s$) desjenigen Punktes des Führungssystems, der augenblicklich mit dem Schwerpunkt des Körpers zusammenfällt, und bei der späteren Bildung von $\dot{\mathfrak{H}}$ und $\dot{\mathfrak{H}}_0$ ist $\mathfrak{r}_s$ und E nicht mit zu differentiieren. Ferner folgen nach der Multiplikationsregel[2]) der Motoren die beiden Vektorkomponenten von $\mathfrak{W}_r$, $\mathfrak{W}_f$ zu

$$\mathfrak{W}_r = \dot{\mathfrak{J}}' + [\mathfrak{o}'\mathfrak{J}'], \qquad \mathfrak{W}_{r0} = \dot{\mathfrak{J}}_0' + [\mathfrak{o}'\mathfrak{J}_0'] + [\mathfrak{v}_0'\mathfrak{J}'],$$
$$\mathfrak{W}_f = \dot{\mathfrak{H}} + [\mathfrak{o}\mathfrak{H}], \qquad \mathfrak{W}_{f0} = \dot{\mathfrak{H}}_0 + [\mathfrak{o}\mathfrak{H}_0] + [\mathfrak{v}_0\mathfrak{H}].$$

Weiter hat der in $-\mathfrak{W}_c$ auftretende Motor $\mathfrak{P} = [\mathfrak{F}\mathfrak{V}']$ die beiden Vektorkomponenten

$$\mathfrak{p} = [\mathfrak{o}\mathfrak{o}'], \qquad \mathfrak{p}_0 = [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_0'] + [\mathfrak{v}_0\mathfrak{o}']$$

und daher der Motor $\mathfrak{Q} = \mathsf{E}\mathfrak{P}$ die beiden Vektorkomponenten

$$\mathfrak{q} = m\{\mathfrak{p}_0 + [\mathfrak{p}\mathfrak{r}_s]\}, \qquad \mathfrak{q}_0 = m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{p}_0] + \mathsf{E}\mathfrak{p},$$

und also $-\mathfrak{W}_c$ die beiden Vektorkomponenten

$$-\mathfrak{w}_c = [\mathfrak{o}\mathfrak{J}'] + [\mathfrak{o}'\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}, \qquad -\mathfrak{w}_{c0} = [\mathfrak{o}\mathfrak{J}_0'] + [\mathfrak{v}_0\mathfrak{J}'] + [\mathfrak{o}'\mathfrak{H}_0] + [\mathfrak{v}_0'\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}_0.$$

Faßt man nun die ersten und zweiten Vektorkomponenten aller $\mathfrak{W}$ je für sich zusammen, setzt dabei die Werte von $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}_0'$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_0$ aus (5) ein, achtet auf die vektoralgebraische Identität

$$[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] + [\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]] + [\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]] = 0$$

und formt einen in $-\mathfrak{w}_{c0}$ auftretenden Ausdruck folgenderweise um[3])

$$[\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o}')] + [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}\mathfrak{o})] + \mathsf{E}[\mathfrak{o}\mathfrak{o}'] = [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}'\mathfrak{o})] \qquad (7)$$

mit dem neuen Tensor

$$\mathsf{E}' = 2\mathsf{E} - (E_x + E_y + E_z)\mathsf{I} = \begin{vmatrix} E_x - E_y - E_z & -2D_z & -2D_y \\ -2D_z & -E_x + E_y - E_z & -2D_x \\ -2D_y & -2D_x & -E_x - E_y + E_z \end{vmatrix}.$$

---

1) Das negative Vorzeichen wird nur in Analogie zu dem Gebrauch in der Punktmechanik benutzt; vgl. Kap. 5, Ziff. 26.

2) Vgl. Kap. 6, Ziff. 13 ds. Bd. des Handb.

3) Vgl. J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, 2. Aufl., S. 319. Stuttgart 1926.

(wo I der Einheitstensor oder Idemfaktor ist), so lauten die Bewegungsgleichungen (4) in Vektorform

$$m\{\mathring{\mathfrak{v}}_s' + [\mathfrak{o}'\mathfrak{v}_s']\} + m\{\mathring{\mathfrak{v}}_e + [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_e]\} + 2m[\mathfrak{o}\mathfrak{v}_s'] = \mathfrak{K} + \mathfrak{R}, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\begin{matrix} \mathsf{E}\mathring{\mathfrak{o}}' + [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}\mathfrak{o}')] \\ + m\{[\mathfrak{r}_s\mathring{\mathfrak{v}}_s'] + [\mathfrak{r}_s[\mathfrak{o}'\mathfrak{v}_s']]\} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \mathsf{E}\mathring{\mathfrak{o}} + [\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o})] \\ + m\{[\mathfrak{r}_s\mathring{\mathfrak{v}}_e] + [\mathfrak{r}_s[\mathfrak{o}\mathfrak{v}_e]]\} \end{matrix}\right\} \\ &\qquad\qquad + \left\{\begin{matrix} [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}'\mathfrak{o})] \\ + 2m[\mathfrak{r}_s[\mathfrak{o}\mathfrak{v}_s']] \end{matrix}\right\} = \mathfrak{M} + \mathfrak{R}_0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Dabei sind noch $\mathring{\mathfrak{v}}_s'$ und $\mathring{\mathfrak{v}}_e$ die nach (6) zu bildende Relativbeschleunigung des Schwerpunkts und die Führungsbeschleunigung desjenigen Punktes, der augenblicklich mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Die Dreigliederung ist wieder durch die Zusammenfassungsklammern angedeutet. Verschwindet der Führungsmotor $\mathfrak{F}$, so bleibt nur das erste Drittel der linken Seiten übrig und die Gleichungen (8) und (9) gehen dann in die Gleichungen (10) von Ziff. 4 über.

Die Zerlegung in rechtwinklige Komponenten ist einfach. Benutzt man ein Hauptachsensystem durch O, so ist die Komponentenform der „Euler"-Glieder $\mathsf{E}\mathring{\mathfrak{o}}' + [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}\mathfrak{o}')]$ und $\mathsf{E}\mathring{\mathfrak{o}} + [\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o})]$ schon durch Ziff. 4, Gleichung (12) bekannt, wogegen das Coriolisglied $[\mathfrak{o}'(\mathsf{E}'\mathfrak{o})]$ die Komponenten

$$[\mathfrak{o}'(\mathsf{E}'\mathfrak{o})]_x = A(qr' - rq') + (C - B)(qr' + rq') \tag{10}$$

und zyklisch weiter, besitzt.

Man kann in den mittleren Gliedern von (8) und (9) noch

$$\mathring{\mathfrak{v}}_0 + [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_0] = \dot{\mathfrak{v}}_0, \qquad \mathring{\mathfrak{v}}_e + [\mathfrak{o}\mathfrak{v}_e] = \dot{\mathfrak{v}}_e \tag{11}$$

setzen, wenn man die Beschleunigungen lieber vom absoluten Raum aus beurteilen will; außerdem beachtet man, daß natürlich

$$\mathring{\mathfrak{o}}' = \dot{\mathfrak{o}}', \qquad \mathring{\mathfrak{o}} = \dot{\mathfrak{o}} \tag{12}$$

ist.

Die Gleichungen (8) und (9) sind dazu geeignet, die Bewegung eines starren Körpers auf der bewegten Erde zu ermitteln. Hierbei ist dann $\mathfrak{o}$ die siderische Drehgeschwindigkeit der Erde. Wenn der Körper in einem erdfesten Punkte gestützt ist wie ein Pendel oder ein Kreisel, so wählt man diesen Punkt als Bezugspunkt und hat dann in dem mit $\dot{\mathfrak{v}}_0$ behafteten Glied von (9) sogar den Einfluß der Führungsbeschleunigung des Stützpunkts. Soweit diese Führungsbeschleunigung von der **Erddrehung** herrührt, ist sie der Beobachtung nicht unmittelbar zugänglich, da ihr negativer Vektor $-\dot{\mathfrak{v}}_0$ sich (als Fliehkraft der Masseneinheit) einfach zum Vektor $\mathfrak{g}$ der Schwerebeschleunigung hinzufügt, so daß eine von $\mathfrak{g}$ dem Betrag und der Richtung nach nur unwesentlich verschiedene Resultante entsteht, die als scheinbare Schwerebeschleunigung empfunden wird. Auch der grundsätzlich vorhandene Unterschied zwischen $\dot{\mathfrak{v}}_0$ und $\dot{\mathfrak{v}}_e$ ist bei jedem irdischen Objekt zu klein, als daß er beobachtet werden könnte[1]. Dasselbe gilt in noch höherem Maße von der Führungsbeschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}_0$, soweit sie die krummlinige oder ungleichförmige Bewegung der Erde um die Sonne ausdrückt.

Man bemerkt übrigens, daß in (8) und (9) die zur Achse des Führungsmotors $\mathfrak{F}$, also zur Schraubungsachse der Führungsbewegung parallele Komponente von $\mathfrak{v}_s$ und $\mathfrak{v}_e$ gar nicht vorkommt, weil ihr Vektorprodukt mit dem zur Schraubungs-

[1] Vgl. R. GRAMMEL, Die mechanischen Beweise für die Bewegung der Erde, S. 28. Berlin 1922.

achse parallelen Drehvektor $\mathfrak{o}$ verschwindet. Hierin drückt sich das Galileische Relativitätsprinzip aus, wonach die absolute Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_s$ (Ziff. 2) der Führungsschraubung an einem geführten Körper nicht nachweisbar ist.

42. Das Gauß-Kamerlingh Onnessche Pendel. Die Bewegung eines physikalischen Pendels zum Nachweis der Erddrehung hat — einem Vorschlag von GAUSS[1]) zur Erweiterung des Foucaultschen Pendelversuches[2]) folgend — KAMERLINGH ONNES[3]) im Jahre 1879 untersucht. Die Theorie dieses Pendels, das eine Länge von nur 1,2 m besaß und in einer luftleeren Kapsel schwang, ist in der Formel (9) von Ziff. 41 enthalten. Hängt man das Pendel in ein Cardangehänge (Abb. 35), dessen Mittelpunkt O ist und dessen erdfeste und körperfeste Drehachse in der Ruhelage je wagerecht sind, so empfiehlt es sich, von einem erdfesten Koordinatensystem $Ox_0y_0z_0$ und einem körperfesten $Ox'y'z'$ auszugehen, deren z-Achsen in der Ruhelage zusammen lotrecht aufwärts weisen, wogegen dann die x_0-Achse in die erdfeste, die y_0-Achse in die körperfeste Cardanachse fallen, während die x'-, y'-, z'-Achsen zugleich die Hauptträgheitsachsen des Körpers bezüglich O sein sollen. Es wird also vorausgesetzt, daß in der Ruhelage die Lotachse durch O eine Hauptachse des Körpers ist, die außerdem in der Entfernung l von O den Schwerpunkt S tragen möge. Der Winkel zwischen der x_0- und x'-Achse in der Ruhelage sei mit ϑ_0 bezeichnet. Eine beliebige Raumstellung der Pendelachse OS erhält man durch eine Drehung φ um die erdfeste Cardanachse und eine Drehung ψ um die körperfeste Cardanachse. Das gedrehte Achsensystem $Ox'y'z'$ hat gegen das ruhende $Ox_0y_0z_0$ die durch das Schema

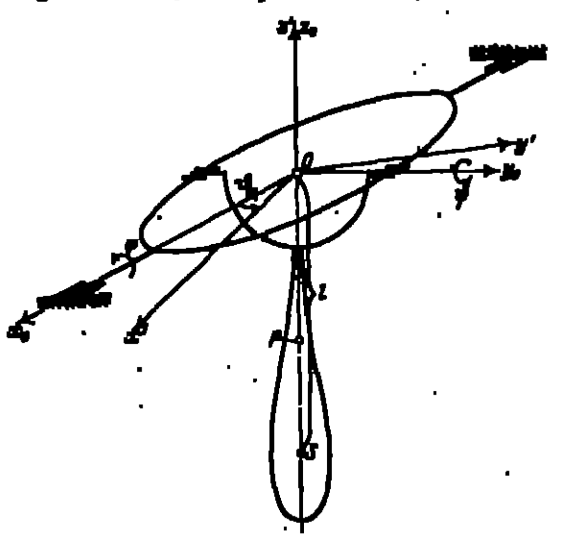


Abb. 35. Kamerlingh Onnessches Pendel.

	x'	y'	z'
x_0	α_{11}	α_{12}	α_{13}
y_0	α_{21}	α_{22}	α_{23}
z_0	α_{31}	α_{32}	α_{33}

definierten Richtungskosinusse, von denen wir nur die folgenden sechs in ϑ_0, φ, ψ ausgedrückt brauchen:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{11} &= \cos\vartheta_0\cos\psi, & \alpha_{21} &= -\cos\vartheta_0\cos\varphi\sin\psi + \sin\vartheta_0\sin\varphi,\\ \alpha_{12} &= -\sin\vartheta_0\cos\psi, & \alpha_{22} &= \sin\vartheta_0\cos\varphi\sin\psi + \cos\vartheta_0\sin\varphi,\\ \alpha_{13} &= \sin\psi, & \alpha_{23} &= \cos\varphi\cos\psi.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

[1]) Briefe zwischen A. v. HUMBOLDT und C. F. GAUSS, S. 66. Leipzig 1877.

[2]) Siehe Kap. 7, Ziff. 20 ds. Bd. des Handb.

[3]) H. KAMERLINGH ONNES, Nieuwe bewijzen usw. Dissert. Groningen 1879; sowie Nieuw Arch. voor Wiskunde Bd. 5, S. 58 u. 135, 1879 u. Bd. 6, S. 173, 1880; vgl. auch J. G. HAGEN, La rotation de la terre. Rom 1911 (Anhang von J. STEIN).

Nunmehr lassen sich die Gleichungen der Relativbewegung sofort anschreiben. Dabei vernachlässigt man die von der Erddrehung und von der Ekliptikbewegung der Erde herrührende Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}_0$ des Aufhängepunktes und geht, wie schon beim Foucaultschen Pendel, davon aus, daß nur die Vertikalkomponente ω_3 des Drehvektors der Erddrehung ω, nämlich $\omega_3 = \omega \sin\Phi$ (wo Φ die geographische Breite des Beobachtungsorts) in Betracht kommt. Die Komponenten dieser Führungsdrehung ω_3 in dem Hauptachsensystem $Ox'y'z'$ sind $\omega_3 a_{31}, \omega_3 a_{32}, \omega_3 a_{33}$, diejenigen der Relativdrehung $\mathfrak{o}'$ seien p', q', r'; dann lauten mit der Pendelmasse m und den Hauptträgheitsmomenten A, B, C bezüglich O die x'-, y'-, z'-Komponenten von Ziff. 41, Gleichung (9), wenn man das Differentiationssymbol $\circ$ wieder einfach durch den oberen Punkt ersetzt und $\mathfrak{v}_0' = 0$ nimmt,

$$\left.\begin{aligned}
&A\dot{p}' + (C-B)q'r' + \omega_3\{(A-B+C)a_{32}r' - (A+B-C)a_{33}q'\}\\
&\qquad + \omega_3^2(C-B)a_{32}a_{33} = -mgl\,a_{32},\\
&B\dot{q}' + (A-C)r'p' + \omega_3\{(B-C+A)a_{33}p' - (B+C-A)a_{31}r'\}\\
&\qquad + \omega_3^2(A-C)a_{33}a_{31} = mgl\,a_{31},\\
&C\dot{r}' + (B-A)p'q' + \omega_3\{(C-A+B)a_{31}q' - (C+A-B)a_{32}p'\}\\
&\qquad + \omega_3^2(B-A)a_{31}a_{32} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dabei ist von Bewegungswiderständen abgesehen und die Masse des äußeren Cardanringes, der nur die Drehung φ mitmacht, unberücksichtigt geblieben.

Diese Gleichungen, die zusammen mit (1) und den kinematischen Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
p' &= a_{11}\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\vartheta_0,\\
q' &= a_{12}\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta_0,\\
r' &= a_{13}\dot{\varphi}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

das Problem lösen, sind für die weitere Behandlung zu verwickelt. Man beschränkt sich daher für die Theorie und für die Beobachtung auf kleine Ausschläge φ und ψ, vernachlässigt außerdem die Glieder mit ω_3^2 und gewinnt so die bis auf Glieder höherer Ordnung in φ und ψ genauen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
A(-\ddot{\varphi}\cos\vartheta_0 + \ddot{\psi}\sin\vartheta_0) &= \omega_3(A+B-C)(\dot{\varphi}\sin\vartheta_0 + \dot{\psi}\cos\vartheta_0)\\
&\quad + mgl(\varphi\cos\vartheta_0 - \psi\sin\vartheta_0),\\
B(\ddot{\varphi}\sin\vartheta_0 + \ddot{\psi}\cos\vartheta_0) &= \omega_3(A+B-C)(\dot{\varphi}\cos\vartheta_0 - \dot{\psi}\sin\vartheta_0)\\
&\quad - mgl(\varphi\sin\vartheta_0 + \psi\cos\vartheta_0),
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

die sich wesentlich einfacher schreiben lassen, wenn man ein erdfestes Koordinatensystem $Oxyz$ einführt, das in der Ruhelage des Pendels mit $Ox'y'z'$ zusammenfällt. In diesem System hat eine Marke P mit den Koordinaten $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = -1$ auf der Pendelachse die Koordinaten

$$x = \varphi\sin\vartheta_0 + \psi\cos\vartheta_0, \qquad y = \varphi\cos\vartheta_0 - \psi\sin\vartheta_0, \qquad z = -1,$$

und die Gleichungen (4) gehen über in

$$\left.\begin{aligned}
B\ddot{x} + mglx &= \omega_3(A+B-C)\dot{y},\\
A\ddot{y} + mgly &= -\omega_3(A+B-C)\dot{x}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

In den Versuchen von KAMERLINGH ONNES war nun zwar A und B absichtlich im allgemeinen verschieden groß gewählt, jedoch nur so wenig verschieden, daß stets die Differenz $A - B$ klein von erster Ordnung blieb. Da auch ω_3 als klein zu gelten hat, so kann man folgende Abkürzung einführen

$$\omega_3\frac{A+B-C}{A} \approx \omega_3\frac{A+B-C}{B} = 2\gamma; \tag{6}$$

außerdem setzt man
$$\frac{mgl}{B} = \alpha^2, \qquad \frac{mgl}{A} = \beta^2 \tag{7}$$
und hat dann statt (5) endgültig
$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 2\gamma\dot{y}, \qquad \ddot{y} + \beta^2 y = -2\gamma\dot{x}; \tag{8}$$
dies bedeutet zwei gekoppelte Schwingungen mit Geschwindigkeitskoppelung.

Da α und β endlich, dagegen γ und $\alpha - \beta$ klein von erster Ordnung sind, so darf man die Lösung in der Form ansetzen
$$x = a e^{\pm i(\alpha+\varepsilon)t}, \qquad y = b e^{\pm i(\alpha+\varepsilon)t},$$
wo ε klein von erster Ordnung sein muß. Man findet für ε die Gleichung
$$\varepsilon^2 + (\alpha - \beta)\varepsilon = \gamma^2.$$
Definiert man einen Hilfswinkel δ durch
$$\frac{\alpha - \beta}{2\gamma} = \operatorname{ctg} 2\delta, \qquad 0 < \delta < \pi, \tag{9}$$
so hat man für ε die beiden Werte
$$\varepsilon_1 = \gamma \operatorname{tg}\delta, \qquad \varepsilon_2 = -\gamma\operatorname{ctg}\delta.$$
Nunmehr kann man die Integrale der Bewegungsgleichungen mit den Abkürzungen
$$\alpha + \gamma\operatorname{tg}\delta = \nu_1, \qquad \alpha - \gamma\operatorname{ctg}\delta = \nu_2 \tag{10}$$
folgendermaßen schreiben:
$$\left.\begin{aligned} x &= a_1\cos(\nu_1 t + \tau_1) + a_2\cos(\nu_2 t + \tau_2),\\ y &= -a_1\operatorname{tg}\delta\cdot\sin(\nu_1 t + \tau_1) + a_2\operatorname{ctg}\delta\cdot\sin(\nu_2 t + \tau_2),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$
wo a_1, a_2, τ_1, τ_2 Integrationskonstanten sind.

Weil stets $\alpha - \beta$ von derselben Größenordnung wie 2γ sein soll, so unterscheiden sich ν_1 und ν_2 nur wenig untereinander und von α. Dann aber ist es für die Diskussion zweckmäßiger, die Integrale (11) umzuformen in
$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda\cos T + \mu\sin T,\\ y &= \lambda'\cos T + \mu'\sin T,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$
indem man setzt
$$\left.\begin{aligned} \lambda &= (a_1 + a_2)\cos\tau, \qquad \lambda' = (a_1\operatorname{tg}\delta + a_2\operatorname{ctg}\delta)\sin\tau,\\ \mu &= (a_1 - a_2)\sin\tau, \qquad \mu' = (-a_1\operatorname{tg}\delta + a_2\operatorname{ctg}\delta)\cos\tau,\\ T &= \frac{\nu_1+\nu_2}{2}t + \frac{\tau_1+\tau_2}{2} = (\alpha - \gamma\operatorname{ctg}2\delta)\,t + \frac{\tau_1+\tau_2}{2},\\ \tau &= \frac{\nu_2-\nu_1}{2}t + \frac{\tau_2-\tau_1}{2} = -\frac{\gamma t}{\sin 2\delta} + \frac{\tau_2-\tau_1}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Diese Gleichungen bedeuten zwei harmonische Schwingungen längs x- und y-Achse von gleicher Frequenz $\alpha - \gamma\operatorname{ctg}2\delta$, jedoch langsam variierender Amplitude und Phasendifferenz. Nennt man den Punkt x, y in der erdfesten wagerechten Stützpunktebene den Bildpunkt des Pendels, so kann man sagen: der Bildpunkt beschreibt eine Ellipse, deren Hauptachsen langsam ihre Größe und Richtung ändern.

Die Gleichung dieser zeitlich veränderlichen Ellipse folgt aus (12) durch Elimination von T zu
$$(\lambda'^2 + \mu'^2)x^2 + (\lambda^2 + \mu^2)y^2 - 2(\lambda\lambda' + \mu\mu')xy = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2. \tag{14}$$

Hieraus ergibt sich für den Winkel ξ, um den man die positive x-Achse im Sinne von ω_2 (also gegen die positive y-Achse hin) drehen muß, bis sie zum erstenmal mit einer Ellipsenhauptachse zusammenfällt,

$$\operatorname{tg} 2\xi = \frac{2(\lambda\lambda' + \mu\mu')}{(\lambda^2 + \mu^2) - (\lambda'^2 + \mu'^2)}. \tag{15}$$

In dem besonderen Falle gleicher Hauptträgheitsmomente $A = B$ wird die Diskussion sehr einfach, da mit $\alpha = \beta$ jetzt $\delta = \pi/4$ ist. Dann folgt $T = \alpha t$ und $\tau = -\gamma t$, außerdem $\xi = \tau$. Danach dreht sich hier die Ellipse mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_3 = -\gamma = -\omega_2\left(1 - \frac{C}{2A}\right) \tag{16}$$

gegen das erdfeste xy-System[1]), also scheinbar entgegen dem Sinne der Erddrehung ω_2, jedoch mit einem von ω_2 um den Korrektionsfaktor $1 - C/2A$ verschiedenen Betrag. Bei einem langen punktförmigen Pendel, wie es FOUCAULT verwendete, kann $C/2A = 0$ gesetzt werden; bei dem von KAMERLINGH ONNES benutzten kurzen physikalischen Pendel ist das Korrektionsglied durchaus zu berücksichtigen: es verzögert die Ellipsendrehung.

Die Diskussion der Bahn des Bildpunktes auch im allgemeinen Falle $A \neq B$ ist für verschiedene Azimute ϑ_0 von KAMERLINGH ONNES vollständig durchgeführt worden. Aus der Beobachtung des Unterschiedes zwischen diesen Kurven und den Lissajousschen Bahnen, die der Bildpunkt beschreiben müßte, wenn die Erddrehung ω_2 nicht vorhanden wäre, hat KAMERLINGH ONNES den Wert von ω_2 auf etwa 1% genau ermittelt, wobei noch der Einfluß der Trägheit des äußeren Cardanringes sowie die Lagerreibung in den (in Wirklichkeit durch Schneiden ersetzten) Cardanachsen sorgfältig berücksichtigt werden mußte.

43. Der kräftefreie Kreisel. Wie die Pendelbewegung, so muß auch die Bewegung eines Kreisels von einem erdfesten Beobachter anders gesehen werden als von einem raumfesten. Wir unterscheiden wieder die drei Fälle des kräftefreien, des schweren und des geführten Kreisels.

Die Relativbewegung des kräftefreien Kreisels gehorcht nach Ziff. 41, Gleichung (9) und (12) mit $\mathfrak{w}_0' = 0$, $\mathfrak{t}_A = 0$ und $\mathfrak{d} = 0$ der Beziehung

$$\mathsf{E}\mathfrak{o}' + [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}\mathfrak{o}')] + [\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o})] + [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}'\mathfrak{o})] = 0. \tag{1}$$

Die Beschleunigung des Aufhängepunktes infolge der Erddrehung und des Erdumlaufs um die Sonne ist dabei im Gegensatz zum Pendel ohne jeden Einfluß. Man kann dieser Gleichung gemäß Ziff. 41, Gleichung (7), wenn man den Vektor

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{o}' + \mathfrak{o} \tag{2}$$

einführt, auch die beiden folgenden Formen geben

$$\mathsf{E}\mathfrak{u}' + [\mathfrak{u}(\mathsf{E}\mathfrak{u})] + \mathsf{E}[\mathfrak{o}\mathfrak{u}] = 0 \tag{3}$$

oder

$$\mathsf{E}\dot{\mathfrak{u}} + [\mathfrak{u}(\mathsf{E}\mathfrak{u})] = 0, \tag{4}$$

indem man beachtet, daß die Differentiation $\dot{\mathfrak{u}}$ vom raumfesten Beobachter aus mit derjenigen $\mathfrak{u}'$ vom erdfesten aus durch die kinematische Gleichung $\dot{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u}' + [\mathfrak{o}\mathfrak{u}]$ verknüpft ist.

Die Deutung von (4) ist selbstverständlich: im absoluten Raume beschreibt der Kreisel seine Poinsotbewegung $\mathfrak{u}$ (Ziff. 12). Die Gleichung (3) dagegen besagt: abgesehen von dem trivialen Fall der permanenten Drehung um eine zur Erd-

[1]) Eine Herleitung dieses Ergebnisses auf anderem Wege findet sich bei R. GRAMMEL, Die mechanischen Beweise für die Bewegung der Erde, S. 51.

achse parallele Kreiselachse ist für einen erdfesten Beobachter $\mathfrak{u}$ keine Poinsotbewegung, so daß sich die Bewegung $\mathfrak{o}'$ des Kreisels, von der Erde aus gesehen, nicht als Überlagerung einer relativen Poinsotbewegung und der negativen Erddrehung $-\mathfrak{o}$ darstellen läßt; vielmehr kommt im allgemeinen noch der Einfluß des „Coriolisgliedes" $\mathsf{E}[\mathfrak{o}\mathfrak{u}] = \mathsf{E}[\mathfrak{o}\mathfrak{o}']$ hinzu.

Treibt man einen kräftefreien symmetrischen Kreisel relativ zur Erde um seine Figurenachse mit einer Relativdrehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}'$ an, deren Betrag ω' groß gegen den Betrag ω der Erddrehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ ist, so liegt der resultierende Drehvektor $\mathfrak{u}$ (Abb. 36) sehr nahe bei der Figurenachse; für den kleinen Winkel γ zwischen $\mathfrak{u}$ und der Figurenachse gilt nämlich nahezu

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega'}\sin\psi,$$

wo ψ den Winkel zwischen den Vektoren $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ bedeutet. Nun ist aber (vgl. Abb. 34b) γ zugleich der halbe Öffnungswinkel des Polkegels, der im Raum beschriebenen regulären Präzession; der halbe Öffnungswinkel ϑ des zugehörigen raumfesten Spurkegels ist noch kleiner, also schon unmeßbar klein, wenn der Kreisel auch nur eine Relativdrehung von einem Umlauf in der Sekunde mitbekommen hat. Die Figurenachse steht mithin im Raume merklich still; für einen erdfesten Beobachter dreht sie sich demnach scheinbar mit der negativen Drehgeschwindigkeit $-\mathfrak{o}$ der Erde. FOUCAULT[1]) hat auf einen Vorschlag von PERSON[2]) hin im Jahre 1852 versucht, diese Relativdrehung $-\mathfrak{o}$ mit Hilfe eines sog. **Gyroskopes** nachzuweisen (Abb. 37; der Kreisel ruht in einem Cardangehänge r_1, r_2, das an einem möglichst torsionsfreien Faden schwebt). Ein vollständig befriedigendes Ergebnis konnte er jedoch infolge der Störung durch Reibung und Schwerpunktsexzentrizität nicht erreichen.

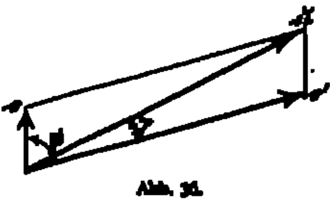


Abb. 36.

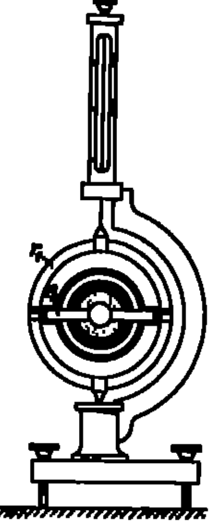


Abb. 37. Foucaultisches Gyroskop.

44. Der schwere Kreisel. Die Relativbewegung des reibungsfrei gestützten schweren Kreisels ist enthalten in der aus (9) von Ziff. 41 mit $\mathfrak{b}_0' = 0$, $\dot{\mathfrak{o}} = 0$, $\mathfrak{R} = 0$ folgenden Gleichung

$$\mathsf{E}\dot{\mathfrak{o}}' + [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}\mathfrak{o}')] + [\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o})] + [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}'\mathfrak{o})] = m[\mathfrak{r}_s(\mathfrak{g}_0 - \mathfrak{b}_0)]. \qquad (1)$$

Dabei ist m die Kreiselmasse, und der Vektor $\mathfrak{g}_0$ der wirklichen Schwerebeschleunigung mag mit dem Vektor $\mathfrak{b}_0$ der Zentripetalbeschleunigung des Aufhängepunkts infolge der Erddrehung künftig ein für allemal zu dem Vektor

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 - \mathfrak{b}_0 \qquad (2)$$

der scheinbaren Schwerebeschleunigung zusammengefaßt werden.

Die allgemeine Untersuchung der Gleichung (1) ist bisher nicht einmal für den symmetrischen Kreisel in Angriff genommen worden. Einfache Ergebnisse lassen sich aber für den **schnellen** symmetrischen Kreisel (Ziff. 29) leicht gewinnen, falls man von den in $\omega = |\mathfrak{o}|$ quadratischen Gliedern absieht, also den Ausdruck $[\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o})]$ unterdrückt. Beim schnellen symmetrischen Kreisel

[1]) L. FOUCAULT, Recueil des travaux scientifiques, S. 401 u. 576. Paris 1878.
[2]) C.-C. PERSON, C. R. Bd. 35, S. 417 u. 549. 1852.

darf $\mathfrak{S}' = \mathrm{E}\mathfrak{o}' = C\mathfrak{o}'$ gesetzt werden, ferner ist $\mathrm{E}\mathring{\mathfrak{o}} + [\mathfrak{o}'(\mathrm{E}\mathfrak{o}')] = \mathring{\mathfrak{S}}'$ die Änderungsgeschwindigkeit des vom erdfesten Beobachter aus gerechneten Schwungvektors, und endlich rechnet man leicht nach, daß hier $[\mathfrak{o}'(\mathrm{E}'\mathfrak{o})] = [\mathfrak{o}\mathfrak{S}']$ wird. Damit ist aber aus (1) die folgende Gleichung geworden

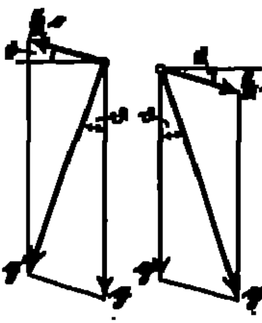
$$\mathring{\mathfrak{S}}' + [\mathfrak{o}\mathfrak{S}'] = m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{g}], \tag{3}$$

die sich von der ohne weiteres nach (5) von Ziff. 4 anschreibbaren strengen Gleichung

$$\dot{\mathfrak{S}} = \mathring{\mathfrak{S}} + [\mathfrak{o}\mathfrak{S}] = m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{g}],$$

wo $\mathfrak{S}$ der absolute Schwungvektor ist, zwar kaum zahlenmäßig, aber begrifflich scharf unterscheidet.

Wir mögen uns einen gesenkten Kreisel (Ziff. 26) vorstellen, den man wohl auch ein Kreiselpendel heißt. Je nachdem die Eigendrehung, von oben gesehen, im Uhrzeigersinn erfolgt oder im Gegenzeigersinn, nennt man den Kreisel rechts- oder linksdrehend und hat dann als Ausdruck der Tatsache, daß der Schwungvektor des schnellen Kreisels nahezu genau in der Figurenachse liegt,


Abb. 38. Kreiselpendel.

$$\mathfrak{S}' = \pm s\mathfrak{r}_s, \qquad \text{wo} \qquad s = \frac{|\mathfrak{S}'|}{|\mathfrak{r}_s|}. \tag{4}$$

Damit folgt aus (3)

$$\mathring{\mathfrak{S}}' = m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{g}'], \qquad \text{wo} \qquad \mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \pm \frac{s}{m}\mathfrak{o}, \tag{5}$$

und dies besagt: Die Relativbewegung des schnellen schweren symmetrischen Kreisels vollzieht sich annähernd so, als wäre der Vektor $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{g}'$ ersetzt; sie ist also eine pseudoreguläre Präzession, deren Achse jedoch nicht mehr genau lotrecht abwärts weist, sondern (Abb. 38) beim rechtsdrehenden Kreisel etwas nach Norden, beim linksdrehenden etwas nach Süden geneigt ist, und zwar je um den kleinen Winkel

$$\vartheta = \frac{s\omega\cos\Phi}{mg}, \tag{6}$$

wo Φ wieder die geographische Breite (Polhöhe) bedeutet. Außerdem folgt für den Betrag g' von $\mathfrak{g}'$ in den beiden Fällen

$$g' = g \mp \frac{s\omega\sin\Phi}{m}. \tag{7}$$

Setzt man diesen Wert in die aus Ziff. 29, Gleichung (2), in Verbindung mit Ziff. 20, Gleichung (6) und (11), zu entnehmende Umlaufsdauer der pseudoregulären Präzession

$$t = \frac{2\pi}{\mu'} = \frac{2\pi s}{mg'}$$

ein, so kommt beim rechtsdrehenden Kreiselpendel

$$t_1 = \frac{2\pi s}{mg}\left(1 + \frac{s\omega\sin\Phi}{mg}\right), \tag{8}$$

beim linksdrehenden

$$t_2 = \frac{2\pi s}{mg}\left(1 - \frac{s\omega\sin\Phi}{mg}\right) \tag{9}$$

und also eine Differenz der Umlaufsdauern[1])

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \frac{4\pi\mathfrak{S}^2}{s^2 g^2}\,\omega\sin\Phi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{t_1'+t_2'}{2}\right)^2\omega\sin\Phi, \tag{10}$$

wenn man denselben Kreisel mit gleichem Schwung das eine Mal rechts-, das andere Mal linksdrehend laufen läßt.

Man kann mit elektrisch angetriebenen Kreiseln Präzessionsdauern von etwa 20 Minuten erreichen und hätte unter der geographischen Breite $\Phi = 48°$ eine Differenz von $\Delta t' = 25$ Sekunden zu erwarten. Der naheliegende Versuch scheint bis jetzt nicht angestellt worden zu sein; er würde eine Erweiterung des Pendelversuchs von BRAVAIS bedeuten[2]).

Ist μ die Präzessionsgeschwindigkeit im absoluten Raum, so wird die zu t_1' bzw. t_2' gehörige relative Präzessionsgeschwindigkeit

$$\mu_1' = \mu - \omega\sin\Phi, \qquad \mu_2' = \mu + \omega\sin\Phi, \tag{11}$$

welche Werte leicht unmittelbar zu deuten sind.

45. Der geführte Kreisel. Der Kreisel möge jetzt starr oder nachgiebig an eine erdfeste Führung gebunden sein. Dann ist die Gleichung (1) von Ziff. 44 durch das Führungsmoment $\mathfrak{R}_e$ zu ergänzen:

$$\mathsf{E}\dot{\mathfrak{o}}' + [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}\mathfrak{o}')] + [\mathfrak{o}(\mathsf{E}\mathfrak{o})] + [\mathfrak{o}'(\mathsf{E}'\mathfrak{o})] = m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{g}] + \mathfrak{R}_e, \tag{1}$$

und hierzu treten noch die geometrischen und physikalischen Bedingungen der Führung.

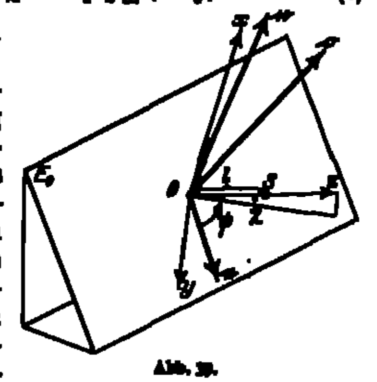


Abb. 59.

Der einzige Fall, der bisher praktische Bedeutung gewonnen hat, betrifft die Führung durch eine erdfeste Ebene E_0 durch den Stützpunkt O in der Weise, daß die Figurenachse des als symmetrisch vorausgesetzten Kreisels entweder sich nur in der Ebene E_0 drehen kann oder allgemeiner an diese Ebene durch eine elastische oder quasielastische Kraft so gebunden ist, daß außerdem noch kleine Auslenkungen aus der Ebene möglich werden. Diese Kraft sowie etwaige sonstige, die Bewegung der Figurenachse in der Ebene E_0 regulierende Kräfte wollen wir der Einfachheit halber in $\mathfrak{R}_e$ aufgenommen denken, auch wenn es sich nicht um Reaktionen, sondern um eingeprägte Kräfte handelt.

Die Raumstellung der Ebene E_0 ist (Abb. 59) durch ihren Normalenvektor $\mathfrak{n}$ und durch den Vektor $\mathfrak{e}$ ihrer steilsten Fallinie gegeben. Die Figurenachse des Kreisels sei zur z-Achse eines weder erd- noch körperfesten Achsenkreuzes $Oxyz$ gewählt, dessen y-Achse stets in der Ebene E_0 liegt. Die positive z-Achse trage den Schwerpunkt S und gehe aus dem Vektor $\mathfrak{e}$ hervor, indem man diesen in der Ebene E_0 um den Winkel ψ (im Sinne einer zu $\mathfrak{n}$ gehörenden Rechtsschraube) und dann um die y-Achse um einen Winkel χ (im Sinne einer zur positiven y-Achse gehörenden Rechtsschraube) dreht; dann bildet auch die positive x-Achse mit $\mathfrak{n}$ den Winkel χ. Die Komponenten des Relativdrehvektors $\mathfrak{o}'$ in diesem System sind $\omega_x' = \dot\psi$, $\omega_y' = \dot\chi$ und ω_z', die Komponenten des relativen Schwungvektors $\mathfrak{S}'$ also $A\dot\psi$, $A\dot\chi$ und $C\omega_z'$. Da sich das Achsenkreuz $Oxyz$

[1]) R. GRAMMEL, Die mechanischen Beweise usw., S. 59.
[2]) Vgl. Kap. 7, Ziff. 20 ds. Bd. des Handb.

gegen den Kreisel mit der Drehgeschwindigkeit $-\mathfrak{v}_z'$ dreht, so gilt für die Änderungsgeschwindigkeit $\dot{\mathfrak{S}}'$ des Schwungvektors, beurteilt von dem System $Oxyz$ aus,

$$\dot{\mathfrak{S}}' - [\mathfrak{v}_z' \mathfrak{S}'] = \mathring{\mathfrak{S}}',$$

und daher kann man die beiden ersten Glieder von (1) umformen, wie folgt:

$$\mathsf{E}\mathring{\mathfrak{v}}' + [\mathfrak{v}'(\mathsf{E}\mathfrak{v}')] = \mathring{\mathfrak{S}}' + [\mathfrak{v}'\mathfrak{S}'] = \dot{\mathfrak{S}}' + [\mathfrak{v}_z'\mathfrak{S}'] + [\mathfrak{v}_g'\mathfrak{S}'].$$

Bezeichnet man noch mit $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ und G_x, G_y, G_z sowie R_{0x}, R_{0y}, R_{0z} die Komponenten von $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{G} = m\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{R}_0$, mit l den absoluten Betrag von $\mathfrak{r}_s$ und vernachlässigt von vornherein wieder das in der Erdgeschwindigkeit ω quadratische Glied $[\mathfrak{v}(\mathsf{E}\mathfrak{v})]$, so lautet die Komponentendarstellung der Gleichung (1)

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\psi} + C\omega_z'(\dot{\chi} + \omega_y) - (2A - C)\omega_z\dot{\chi} &= -G_y l + R_{0x}, \\ A\ddot{\chi} - C\omega_z'(\dot{\psi} + \omega_x) + (2A - C)\omega_z\dot{\psi} &= G_x l + R_{0y}, \\ C(\dot{\omega}_z' - \omega_y\dot{\psi} + \omega_x\dot{\chi}) &= R_{0z}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Praktisch kann man an diesen Gleichungen mancherlei Vereinfachungen anbringen. Auch bei verhältnismäßig langsamer Eigendrehung ω_z' des Kreisels um seine Figurenachse wird doch immer noch ω_z' sehr groß gegen die Erddrehung ω sein, so daß man die mit $(2A - C)\omega_z$ behafteten Glieder stets gegen die Glieder mit $C\omega_z'$ streichen darf. Die dritte Gleichung (2) zeigt ferner, daß die Eigendrehung ω_z' zwar durch die Erddrehung ω grundsätzlich beeinflußt wird; aber die hiervon herrührende Variation $\Delta\omega_z'$ ist sicherlich außerordentlich klein gegen ω_z', namentlich wenn man, wie dies die Regel ist, schnellaufende Kreisel verwendet. Demnach wird man sich um die dritte Gleichung (2) gar nicht weiter kümmern und die Eigendrehung ω_z' des Kreisels in den beiden ersten Gleichungen (2) als unveränderlich gegeben ansehen. Wir setzen dann noch zur Abkürzung den Betrag des relativen Eigenschwungs

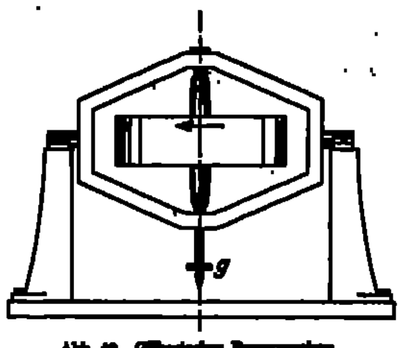


Abb. 40. Gilbertsches Barygyroskop.

$$C\omega_z' = S \tag{3}$$

und rechnen S positiv oder negativ, je nachdem der Kreisel rechts- oder linksdrehend ist, wenn man in der positiven z-Achse blickt.

Die beiden experimentell verwirklichten Sonderfälle sind die folgenden[1]:

a) Das Kreiselinklinatorium. Die Ebene E_0 steht lotrecht und die Normale $\mathfrak{n}$ bildet mit der Ostrichtung den Winkel Ψ, wogegen Φ wieder die geographische Breite sei. Diese Anordnung entsteht (allerdings für $l = 0$) aus dem Foucaultschen Gyroskop (Abb. 37 von Ziff. 43), wenn man dort den äußeren Cardanring (r_1) erdfest hält, und ist noch zweckmäßiger (auch für $l \neq 0$) im Gilbertschen[2] Barygyroskop (Abb. 40) verwirklicht, wo die Länge l durch ein verstellbares kleines Übergewicht (g) reguliert werden kann. Die Bindung der Figurenachse an die Ebene E_0 darf hier als starr angesehen werden, so daß in den Gleichungen (2) nun $\chi = 0$ zu setzen ist. Die zweite Gleichung würde

[1]) Über den allgemeinen Fall beliebiger Stellung der Ebene vgl. R. GRAMMEL, Der Kreisel, S. 245.

[2]) PH. GILBERT, Journ. de phys. Bd. 2, S. 106. Paris 1883.

dann lediglich zur Bestimmung der infolge der Bewegung $\dot\psi$ geweckten Führungskraft dienen; die erste Gleichung aber lautet

$$A'\ddot\psi + G'l\sin\psi - S\omega(\sin\Phi\sin\psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\psi) = R_{0\psi}, \tag{4}$$

wo $R_{0\psi}$ nur noch das Moment etwaiger Gleitreibung in den wagerechten Lagern des Cardanrings vorstellt, und wobei A' statt A und G' statt G geschrieben ist, unter G' und A' das Gewicht und das äquatoriale Trägheitsmoment des Kreisels zuzüglich des beweglichen Cardanrings verstanden. Man formt (4) um in

$$A'\ddot\psi + H\sin(\psi - \psi_0) = R_{0\psi}, \tag{5}$$

wo

$$\psi_0 = \operatorname{arctg}\frac{S\omega\cos\Phi\cos\Psi}{G'l - S\omega\sin\Phi}, \tag{6}$$

$$H^2 = (S\omega\cos\Phi\cos\Psi)^2 + (G'l - S\omega\cos\Phi)^2$$

ist. Die Figurenachse vollzieht demnach Pendelschwingungen um die Nullage $\psi = \psi_0$.

Nimmt man beispielsweise $\Psi = 0$ und $l = 0$, d. h. orientiert man die Ebene E_0 des astatisch zentrierten Kreisels von Nord nach Süd, so wird $\psi_0 = \frac{\pi}{2} + \Phi$; d. h. dann stellt sich die Figurenachse nach Abklingen der Schwingungen, abgesehen von der Reibung, so ein, daß der Eigenschwungvektor mit dem Vektor $\mathfrak{o}$ der Erddrehung richtungsgleich geworden ist: die Figurenachse zeigt dann zum Himmelspol (Kreiselinklinatorium). Der von FOUCAULT angestellte Versuch scheiterte freilich an den durch Reibung und mangelhafte Astasierung bedingten Störungen.

Diese Störungen beseitigt man nach GILBERTS Vorschlag dadurch, daß man das Übergewicht (g) zwar sehr klein, aber doch so groß wählt, daß der Schwerpunkt merklich genau auf der Figurenachse liegt. Dann zeigt die Figurenachse des nicht angetriebenen Kreisels lotrecht abwärts, die des angetriebenen neigt sich nord- oder südwärts um den Winkel ψ_0, je nachdem der Kreisel rechts- oder linksdrehend ist, und zwar ist in nördlicher geographischer Breite der Nordausschlag bei gleichem Eigenschwung etwas größer als der Südausschlag.

b) Das Kreiseldeklinatorium. Die Ebene E_0 liegt wagerecht und der Vektor $\mathfrak{e}$ wird willkürlich nordwärts orientiert. Diese Anordnung entsteht aus dem Foucaultschen Gyroskop (Abb. 37), wenn man den inneren Cardanring (r_a) gegen den äußeren festklemmt. Bei starrer Führung der Figurenachse in genau wagerechter Ebene ist auch hier zunächst $\chi = 0$, und aus der ersten Gleichung (2) wird

$$A''\ddot\psi + S\omega\cos\Phi\sin\psi = R_{0\psi},$$

wo nun A'' die Masse der beiden Cardanringe berücksichtigt. Diese Gleichung zeigt, daß die Figurenachse Pendelschwingungen um den Meridian als Nullage vollzieht, und daß nach Abklingen der Schwingungen der Schwungvektor, abgesehen von der Reibung, nach Norden weist (Kreiseldeklinatorium). Der ebenfalls von FOUCAULT angestellte Versuch wurde durch die Torsionssteifigkeit des Fadens gestört.

Man kann diese berücksichtigen, indem man $R_{0\psi}$ zerlegt in ein eigentliches Reibungsmoment $R'_{0\psi}$ und in ein Glied $-h^2(\psi - \psi_1)$, wo ψ_1 das Azimut der Ruhestellung des nicht angetriebenen Kreisels und h^2 die Torsionssteifigkeitszahl bedeuten. Hängt man, wie dies A. FÖPPL[1]) mit einem elektromotorisch

[1]) A. FÖPPL, Münchener Ber. Bd. 34, S. 5. 1904; Phys. ZS. Bd. 5, S. 416. 1904. Über eine Fortführung dieser Versuche s. M. SCHULER, Festschrift für A. Föppl, S. 148. Berlin 1924.

angetriebenen Kreisel getan hat, den Cardanring trifilar auf, so hat man besser $-h^2 \sin(\psi - \psi_1)$ zu nehmen und für das Führungsmoment $R_{\varphi\chi} = -h^2\chi$ zu setzen, wo h^2 die Zugsteifigkeit der Fäden mißt und χ nun als von Null verschieden zuzulassen ist. Für einen astasierten Kreisel lauten jetzt die beiden ersten Gleichungen (2) mit $l = 0$

$$\left.\begin{aligned} A''\ddot{\psi} + S(\dot{\chi} + \omega\cos\Phi\sin\psi) + h^2\sin(\psi - \psi_1) &= R'_{\psi\omega}, \\ A'''\ddot{\chi} - S[\dot{\psi} + \omega(\sin\Phi\cos\chi - \cos\Phi\cos\psi\sin\chi)] + h^2\chi &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Erwägt man, daß die Bewegung $\dot{\psi}$ sehr rasch gegenüber der Erddrehung sein wird, daß dagegen die Ausschläge χ und jedenfalls auch die Beschleunigungen $\ddot{\chi}$ recht klein gegen das große Glied $S\dot{\psi}$ bleiben, wogegen h^2 eine große Zahl ist, so darf man die zweite Gleichung (7) kürzer in der Form $S\dot{\psi} = h^2\chi$ schreiben und bringt damit die erste Gleichung (7) auf die Gestalt

$$\left(A'' + \frac{S^2}{h^2}\right)\ddot{\psi} + H\sin(\psi - \psi_0) = R'_{\psi\omega}, \quad (8)$$

wo

$$\psi_0 = \operatorname{arctg}\frac{h^2\sin\psi_1}{h^2\cos\psi_1 + S\omega\cos\Phi}, \quad (9)$$

$$H^2 = (h^2\sin\psi_1)^2 + (h^2\cos\psi_1 + S\omega\cos\Phi)^2 \quad (10)$$

gesetzt ist. Die Nullage der Figurenachse des laufenden Kreisels ist jetzt zwar nicht mehr der Meridian; aber durch Beobachtung der nach der Theorie des Pendels leicht in H auszudrückenden Schwingungsdauer kann die Größe von ω erschlossen werden. Tatsächlich fand A. FÖPPL diesen Wert aus seinen Versuchen bis auf etwa 2% genau.

Man kann nach dem Vorschlage von Lord KELVIN[1]) das Torsionsmoment völlig beseitigen, wenn man die Figurenachse auf einen Schwimmer legt, der in Quecksilber eintaucht. Dann ist das Reibungsmoment $R'_{\psi\omega}$ eine mit $\dot{\psi} = 0$ verschwindende Funktion von $\dot{\psi}$ und unabhängig vom Azimut ψ; außerdem ist jetzt h^2 das Produkt aus Metazenterhöhe s und Gesamtgewicht G des Schwimmers und Kreisels (wenigstens für kleine Auslenkungen χ), so daß aus den Gleichungen (7) die folgenden entstehen

$$\left.\begin{aligned} A''\ddot{\psi} + S(\dot{\chi} + \omega\cos\Phi\sin\psi) - R'_{\psi\omega}(\dot{\psi}) &= 0, \\ A'''\ddot{\chi} - S(\dot{\psi} + \omega\sin\Phi) + sG\chi &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Ein solcher Kreisel stellt, da seine Figurenachse genau zum Nordazimut $\psi = 0$ strebt, einen nichtmagnetischen Kompaß vor, und in der Tat umfassen die Gleichungen (11) die Theorie des Einkreiselkompasses[2]).

Es mag noch erwähnt werden, daß die Gleichungen (2) leicht auch nach der Theorie der zyklischen Systeme (Ziff. 52) hergeleitet werden können. Die mit $\dot{\psi}$, $\dot{\chi}$, ω_x, ω_y, ω_z behafteten Glieder stellen nämlich die aus Ziff. 39 bekannten Kreiselmomente vor, welche durch die Drehungen $\dot{\psi}$, $\dot{\chi}$, ω_x, ω_y, ω_z geweckt werden; und diese darf man dabei wie eingeprägte Momente behandeln. Ruht die Figurenachse beispielsweise in wagerechter Meridianlage, so muß das von ω erzeugte Kreiselmoment $S\omega\cos\Phi$ durch ein Reaktionsmoment der Unterlage aufgehoben werden, dessen Vektor nach Westen oder Osten weist, je nachdem der Schwungvektor nach Norden oder Süden zeigt. Das Nord- bzw. Südende der Figurenachse drückt also schwächer auf die Unterlage als das Süd- bzw. Nordende, und diese Druckunterschiede sollten sich mit einer empfindlichen Wage gerade noch nachweisen lassen[3]).

[1]) W. THOMSON, Nature Bd. 30, S. 524. 1884.
[2]) Vgl. Kap. 9, Ziff. 37 ds. Bd. des Handb.
[3]) R. GRAMMEL, Die mechanischen Beweise usw., S. 64.

VIII. Systeme starrer Körper.

46. Die Gelenkkette. Die wichtigste Form des Verbandes mehrerer starrer Körper zu einem System ist die sog. Gelenkkette. Hierbei bilden die Körper eine Reihe, in der je zwei aufeinanderfolgende Glieder durch ein Gelenk zusammenhängen. Die Reihe kann in sich geschlossen oder offen, sie kann unverzweigt oder verzweigt sein. Feste oder bewegliche Führungen können dazutreten. Die einfachsten Gelenke sind das Kugelgelenk und das Zylindergelenk, das erste mit Drehfreiheit nach allen Richtungen, das zweite mit Drehfreiheit nur um eine Achse, die in den beiden verbundenen Körpern festliegt. Das Kreuzgelenk vermittelt eine Drehung mit zwei Freiheitsgraden und besteht aus zwei gegeneinander festen Drehachsen, von denen die eine dem einen, die andere dem anderen Körper angehört. Im allgemeinen Falle kreuzen sich die beiden Achsen windschief. Wenn sie sich rechtwinklig schneiden, so entsteht das Hookesche Gelenk, wogegen das Cardangelenk (Abb. 14b von Ziff. 16) einem Kugelgelenk gleichwertig ist. Will man die Massen des Gelenkkreuzes oder

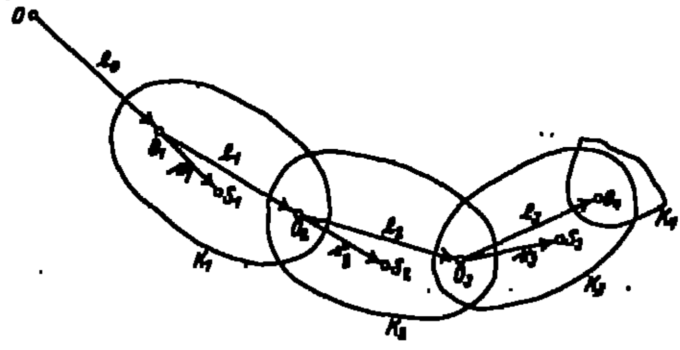


Abb. 41. Gelenkkette.

der Cardanringe berücksichtigen, so hat man sie als selbständige weitere Glieder der Kette anzusehen, die mit den Nachbargliedern durch Zylindergelenke verbunden sind. Die meisten physikalischen und technischen Mechanismen sind Gelenkketten.

Die Kinetik der Gelenkkette kann, wie schon die Kinetik des Massenpunktes und des einzelnen starren Körpers, entweder nach der skalaren, Lagrangeschen oder nach der vektoriellen, Eulerschen Methode durchgeführt werden. Wir entwickeln zuerst die hauptsächlich von FISCHER[1]) und HEUN[2]) geschaffene zweite Methode.

47. Die unverzweigte Kugel- und Zylindergelenkkette. Ist die Kette unverzweigt, und sind nur Kugelgelenke vorhanden (eingeschlossen den Sonderfall von Zylindergelenken), so läßt sich die Kinetik des Systems in bemerkenswert einfacher Form darstellen. Man geht von einem raumfesten Bezugspunkt O aus (Abb. 41) und nimmt außerdem die Gelenkmittelpunkte O_i als im Körper K_i feste Bezugspunkte hinzu (bei Zylindergelenken ist O_i ein beliebiger Punkt der Gelenkachse), wobei O_1 willkürlich in K_1 gewählt wird, falls der Körper K_1 nicht etwa selbst ein raumfestes Gelenk besitzt. Die Fahrstrahlen OO_1, O_1O_2, O_2O_3 usw.

---

[1]) O. FISCHER, Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper. Leipzig 1906; sowie mehrere Abhandlungen in den Leipziger Ber.

[2]) K. HEUN, Lehrbuch der Mechanik, Teil I. Leipzig 1906; sowie Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 2 (Ansätze und allgemeine Methodik der Systemmechanik).

werden mit $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2$ usw. bezeichnet, der Fahrstrahl von O_i nach dem Schwerpunkt S_i des Körpers K_i mit $\mathfrak{r}_i$. Ferner sei m_i die Masse, E_i der auf O_i bezogene Trägheitstensor und $\mathfrak{o}_i$ der Drehvektor von K_i bei der Drehung im Gelenk O_i, endlich $\mathfrak{v}_i$ der Geschwindigkeitsvektor des Punktes O_i.

Dann ist nach Ziff. 2, Gleichung (6) und (12), der Impuls von K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\mathfrak{J}_i = m_i(\mathfrak{v}_i + [\mathfrak{o}_i \mathfrak{r}_i]) = m_i\left(\mathfrak{v}_1 + \sum_1^{i-1}[\mathfrak{o}_k \mathfrak{l}_k] + [\mathfrak{o}_i \mathfrak{r}_i]\right) \tag{1}$$

und das Impulsmoment von K_i bezogen auf O_i

$$\mathfrak{E}_i = m_i[\mathfrak{r}_i \mathfrak{v}_i] + \mathsf{E}_i \mathfrak{o}_i = m_i\left[\mathfrak{r}_i\left(\mathfrak{v}_1 + \sum_1^{i-1}[\mathfrak{o}_k \mathfrak{l}_k]\right)\right] + \mathsf{E}_i \mathfrak{o}_i, \tag{2}$$

wobei wir verabreden, daß das Summationssymbol $\sum_i^{i-1}$ die Zahl Null bedeuten soll, und n die Gesamtzahl der Kettenglieder ist.

Man bildet die sog. **Impulsionsvektoren**

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \sum_1^n \mathfrak{J}_k, \\ \mathfrak{E}^{(i)} &= \mathfrak{E}_i + \left[\mathfrak{l}_i \sum_{i+1}^n \mathfrak{J}_k\right]. \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Impulsion $\mathfrak{J}$ ist gleich dem Gesamtstoß, den die ganze Kette beim momentanen Abbremsen ihrer Bewegung an ihre Umgebung abgeben würde; die Impulsion $\mathfrak{E}^{(i)}$ ist der Drehstoß, der um das Gelenk O_i entstünde, wenn die Körper $K_i, K_{i+1}, \ldots K_n$ momentan angehalten würden. Das gesamte Impulsmoment, bezogen auf O_1 wird nach Ziff. 4, Gleichung (5),

$$\mathfrak{E} = \sum_1^n\left\{\mathfrak{E}_k + \left[\left(\sum_0^{k-1}\mathfrak{l}_i\right)\mathfrak{J}_k\right]\right\},$$

wofür man gemäß (3) durch Einführung der Impulsionen auch viel kürzer schreiben kann

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{l}_0 \mathfrak{J}] + \sum_1^n \mathfrak{E}^{(k)}. \tag{4}$$

Die doppelte Bewegungsenergie nach Ziff. 3, Gleichung (2),

$$2T = \sum_1^n (\mathfrak{v}_k \mathfrak{J}_k + \mathfrak{o}_k \mathfrak{E}_k)$$

nimmt, in den Impulsionen ausgedrückt, ebenfalls eine sehr einfache Form an:

$$2T = \mathfrak{v}_1 \mathfrak{J} + \sum_1^n \mathfrak{o}_k \mathfrak{E}^{(k)}. \tag{5}$$

Wir verfolgen weiterhin nur den Fall, daß die Gelenke reibungsfrei seien, so daß keine Reaktionsmomente durch sie übertragen werden, und nennen $\mathfrak{R}_{i,i+1}$ die Reaktionskraft, die der Körper K_i auf den Körper K_{i+1} im Gelenk O_{i+1} überträgt. Insbesondere ist $\mathfrak{R}_{01}$ die Reaktionskraft, die auf K_1 im Punkt O_1, und $\mathfrak{R}_{n+1,n}$ die Reaktionskraft, die auf K_n im Punkt O_{n+1} von außen her ausgeübt wird. Die eingeprägten Kräfte auf K_i fassen wir zu $\mathfrak{K}_i$ zusammen, die eingeprägten Momente auf K_i, bezogen auf O_i, haben die Resultante $\mathfrak{M}_i$. Außer $\mathfrak{R}_{01}$ und $\mathfrak{R}_{n+1,n}$ sehen wir von äußeren Reaktionskräften und Reaktions-

momenten ab. Dann lauten die Impulsgleichungen für den Körper K_i, bezogen auf O_i nach Ziff. 4, Gleichung (5) und (6),

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{J}}_i &= \mathfrak{K}_i + \mathfrak{R}_{i-1,i} + \mathfrak{R}_{i+1,i}, \\ \dot{\mathfrak{S}}_i + [\mathfrak{v}_i \mathfrak{J}_i] &= \mathfrak{M}_i + [\mathfrak{l}_i \mathfrak{R}_{i+1,i}]. \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (6)$$

Diese Gleichungen sind vorzüglich geeignet, die innere kinetostatische Aufgabe zu lösen, d. h. die Reaktionen $\mathfrak{R}_{ik}$ zu bestimmen, sobald die Bewegung bekannt ist. Für die Ermittlung der Bewegung selbst sind sie jedoch nicht bequem, solange sie die inneren Reaktionen enthalten. Man bildet daher aus ihnen durch Elimination dieser inneren Reaktionen mittels $\mathfrak{R}_{ik} = -\mathfrak{R}_{ki}$ das folgende System, dessen zweite Gleichung auch unmittelbar angeschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathfrak{J}} = \sum_1^n \dot{\mathfrak{J}}_k = \sum_1^n \mathfrak{K}_k + \mathfrak{R}_{01} + \mathfrak{R}_{n+1,n}, \\ &\dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{M} + [\mathfrak{l}_0 \mathfrak{R}_{01}] + \left[\left(\sum_0^n \mathfrak{l}_k\right) \mathfrak{R}_{n+1,n}\right], \\ &\mathfrak{W}_i = \dot{\mathfrak{S}}_i + [\mathfrak{v}_i \mathfrak{J}_i] + \left[\mathfrak{l}_i \sum_{i+1}^n \dot{\mathfrak{J}}_k\right] = \mathfrak{M}_i + \left[\mathfrak{l}_i \sum_{i+1}^n \mathfrak{K}_k\right] + [\mathfrak{l}_i \mathfrak{R}_{n+1,n}], \quad (i = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}\right\} (7)$$

wobei $\mathfrak{M}$ das gesamte eingeprägte Moment bezüglich O und $\mathfrak{W}_i$ eine Abkürzung für die rechte Seite der dritten Gleichungen bedeutet.

Bei der Durchführung der Rechnung empfiehlt es sich, folgende neuen Größen zu benützen:

$$\left.\begin{aligned} m &= \sum_1^n m_k, \\ m \mathfrak{a}_i &= m_i \mathfrak{r}_i + \mathfrak{l}_i \sum_{i+1}^n m_k, \\ \mathsf{E}_{ii} &= \mathsf{E}_i + (\mathfrak{l}_i^2 \mathsf{I} - \mathfrak{l}_i \cdot \mathfrak{l}_i) \sum_{i+1}^n m_k, \\ \mathsf{E}_{is} &= m\{(\mathfrak{l}_i \mathfrak{a}_s) \mathsf{I} - \mathfrak{a}_s \cdot \mathfrak{l}_i\}, \qquad \text{wenn } s > i \\ \mathsf{E}_{is} &= m\{(\mathfrak{a}_i \mathfrak{l}_s) \mathsf{I} - \mathfrak{l}_s \cdot \mathfrak{a}_i\}, \qquad \text{wenn } s < i \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

wo $i, s = 1, 2, \ldots n$ und $s \neq i$ ist. Dabei ist m die ganze Masse aller Glieder. Die Vektoren $\mathfrak{a}_i$, von O_i aus aufgetragen, heißen die Hauptstrecken und führen nach den sog. Hauptpunkten hin. Die Größen E_{ii} sind reduzierte Trägheitstensoren, die Größen E_{is} sind (unsymmetrische) Affinoren, und zwar ist E_{si} konjugiert zu E_{is}. Die Größen $\mathfrak{a}_i$ und E_{ii} liegen im Körper K_i fest. Der Gesamtschwerpunkt hat von O aus den Fahrstrahl

$$\mathfrak{r}_s = \mathfrak{l}_0 + \sum_1^n \mathfrak{a}_k. \qquad (9)$$

Ferner findet man leicht durch Ausrechnen für die Impulsionen (3)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J} &= m\left\{\mathfrak{v}_1 + \sum_1^n [\mathfrak{w}_k \mathfrak{a}_k]\right\}, \\ \mathfrak{S}^{(i)} &= m[\mathfrak{a}_i \mathfrak{v}_1] + \sum_1^n \mathsf{E}_{ik} \mathfrak{w}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

und daraus nach (4) für das Impulsmoment $\mathfrak{S}$ bezüglich O

$$\mathfrak{S} = m\left\{[\mathfrak{r}_s \mathfrak{v}_1] + \left[\mathfrak{l}_0 \sum_1^n [\mathfrak{w}_k \mathfrak{a}_k]\right]\right\} + \sum_1^n \sum_1^n \mathsf{E}_{ik} \mathfrak{w}_k \qquad (11)$$

sowie für die doppelte Bewegungsenergie nach (5)

$$2T = m\left\{\mathfrak{v}_1^2 + 2\mathfrak{v}_1\sum_1^n[\mathfrak{o}_k\mathfrak{a}_k]\right\} + \sum_1^n\sum_1^n \mathfrak{o}_i \mathrm{E}_{ik}\mathfrak{o}_k . \tag{12}$$

Diese Gleichungen stellen die unmittelbare Verallgemeinerung der Gleichungen (6) und (12) von Ziff. 2 und der Gleichung (4) von Ziff. 3 des einzelnen starren Körpers auf die Gelenkkette dar.

Aber auch die rechten Seiten der Impulsgleichungen (7) nehmen nach Einführung der Hauptstrecken $\mathfrak{a}_i$ und der reduzierten Trägheitstensoren E_{ii} eine verhältnismäßig einfache Gestalt an. Dies folgt für die beiden ersten Gleichungen (7) sofort aus den Ausdrücken für $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{S}$ in (10) und (11). Und auch die rechte Seite der dritten Gleichung (7) läßt sich leicht umformen. Zunächst nämlich hat man nach (3) wegen $\dot{\mathfrak{l}}_i = [\mathfrak{o}_i\mathfrak{l}_i]$

$$\dot{\mathfrak{S}}^{(i)} = \dot{\mathfrak{S}}_i + \left[[\mathfrak{o}_i\mathfrak{l}_i]\sum_{i+1}^n\mathfrak{J}_k\right] + \left[\mathfrak{l}_i\sum_{i+1}^n\dot{\mathfrak{J}}_k\right],$$

und daher wird

$$\mathfrak{W}_i = \dot{\mathfrak{S}}^{(i)} + [\mathfrak{v}_i\mathfrak{J}_i] - \left[[\mathfrak{o}_i\mathfrak{l}_i]\sum_{i+1}^n\mathfrak{J}_k\right];$$

dies läßt sich wegen $\dot{\mathfrak{a}}_i = [\mathfrak{o}_i\mathfrak{a}_i]$ umformen in

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{W}_i = \frac{d}{dt}(\mathrm{E}_{ii}\mathfrak{o}_i) + m\Big\{[\mathfrak{a}_i\dot{\mathfrak{v}}_1] + [[\mathfrak{o}_i\mathfrak{a}_i]\mathfrak{v}_1] + \Big[\mathfrak{a}_i\sum_1^{i-1}([\dot{\mathfrak{o}}_k\mathfrak{l}_k] + [\mathfrak{o}_k[\mathfrak{o}_k\mathfrak{l}_k]])\Big]\\ + \Big[\mathfrak{l}_i\sum_{i+1}^n([\dot{\mathfrak{o}}_k\mathfrak{a}_k] + [\mathfrak{o}_k[\mathfrak{o}_k\mathfrak{a}_k]])\Big]\Big\}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Man erkennt hiernach in der ersten und dritten Gleichung (7) die Verallgemeinerung der Impulsgleichungen (10) von Ziff. 4 auf die Gelenkkette. Dabei kann man noch, wie dort,

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{E}_{ii}\mathfrak{o}_i) = \mathrm{E}_{ii}\overset{*}{\mathfrak{o}}_i + [\mathfrak{o}_i(\mathrm{E}_{ii}\mathfrak{o}_i)] \tag{14}$$

setzen, indem man die durch einen Stern bezeichnete Differentiation lieber vom Körper K_i aus vornimmt, in welchem ja der Tensor E_{ii} ruht.

Ist die Schwerkraft die einzige eingeprägte Kraft, so kann man die Hauptstrecken auch in die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (7) einführen. Ist $\mathfrak{g}$ der Vektor der Schwerebeschleunigung, so lauten diese Gleichungen jetzt

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathfrak{J}} &= m\mathfrak{g} + \mathfrak{R}_{01} + \mathfrak{R}_{n+1,n},\\ \dot{\mathfrak{S}} &= m[\mathfrak{r}_s\mathfrak{g}] + [\mathfrak{l}_0\mathfrak{R}_{01}] + \Big[\Big(\sum_0^n\mathfrak{l}_k\Big)\mathfrak{R}_{n+1,n}\Big],\\ \mathfrak{W}_i &= m[\mathfrak{a}_i\mathfrak{g}] + [\mathfrak{l}_i\mathfrak{R}_{n+1,n}]. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

48. Die ebene Gelenkkette. Kommen nur Zylindergelenke O_i vor, deren Achsen A_i überdies unter sich parallel und zugleich Hauptträgheitsachsen ihres Körpers K_i sind, und liegen die Schwerpunkte S_i alle in einer zu den A_i senkrechten Ebene, die auch den Vektor $\mathfrak{v}_1$ enthalten soll, so spricht man von einer ebenen Gelenkkette. Für eine solche vereinfachen sich die Gleichungen der vorigen Ziffer erheblich, da die unter sich parallelen Vektoren $\mathfrak{o}_i$ jetzt auf den Vektoren $\mathfrak{l}_k$ und $\mathfrak{a}_k$ sowie $\mathfrak{v}_1$ senkrecht stehen. Ist k_i der Trägheitsarm des Körpers

K_i bezüglich der Achse A_i, so bildet man ein reduziertes Trägheitsmoment von K_i, nämlich

$$m\varkappa_i^2 = m_i k_i^2 + \mathfrak{l}_i^2 \sum_{i+1}^{n} m_k, \tag{1}$$

und gewinnt dann aus der ersten und dritten Gleichung (7) von Ziff. 47 folgende gebrauchsfertigen Formeln, die wir gleich für den Fall, daß nur die Schwerkraft als eingeprägte Kraft vorkommt, anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} & m\Big\{\dot{\mathfrak{v}}_1 + \sum_1^n\big([\dot{\mathfrak{o}}_k\mathfrak{a}_k] - \omega_k^2\mathfrak{a}_k\big)\Big\} = m\mathfrak{g} + \mathfrak{R}_{n1} + \mathfrak{R}_{n+1,n}, \\ & m\Big\{\varkappa_i^2\dot{\mathfrak{o}}_i + [\mathfrak{a}_i\dot{\mathfrak{v}}_1] - \mathfrak{o}_i\cdot\mathfrak{a}_i\mathfrak{v}_1 + \sum_{k=1}^{i-1}\big(\dot{\mathfrak{o}}_k\cdot\mathfrak{a}_i\mathfrak{l}_k - \omega_k^2[\mathfrak{a}_i\mathfrak{l}_k]\big) \\ & \qquad + \sum_{k=i+1}^{n}\big(\dot{\mathfrak{o}}_k\cdot\mathfrak{l}_i\mathfrak{a}_k - \omega_k^2[\mathfrak{l}_i\mathfrak{a}_k]\big)\Big\} = m[\mathfrak{a}_i\mathfrak{g}] + [\mathfrak{l}_i\mathfrak{R}_{n+1,n}]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dabei ist ω_i der Betrag von $\mathfrak{o}_i$.

Die Impulsionen sind nach (10) von Ziff. 47

$$\left.\begin{aligned} & \mathfrak{J} = m\Big\{\mathfrak{v}_1 + \sum_1^n[\mathfrak{o}_k\mathfrak{a}_k]\Big\}, \\ & \mathfrak{S}^{(i)} = m\Big\{\varkappa_i^2\mathfrak{o}_i + [\mathfrak{a}_i\mathfrak{v}_1] + \sum_{k=1}^{i-1}\mathfrak{o}_k\cdot\mathfrak{a}_i\mathfrak{l}_k + \sum_{k=i+1}^{n}\mathfrak{o}_k\cdot\mathfrak{l}_i\mathfrak{a}_k\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die doppelte Bewegungsenergie berechnet sich dann vollends aus (5) von Ziff. 47 zu

$$2T = m\Big\{\mathfrak{v}_1^2 + 2\sum_1^n\mathfrak{o}_k[\mathfrak{a}_k\mathfrak{v}_1] + \sum_1^n\varkappa_k^2\omega_k^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\omega_i\omega_k\mathfrak{a}_i\mathfrak{l}_k\Big\}, \tag{4}$$

wenn man die Identität $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\omega_i\omega_k\mathfrak{a}_i\mathfrak{l}_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}\omega_i\omega_k\mathfrak{l}_i\mathfrak{a}_k$ beachtet, und daher gelten für die ebene Kette die bemerkenswerten Formeln

$$\mathfrak{S}^{(i)} = \frac{\partial T}{\partial\omega_i}\mathfrak{e}, \tag{5}$$

unter $\mathfrak{e}$ einen Einheitsvektor verstanden, der in der Achse A_i liegt und mit dem positiven Drehsinn von $\mathfrak{o}_i$ eine Rechtsschraube bildet.

Ein Beispiel zu diesen Gleichungen gibt Ziff. 50.

49. Systeme mit kinetischer Bindung. Indem wir uns anschicken, die Lagrangesche (skalare) Methode für Gelenkketten zu entwickeln, dehnen wir die Aufgabe sogleich auf den ganz allgemeinen Fall beliebiger Ketten starrer Körper aus, von denen einzelne an Führungen gebunden sein mögen, die sogar beweglich sein dürfen, z. B. Lager mit Eigenbewegung (sog. rheonome Führung). Man spricht dann nach dem Vorschlag von THOMSON und TAIT von Systemen mit kinetischer Bindung. Der Fahrstrahl von einem raumfesten Bezugspunkt O nach einem beliebigen Systempunkt von der Masse dm ist jetzt nicht nur von den n nichtgeführten allgemeinen Lagekoordinaten q_i der Körper, sondern auch noch explizit von der Zeit abhängig

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t, q_1, q_2, \ldots q_n). \tag{1}$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist also

$$\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}} = \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial t} + \sum_1^n\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i;$$

die Bewegungsenergie

$$T = \tfrac{1}{2}\mathsf{S}\,dm\,\mathfrak{v}^2 = T_0 + T_1 + T_2 \tag{2}$$

läßt sich in drei verschiedenartige Bestandteile

$$\left.\begin{aligned}
T_0 &= \frac{1}{2}\mathsf{S}\,dm\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial t}\right)^2,\\
T_1 &= \sum_1^n B_i\dot{q}_i \qquad \text{mit} \qquad B_i = \mathsf{S}\,dm\,\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial t}\,\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i},\\
T_2 &= \frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n B_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad \text{mit} \qquad B_{ik} = \mathsf{S}\,dm\,\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_i}\,\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial q_k}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

zerlegen, wo T_0 die Koordinatengeschwindigkeiten $\dot{q}_i$ gar nicht enthält, während T_1 linear in $\dot{q}_i$ ist und T_2 eine quadratische Form der $\dot{q}_i$ darstellt (wie die Energie eines skleronomen Systems).

Die Koeffizienten B_i und B_{ik} der linearen und quadratischen Form und ebenso die Größe T_0 lassen sich bei einem System von starren Körpern immer leicht durch die Massen m_i und die Massenmomente ausdrücken (vgl. Ziff. 50).

Die kinetischen Gleichungen werden nach der Lagrangeschen Vorschrift[1]) genau so wie für skleronome Systeme gebildet, nämlich bei Beschränkung auf holonome Koordinaten:

$$W_i \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

wo Q_i die Lagrangeschen Kräfte und W_i wieder Abkürzungen für die linken Seiten sind („Systembeschleunigungen" nach HEUN). Wichtig ist aber die explizite Durchrechnung dieses Ansatzes von THOMSON und TAIT[2]). Wir haben

$$\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} = B_i,$$

wobei T_0 und B_i noch von den q_i abhängen können. Infolgedessen wird

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial B_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial B_i}{\partial q_k}\dot{q}_k,$$

und damit zerspaltet sich

$$W_i = W_i^r + W_i^f + W_i^c \tag{5}$$

in die drei charakteristischen Teile

$$\left.\begin{aligned}
W_i^r &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial q_i},\\
W_i^f &= \frac{\partial B_i}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_i},\\
W_i^c &= \sum_{k=1}^n G_{ik}\dot{q}_k, \qquad \text{wo} \qquad G_{ik} = \frac{\partial B_i}{\partial q_k} - \frac{\partial B_k}{\partial q_i}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Diese Zerspaltung entspricht durchaus der dreiteiligen Zergliederung der Motorgleichung (4) von Ziff. 41; die Glieder W_i^r rühren nur von der Relativbewegung her, die Glieder W_i^f drücken die Führungsbewegung aus, und die Glieder W_i^c entsprechen der Coriolisbeschleunigung.

[1]) Vgl. Kap. 2, Ziff. 9 ds. Bd. des Handb.

[2]) W. THOMSON u. P. G. TAIT, Treatise on Natural Philosophy Bd. I, Teil 1, Art. 319.

Kennzeichnend für diese letzten, in $\dot q_i$ linearen Glieder sind die Eigenschaften ihrer von den q_i und vielleicht auch von der Zeit explizit abhängigen Koeffizienten G_{ik}, nämlich

$$G_{ki} = -G_{ik}, \qquad G_{ii} = 0. \tag{7}$$

Somit fehlt in W_i^* gerade das Glied mit $\dot q_i$, auf dessen Koordinate sich die Gleichung $W_i = Q_i$ bezieht, und jedes andere in der i-ten Gleichung vorkommende Glied $G_{ik}\dot q_k$ findet sich in der k-ten Gleichung mit entgegengesetztem Vorzeichen als $-G_{ik}\dot q_i$ wieder. Diese Eigenschaft teilt das rheonome System mit den sog. gyroskopischen Gliedern in den Gleichungen der zyklischen Systeme (Ziff. 52). Man nennt W_i^* daher wohl auch die **gyroskopische Beschleunigung**.

Um den Energiesatz des Systems zu berechnen, bildet man die Leistung N der eingeprägten Kräfte in den allgemeinen Koordinaten:

$$N = \sum_1^s Q_i \dot q_i = \sum_1^s W_i \dot q_i. \tag{8}$$

Dabei wird nach (6)

$$\sum_1^s W_i' \dot q_i = \frac{dT_2}{dt},$$

weil T_2 eine homogene Funktion zweiten Grades in $\dot q_i$ und also $\sum \frac{\partial T_2}{\partial \dot q_i}\dot q_i = 2T_2$ ist. Ferner wird nach (5) und (6)

$$\sum_1^s W_i'' \dot q_i = \frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{d' T_0}{dt},$$

wo das Symbol d'/dt eine Differentiation bedeutet, bei welcher die q_i, nicht aber die $\dot q_i$ und die explizit vorkommende Zeit t als veränderlich betrachtet werden. Endlich kommt auf Grund von (7)

$$\sum_1^s W_i^* \dot q_i = 0,$$

so daß aus (8) wird

$$\frac{dT_2}{dt} = N + \frac{d' T_0}{dt} - \frac{\partial T_1}{\partial t}.$$

Nimmt man dazu

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{d' T_0}{dt}, \qquad \frac{dT_1}{dt} = \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{d' T_1}{dt} + \sum_1^s B_i \ddot q_i,$$

so folgt für die Änderung der gesamten Bewegungsenergie

$$\frac{dT}{dt} = N + \frac{dT_0}{dt} + \frac{d'(T_0 + T_1)}{dt} + \sum_1^s B_k \ddot q_k. \tag{9}$$

Die letzten drei Glieder stellen die Zufuhr von Bewegungsenergie dar, die das geführte System von der Führung empfängt.

50. Das ebene Doppel- und Mehrfachpendel. Wir veranschaulichen die Entwicklungen von Ziff. 48 und 49 am ebenen körperlichen Mehrfachpendel, dessen Aufhängepunkt O_1 willkürlich bewegt wird. Man mag es sich unter dem Bild von Abb. 41 von Ziff. 47 vorstellen, doch soll der Einfachheit halber vorausgesetzt werden, daß jeder Vektor $\mathfrak{r}_i$ und damit auch jeder Vektor $\mathfrak{a}_i$ (Ziff. 47) dem Vektor $\mathfrak{l}_i$ parallel sei, d. h. daß die Punkte $O_i S_i O_{i+1}$ in jedem Körper K_i auf einer Geraden liegen. In der gemeinsamen lotrechten Ebene der Punkte S_i legen

wir durch den Punkt O eine x-Achse wagerecht von links nach rechts, eine y-Achse lotrecht abwärts und nennen φ_i den Winkel, um den man die positive y-Achse im Gegenzeigersinne drehen müßte, bis sie zum Vektor $\mathfrak{l}_i$ parallel würde; dann können die Winkel φ_i als Lagrangesche Koordinaten q_i gewählt werden.

Der von O nach einem Punkte P_i des Körpers K_i gezogene Fahrstrahl ist

$$(\mathfrak{r})_i = \mathfrak{l}_0(t) + \sum_1^{i-1} \mathfrak{l}_h(\varphi_h) + \mathfrak{r}_{(i)}(\varphi_i)\,, \tag{1}$$

falls mit $\mathfrak{r}_{(i)}$ der von O_i nach P_i gezogene Fahrstrahl bezeichnet wird. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathfrak{r})_i}{\partial t} &= \dot{\mathfrak{l}}_0 = \mathfrak{v}_1\,,\\
\frac{\partial(\mathfrak{r})_i}{\partial \varphi_h} &= \bar{\mathfrak{l}}_h \ \text{ für } h < i\,,\\
\frac{\partial(\mathfrak{r})_i}{\partial \varphi_i} &= \bar{\mathfrak{r}}_{(i)}\,,\\
\frac{\partial(\mathfrak{r})_i}{\partial \varphi_h} &= 0 \ \text{ für } h > i\,,
\end{aligned}$$

wobei, wie schon in Ziff. 7, $\bar{\mathfrak{l}}_h$ und $\bar{\mathfrak{r}}_{(i)}$ die um 90° im Gegenzeigersinn gedrehten Vektoren $\mathfrak{l}_h$ und $\mathfrak{r}_{(i)}$ vorstellen. Bezeichnet man also mit $\dot{x}_1$ und $\dot{y}_1$ die beiden Komponenten von $\mathfrak{v}_1$, mit m wieder die Gesamtmasse $\sum m_h$, mit l_i und a_i die Beträge von $\mathfrak{l}_i$ und $\mathfrak{a}_i$, so wird gemäß (3) von Ziff. 49 und (1) von Ziff. 48

$$\begin{aligned}
T_0 &= \tfrac{1}{2} m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)\,,\\
B_i &= m a_i(\dot{x}_1 \cos\varphi_i - \dot{y}_1 \sin\varphi_i)\,,\\
B_{ii} &= m \varkappa_i^2\,,\\
B_{ik} &= B_{ki} = m l_i a_k \cos(\varphi_i - \varphi_k)\,, \qquad \text{wo } i < k\,,\\
T_1 &= m\sum_1^n a_h \dot{\varphi}_h(\dot{x}_1 \cos\varphi_h - \dot{y}_1 \sin\varphi_h)\,,\\
T_2 &= \tfrac{1}{2} m\sum_1^n \varkappa_i^2 \dot{\varphi}_i^2 + m{\sum_1^n}' l_i a_h \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_h \cos(\varphi_i - \varphi_h)\,;
\end{aligned}$$

hierbei bedeutet das Symbol $\sum'$ eine Doppelsumme über alle Zeiger i, h, die der Bedingung $i < h$ gehorchen.

Jetzt findet man vollends leicht für die drei Bestandteile von W_i

$$\left.\begin{aligned}
W_i^1 &= m\Big\{\varkappa_i^2 \ddot{\varphi}_i + a_i \sum_1^{i-1} l_h \ddot{\varphi}_h \cos(\varphi_i - \varphi_h) + l_i \sum_{i+1}^n a_h \ddot{\varphi}_h \cos(\varphi_i - \varphi_h)\\
&\qquad + a_i \sum_1^{i-1} l_h \dot{\varphi}_h^2 \sin(\varphi_i - \varphi_h) + l_i \sum_{i+1}^n a_h \dot{\varphi}_h^2 \sin(\varphi_i - \varphi_h)\Big\}\,,\\
W_i^2 &= m a_i\{(\ddot{x}_1 - \dot{y}_1 \dot{\varphi}_i)\cos\varphi_i - (\ddot{y}_1 + \dot{x}_1 \dot{\varphi}_i)\sin\varphi_i\}\,,\\
W_i^3 &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und für die Lagrangeschen Kräfte

$$Q_i = -m g a_i \sin\varphi_i\,, \tag{3}$$

womit die Bewegungsgleichungen

$$W_i = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

explizit gefunden sind.

Man stellt fest, daß diese Gleichungen mit den zweiten Gleichungen (2) von Ziff. 48 vollständig übereinstimmen; die Eulersche und die Lagrangesche Methode führen in diesem Fall auf dasselbe System. Im allgemeinen Falle trägt jedoch die Lagrangesche Methode ersichtlich weiter.

Andererseits aber liefert die Eulersche Methode jetzt in der ersten Gleichung (2) von Ziff. 48, worin $\mathfrak{R}_{n+1,n} = 0$ zu setzen ist, auch noch die Aufhängereaktion $\mathfrak{R}_{01}$. Die Zufuhr von Bewegungsenergie durch die Führung in der Zeiteinheit berechnet sich entweder nach Ziff. 49, Gleichung (9) oder in der Form $\mathfrak{v}_1(\mathfrak{R}_{01} + m\mathfrak{g})$ zu

$$m\dot{x}_1\left\{\ddot{x}_1 + \sum_1^n a_k(\ddot{\varphi}_k\cos\varphi_k - \dot{\varphi}_k^2\sin\varphi_k)\right\} + m\dot{y}_1\left\{\ddot{y}_1 - \sum_1^n a_k(\ddot{\varphi}_k\sin\varphi_k + \dot{\varphi}_k^2\cos\varphi_k)\right\}. \quad (5)$$

Die allgemeine Integration des Systems (2), (3), (4) ist bis jetzt nicht gelungen. Sie ist aber möglich, wenn man sich auf kleine Ausschläge φ_i beschränkt und von Beschleunigungen des Aufhängepunktes absieht. Man darf dann $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 0$ setzen und wird auf das lineare System

$$\varkappa_i^2\ddot{\varphi}_i + a_i\sum_1^{i-1} l_k\ddot{\varphi}_k + l_i\sum_{i+1}^n a_k\ddot{\varphi}_k + g a_i\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (6)$$

geführt, dessen Integration bekannt ist und gekoppelte harmonische Schwingungen liefert, deren n Frequenzen α (bezogen auf 2π Zeiteinheiten) der Frequenzgleichung n-ten Grades in α^2 gehorchen:

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1^2 - \frac{g a_1}{\alpha^2} & l_1 a_2 & l_1 a_3 & \ldots l_1 a_n \\ a_2 l_1 & \varkappa_2^2 - \frac{g a_2}{\alpha^2} & l_2 a_3 & \ldots l_2 a_n \\ a_3 l_1 & a_3 l_2 & \varkappa_3^2 - \frac{g a_3}{\alpha^2} & \ldots l_3 a_n \\ \vdots & & & \\ a_n l_1 & a_n l_2 & a_n l_3 & \ldots \varkappa_n^2 - \frac{g a_n}{\alpha^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Das ruhig aufgehängte n-fache Pendel kann bei geeigneter Anfangsbewegung wie ein einfaches starres Pendel schwingen, wenn die Gleichungen

$$\frac{\varkappa_i^2}{a_i} + \sum_1^{i-1} l_k + \frac{l_i}{a_i}\sum_{i+1}^n a_k = c \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (8)$$

erfüllt sind, wo c irgendeine reelle positive Zahl ist, und diese Bedingungen gelten dann nicht nur für kleine Ausschläge.

Eine genauere Diskussion scheint bisher nur für das Doppelpendel von kleinen Ausschlägen durchgeführt worden zu sein[1]). Man hat das System

$$\varkappa_1^2\ddot{\varphi}_1 + l_1 a_2\ddot{\varphi}_2 + g a_1\varphi_1 = 0,$$
$$\varkappa_2^2\ddot{\varphi}_2 + l_1 a_2\ddot{\varphi}_1 + g a_2\varphi_2 = 0.$$

[1]) VELTMANN, Dinglers polyt. Journ. 1876; vgl. auch die Lehrbücher der technischen Mechanik, z. B. A. FÖPPL, Bd. 6 und H. LORENZ, Bd. 1, und besonders ausführlich bei G. HAMEL, Elementare Mechanik, Nr. 341 f., wo auch das Problem „Glocke und Klöppel" einer kritischen Untersuchung unterworfen wird.

Es liegt hier nach M. WIEN[1]) der Fall der sog. Beschleunigungskoppelung vor. Die allgemeinen Integrale lauten

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1\sin(\alpha_1 t+\beta_1)+A_2\sin(\alpha_2 t+\beta_2),\\ \varphi_2 &= \varrho_1 A_1\sin(\alpha_1 t+\beta_1)+\varrho_2 A_2\sin(\alpha_2 t+\beta_2).\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i^2 &= \frac{g}{2(\varkappa_1^2\varkappa_2^2-l_1^2a_2^2)}\left[a_1\varkappa_2^2+a_2\varkappa_1^2\pm\sqrt{(a_1\varkappa_2^2-a_2\varkappa_1^2)^2+4l_1^2a_1a_2^2}\right],\\ \varrho_i &= \frac{1}{2l_1a_2}\left[a_1\varkappa_2^2-a_2\varkappa_1^2\mp\sqrt{(a_1\varkappa_2^2-a_2\varkappa_1^2)^2+4l_1^2a_1a_2^2}\right],\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

und die Integrationskonstanten A_i und β_i hängen mit den Anfangswerten φ_i^0, $\dot\varphi_i^0$ der Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten zusammen durch

$$A_1=\frac{\sqrt{\gamma_1^2+\delta_1^2}}{\varrho_2-\varrho_1},\qquad A_2=\frac{\sqrt{\gamma_2^2+\delta_2^2}}{\varrho_1-\varrho_2},\qquad \operatorname{tg}\beta_1=\frac{\gamma_1}{\delta_1},\qquad \operatorname{tg}\beta_2=\frac{\gamma_2}{\delta_2},\qquad(11)$$

wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 &= \varphi_1^0\varrho_2-\varphi_2^0, &\qquad \gamma_2 &= \varphi_1^0\varrho_1-\varphi_2^0,\\ \delta_1 &= \frac{\dot\varphi_1^0\varrho_2-\dot\varphi_2^0}{\alpha_1}, &\qquad \delta_2 &= \frac{\dot\varphi_1^0\varrho_1-\dot\varphi_2^0}{\alpha_2}\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

setzt. Die beiden Teilschwingungen jedes Einzelpendels erfolgen also synchron, doch mit je im allgemeinen verschiedenen Amplituden, und die Frequenzen sind wegen $\varkappa_1^2\varkappa_2^2>l_1^2a_2^2$ stets reell.

Ist insbesondere $a_1\varkappa_2^2=a_2\varkappa_1^2$, so wird $\varrho_2=-\varrho_1=+\sqrt{a_1/a_2}$; läßt man dann die Pendel die Lotlage gleichzeitig mit Anfangsgeschwindigkeiten passieren, die sich wie $\dot\varphi_1^0:\dot\varphi_2^0=\sqrt{a_2}:\sqrt{a_1}$ verhalten, so vereinfachen sich die Lösungen zu

$$\varphi_1=\frac{\dot\varphi_1^0}{\alpha_2}\sin\alpha_2 t,\qquad \varphi_2=\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,\varphi_1;$$

d. h. dann sind die Ausschläge φ_1 und φ_2 dauernd zueinander proportional.

Die Bedingungen (8) lassen sich für das Doppelpendel in die Gleichung

$$a_2(\varkappa_1^2+l_1a_2)=a_1(\varkappa_2^2+l_1a_2)\qquad(13)$$

zusammenfassen. Diese ist von Bedeutung für das aus Glocke und Klöppel bestehende Doppelpendel; ist sie zufällig genau oder genähert erfüllt, so kann (aber muß nicht) das Läuten der Glocke versagen. Sieht man den Klöppel als Massenpunkt m_2 in S_2 mit masseloser Stange $O_2S_2=s_2$ an, so geht die vorletzte Bedingung mit $O_1S_1=s_1$ über in

$$l_1+s_2=\frac{\varkappa_1^2}{s_1},$$

und dies bedeutet nach Ziff. 8, daß sich der Klöppel im Schwingungsmittelpunkt der Glocke befinde.

Die Differentialgleichungen (4) umfassen auch den allgemeinen Fall des willkürlich bewegten Aufhängepunktes. Handelt es sich insbesondere um ein einfaches ebenes Pendel mit kleinen Ausschlägen, so erhält man als Bewegungsgleichung

$$k^2\ddot\varphi-s\dot y_1\dot\varphi+s(g-\ddot y_1)\varphi=-s\ddot x_1.\qquad(14)$$

Die mathematische Behandlung dieser Gleichung ist namentlich für den Fall weit durchgeführt worden[2]), daß x_1 und y_1 periodische Funktionen der Zeit

[1]) M. WIEN, Ann. d. Phys. Bd. 61, S. 151. 1897.
[2]) G. HAMEL, Math. Ann. Bd. 73, S. 371, 1912.

vorstellen, d. h. daß der Aufhängepunkt selbst zu einer harmonischen Schwingung gezwungen wird. Dies ist für Seismographen, Pallographen usw.[1]) von Bedeutung.

51. Die Routhsche Funktion. Für allgemeine Körperketten [z. B. auch Stützketten, verzweigte Ketten[2])], eignen sich diejenigen kinetischen Gleichungen, die ROUTH[3]) für holonome Systeme zwischen die Lagrangeschen Gleichungen in den Geschwindigkeitskoordinaten und die Hamiltonschen Gleichungen in den Impulskoordinaten so eingeschaltet hat, daß sie die Brücke zwischen beiden bilden, von der man durch Spezialisierung sowohl zu den einen wie zu den anderen gelangen kann. Während HAMILTON mit Hilfe der zwischen den Impuls- und Geschwindigkeitskoordinaten bestehenden linearen Gleichungen (von denen nachher ausführlich die Rede sein wird) die Geschwindigkeitskoordinaten in den Impulskoordinaten ausdrückt und eliminiert, so tut dies ROUTH nur für einen Teil von ihnen. Die Lagekoordinaten q zerfallen sonach in zwei Gruppen nämlich erstens $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$, deren Geschwindigkeitskoordinaten $\dot\varphi_i$ bleiben, und zweitens $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$, deren Impulskoordinaten Ψ_k an die Stelle der eliminierten Geschwindigkeitskoordinaten $\dot\psi_k$ treten.

Die Impulskoordinaten Φ_i und Ψ_k sind aus der Bewegungsenergie T definiert durch[4])

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_i} &= \Phi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots m)\\ \frac{\partial T}{\partial\dot\psi_k} &= \Psi_k. \qquad (k = 1, 2, \ldots n)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Sind also P_i und Q_k die zu φ_i und ψ_k gehörigen Lagrangeschen Kräfte, so lauten die Lagrangeschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Phi_i}{dt} - \frac{\partial T}{\partial\varphi_i} &= P_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots m)\\ \frac{d\Psi_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial\psi_k} &= Q_k. \qquad (k = 1, 2, \ldots n)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nun ist nach (1)

$$\delta T = \sum_1^m \frac{\partial T}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial\psi_k}\delta\psi_k + \sum_1^m \Phi_i\delta\dot\varphi_i + \sum_1^n \Psi_k\delta\dot\psi_k$$

und

$$\delta\sum_1^n \Psi_k\dot\psi_k = \sum_1^n \Psi_k\delta\dot\psi_k + \sum_1^n \dot\psi_k\delta\Psi_k;$$

definiert man also die Routhsche Funktion R durch

$$R = T - \sum_1^n \Psi_k\dot\psi_k, \tag{3}$$

so kommt durch Subtraktion der beiden vorhergehenden Gleichungen

$$\delta R = \sum_1^m \frac{\partial T}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial\psi_k}\delta\psi_k + \sum_1^m \Phi_i\delta\dot\varphi_i - \sum_1^n \dot\psi_k\delta\Psi_k.$$

---

[1]) S. Kap. 9, Ziff. 58 ds. Bd. des Handb.

[2]) H. PFLIEGER-HÄRTEL, Über die kleinen Schwingungen einer dreigliedrigen ebenen Gelenkkette usw. Dissert. Jena 1914.

[3]) E. J. ROUTH, On the stability of a given state of motion. London 1876. Vgl. auch E. J. ROUTH, Dynamik, Bd. I, S. 375, sowie K. HEUN, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 2, S. 453.

[4]) Vgl. Kap. 2, Ziff. 11 ds. Bd. des Handb.

Denkt man sich aber (was sofort explizit vorgenommen werden wird) überall die $\dot{\psi}_h$ in den Ψ_h ausgedrückt, so daß $R = R(\varphi_i, \psi_h, \dot{\varphi}_i, \Psi_h)$ wird, so ist auch

$$\delta R = \sum_1^m \frac{\partial R}{\partial \varphi_i}\delta\varphi_i + \sum_1^n \frac{\partial R}{\partial \psi_h}\delta\psi_h + \sum_1^m \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}_i}\delta\dot{\varphi}_i + \sum_1^n \frac{\partial R}{\partial \Psi_h}\delta\Psi_h .$$

Der Vergleich zeigt, daß

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial R}{\partial \varphi_i}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi_h} = \frac{\partial R}{\partial \psi_h}, \qquad \Phi_i = \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}_i}, \qquad \dot{\psi}_h = -\frac{\partial R}{\partial \Psi_h},$$

und also lauten die Gleichungen (2)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial \varphi_i} = P_i; \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \qquad (4)$$

$$\frac{d\Psi_h}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \psi_h} + Q_h, \qquad \frac{d\psi_h}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \Psi_h}. \qquad (h = 1, 2, \ldots n) \qquad (5)$$

Die erste Gruppe dieser Gleichungen, nämlich (4), ist wie die Lagrangeschen Gleichungen gebaut, die zweite Gruppe, nämlich (5), hat den Charakter der Hamiltonschen kanonischen Gleichungen[1]). Fällt die zweite Gruppe aus, d. h. werden überhaupt keine Koordinatengeschwindigkeiten eliminiert ($n = 0$), so wird $R \equiv T$, und die Gleichungen (4) stimmen ganz mit den Lagrangeschen überein. Werden dagegen alle Koordinatengeschwindigkeiten entfernt und durch ihre Impulskoordinaten ersetzt, so fällt die erste Gruppe fort, und für konservative Systeme, wo die äußeren Kräfte Q_h ein nur von den Lagekoordinaten ψ_h abhängiges Potential V besitzen, geht dann der Ausdruck $R - V$ gerade in die (negative) Hamiltonsche Funktion $-H$ und also das System (5) genau in die kanonischen Gleichungen über.

Für die in Ziff. 52 beabsichtigte Anwendung auf zyklische Systeme müssen wir die Routhsche Funktion und also den genannten Eliminationsprozeß noch explizit darstellen[2]), wobei wir uns auf skleronome Fälle beschränken. Für solche ist T eine homogene quadratische Funktion der $\dot{\varphi}_i$ und $\dot{\psi}_h$ und läßt sich also in folgende drei Teile zerspalten:

$$T = B + M + C, \qquad (6)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2}\sum_1^m\sum_1^m B_{i\iota}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_\iota, \\ M &= \sum_1^m\sum_1^n M_{ih}\dot{\varphi}_i\dot{\psi}_h, \\ C &= \tfrac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n C_{h\varkappa}\dot{\psi}_h\dot{\psi}_\varkappa. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Der Teil B enthält also nur die $\dot{\varphi}_i$, der Teil C nur die $\dot{\psi}_h$, das Mittelglied M stellt die Koppelung beider Koordinatengruppen vor. In den Summen laufen die Zeiger i und ι stets von 1 bis m, die Zeiger h und $\varkappa$ von 1 bis n und zugleich ist

$$B_{i\iota} = B_{\iota i}, \qquad C_{h\varkappa} = C_{\varkappa h}, \qquad (8)$$

aber im allgemeinen $M_{ih} \neq M_{hi}$. Die Koeffizienten $B_{i\iota}$, $C_{h\varkappa}$, und M_{ih} sind (als bekannt anzusehende) Funktionen der Lagekoordinaten φ_i und ψ_h.

[1]) Vgl. Kap. 3, Ziff. 2 ds. Bd. des Handb.

[2]) Vgl. W. Thomson u. P. G. Tait, Treatise on Natural Philosophy Bd. I, Art. 319.

Um die zwischen den Ψ_h und den $\dot\psi_h$ bestehenden linearen Beziehungen aufzustellen, bildet man nach (1)

$$\Psi_h = \frac{\partial M}{\partial \dot\psi_h} + \frac{\partial C}{\partial \dot\psi_h} = \sum_{i=1}^{m} M_{ih}\dot\varphi_i + \sum_{n=1}^{s} C_{hn}\dot\psi_n \tag{9}$$

oder, mit der Abkürzung

$$M_h = \sum_{i=1}^{m} M_{ih}\dot\varphi_i \tag{10}$$

für die rechtsstehende lineare Kombination der $\dot\varphi_i$,

$$\sum_{n=1}^{s} C_{hn}\dot\psi_n = \Psi_h - M_h. \qquad (h = 1, 2, \dots s) \tag{11}$$

Die Lösungen dieses Systems von linearen Gleichungen können (unter bekannten, als erfüllt vorausgesetzten Bedingungen) in der Form

$$\dot\psi_h = \sum_{n=1}^{s} C_{hn}^{*}(\Psi_n - M_n) \tag{12}$$

dargestellt werden, wo die $C_{hn}^{*} = C_{nh}^{*}$ aus der Determinante und den Unterdeterminanten der Matrix $\| C_{hn} \|$ gebildete, also bekannte Funktionen der φ_i und ψ_h sind.

Andererseits folgt aus (9) und (10) unmittelbar mit (7)

$$\sum_1^s \Psi_h\dot\psi_h + \sum_1^s M_h\dot\psi_h = 2M + 2C,$$

und mithin gestaltet sich die kinetische Energie (6) zu

$$T = B + \tfrac{1}{2}\sum_1^s (\Psi_h + M_h)\dot\psi_h$$

und also die Routhsche Funktion (5) zu

$$R = B - \tfrac{1}{2}\sum_1^s (\Psi_h - M_h)\dot\psi_h = B - \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s C_{hn}^{*}(\Psi_h - M_h)(\Psi_n - M_n).$$

Hierfür kann man mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} C_\Psi^{*} &= \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s C_{hn}^{*}\Psi_h\Psi_n, \\ C_M^{*} &= \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s C_{hn}^{*}M_hM_n, \\ \beta_{ih} &= \sum_{n=1}^{s} C_{hn}^{*}M_{in} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

kürzer schreiben

$$R = B - C_\Psi^{*} - C_M^{*} + \sum_1^m\sum_1^s \beta_{ih}\Psi_h\dot\varphi_i, \tag{14}$$

womit R als Funktion von φ_i, ψ_h, $\dot\varphi_i$ und Ψ_h gefunden ist. Bemerkenswert ist das letzte Glied, auf dessen Bedeutung HEUN[1] ausdrücklich hingewiesen hat; hier erscheinen die $\dot\varphi_i$ und die Ψ_h linear, während in C_Ψ^{*} die Ψ_h und in C_M^{*} die $\dot\varphi_i$ je quadratisch auftreten.

[1] K. HEUN, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 2, S. 455.

Von dem System der Routhschen Gleichungen (4) und (5) läßt sich jetzt der zweite Teil der kanonischen Gruppe (5) noch etwas umformen. Man hat zunächst nach (14)

$$\dot{\psi}_k = -\frac{\partial R}{\partial \Psi_k} = \frac{\partial C_\Psi^*}{\partial \Psi_k} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{ik}\dot{\varphi}_i.$$

Die Summe rechts kann aber, wie man nach (13) ausrechnet, in der Form $\partial C_M^*/\partial M_k$ dargestellt werden, so daß man für die Koordinatengeschwindigkeiten $\dot{\psi}_k$ erhält

$$\dot{\psi}_k = \frac{\partial C_\Psi^*}{\partial \Psi_k} - \frac{\partial C_M^*}{\partial M_k}. \tag{15}$$

52. Zyklische Systeme; die Kelvin-Taitschen Gleichungen. Zyklische Systeme[1]) sind dadurch ausgezeichnet, daß erstens zyklische Koordinaten vorhanden sind, d. h. solche, die nicht selbst, sondern nur in ihren Geschwindigkeiten in der Bewegungsenergie vorkommen, und daß zweitens die zu den zyklischen Koordinaten gehörigen Lagrangeschen Kräfte fehlen. Nach der Zahl der zyklischen Koordinaten nennt man das System monozyklisch, dizyklisch usw. Beispiele sind schon der in Ziff. 31 behandelte schwere unsymmetrische Kreisel (monozyklisches System) und der in Ziff. 20ff. behandelte schwere symmetrische Kreisel (dizyklisches System). Wir bezeichnen die zyklischen Koordinaten mit ψ_k, die übrigen mit φ_i und schließen dann wegen

$$\frac{\partial T}{\partial \psi_k} = \frac{\partial R}{\partial \psi_k} = 0 \qquad \text{und} \qquad Q_k = 0$$

aus Ziff. 51, Gleichung (5), daß

$$\Psi_k = \text{konst.} = c_k \tag{1}$$

ist. Die zyklischen Impulse sind also konstant, und so liegt es nahe, sie an Stelle der im allgemeinen veränderlichen zyklischen Geschwindigkeiten in die kinetischen Gleichungen einzuführen. Dazu verhilft aber gerade der in Ziff. 51 entwickelte Routhsche Eliminationsprozeß. Da die ψ_k von vornherein fehlen, so werden damit überhaupt alle mit den zyklischen Koordinaten veränderlichen Größen aus den kinetischen Gleichungen entfernt.

Man faßt in der Routhschen Funktion (14) von Ziff. 51

$$R = B - C_c^* - C_M^* + \sum_1^m \sum_1^n \beta_{ik} c_k \dot{\varphi}_i$$

die in den nichtzyklischen Koordinaten φ_i und ihren Geschwindigkeiten ausgedrückten Glieder $B - C_M^*$ zu einem nichtzyklischen Anteil T_φ der Bewegungsenergie

$$T_\varphi = B - C_M^* \tag{2}$$

zusammen und kann dann die Gleichungen (4) von Ziff. 51 für die nichtzyklischen Koordinaten in der Kelvin-Taitschen Form schreiben[2])

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_\varphi}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial C_c^*}{\partial \varphi_i} + \sum_{i=1}^{m} G_{ii}\dot{\varphi}_i = P_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{3}$$

wenn man die Abkürzungen

$$G_{ii} = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varphi_i}\right) \tag{4}$$

[1]) Vgl. Kap. 2, Ziff. 11 ds. Bd. des Handb.
[2]) W. THOMSON u. P. G. TAIT, Treatise, Art. 319.

einführt, die die Antisymmetrieeigenschaften

$$G_{ki} = -G_{ik} \qquad \text{und} \qquad G_{ii} = 0 \tag{5}$$

besitzen. Es fehlt also in der i-ten Gleichung die lineare zugehörige Koordinatengeschwindigkeit $\dot\varphi_i$, soweit sie nur von der Summe in (3) herrührt, und jedem anderen Glied $G_{ik}\dot\varphi_k$ der i-ten Gleichung entspricht ein entgegengesetzt gleiches $-G_{ik}\dot\varphi_i$ in der k-ten Gleichung.

Die Bedeutung der Kelvin-Taitschen Gleichungen (3) erhellt schon aus dem merkwürdigen Bau der zum Lagrangeschen Ausdruck (in T_ψ) hinzutretenden Glieder. Man nennt die nichtzyklischen wohl auch die sichtbaren (oder anwesenden) Koordinaten, die zyklischen wohl auch die verborgenen [oder abwesenden oder ignorierten oder, nach THOMSON[1]), die kinosthenischen] Koordinaten. Die Wirkung der verborgenen Koordinaten auf die sichtbare Bewegung ist dreifach:

1. Die Trägheit des Systems ist scheinbar verändert; denn statt der Energie T_0 des Systems ohne die verborgenen Bewegungen

$$T_0 = B = \tfrac{1}{2}\sum_1^m\sum_1^m B_{ik}\dot\varphi_i\dot\varphi_k$$

kommt die scheinbare Energie

$$T_\psi = B - C_\psi^* = T_0 - \tfrac{1}{2}\sum_1^m\sum_1^m\sum_1^n\sum_1^n C^*_{\varkappa\lambda} M_{i\varkappa} M_{k\lambda}\dot\varphi_i\dot\varphi_k\,,$$

so daß die „Trägheitskoeffizienten" B_{ik} übergehen in

$$B'_{ik} = B_{ik} - \sum_1^n\sum_1^n C^*_{\varkappa\lambda} M_{i\varkappa} M_{k\lambda}\,. \tag{6}$$

2. Zu der „sichtbaren" Lagrangeschen Kraft P_i tritt eine scheinbare Kraft hinzu, dargestellt durch das auf die rechte Seite von (3) gesetzte Glied $-\partial C_c^*/\partial\varphi_i$; diese Scheinkraft ist konservativ und ihr Potential

$$C_c^* = \tfrac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n C^*_{\varkappa\lambda} c_\varkappa c_\lambda \tag{7}$$

stammt von der Bewegungsenergie der verborgenen Koordinaten her.

3. Die Glieder $\sum G_{ik}\dot\varphi_k$, welche von dem Mittelglied M der Bewegungsenergie herrühren, bedeuten eine durch die verborgene Bewegung erzeugte gyroskopische Koppelung zwischen den sichtbaren Koordinaten und sind von derselben Bauart wie die gyroskopischen Beschleunigungen W_i^* in den kinetischen Gleichungen der geführten Systeme (Ziff. 49). Auf die rechte Seite von (3) versetzt, erscheinen sie als sog. gyroskopische Kräfte. Der Name rührt daher, daß in erster Linie rotierende Kettenglieder des mechanischen Systems, also eingebaute Kreisel, zyklische Koordinaten und bei geeignetem Kräftespiel auch zyklische Impulse liefern, und daß dann die Glieder $G_{ik}\dot\varphi_k$ einfach die Kreiselmomente von Ziff. 38 und 39 vorstellen.

Ein Beispiel für solche gyroskopischen Glieder bilden die Gleichungen (2) von Ziff. 45 (vgl. die Schlußbemerkung zu Ziff. 45). Ein Beispiel für die scheinbare Änderung der Trägheit des Systems zeigt das erste Glied der Gleichung (8) von Ziff. 45.

Sind die kinetischen Gleichungen (3) für die sichtbaren Koordinaten gelöst, so folgen die Geschwindigkeiten $\dot\psi_\lambda$ der verborgenen Koordinaten aus den

[1]) J. J. THOMSON, Applications of dynamics to physics and chemistry. London 1886 (auch deutsch, Leipzig 1890).

Gleichungen (15) von Ziff. 51. Erweisen sich die $\dot\varphi_\varkappa$ dabei als konstant, so heißt das System isozyklisch.

Bildet man die Leistung des Systems in bezug auf die sichtbaren Koordinaten allein, indem man die Gleichungen (5) nach Multiplikation mit $\dot\varphi_i$ addiert, so verschwindet die Leistung der gyroskopischen Kräfte zufolge der Bedingungen (5)

$$\sum_1^m\sum_1^m G_{ls}\dot\varphi_l\dot\varphi_s = 0.$$

Durch diese Tatsache unterscheiden sich die gyroskopischen Glieder auffällig und wesentlich von den mit den $\dot\varphi_i$ proportionalen Dämpfungskräften, deren Widerstand ständig Energie verzehrt.

Fehlt die Koppelung zwischen den sichtbaren und den verborgenen Koordinaten, d. h. sind alle $M_{i\varkappa} = 0$, und bewegt sich das zyklische System kräftefrei, d. h. sind auch alle $P_\varkappa = 0$, so wird $T_\varphi = B = T_\vartheta$, und die kinetischen Gleichungen (5) nehmen die einfache Gestalt an

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_\vartheta}{\partial\dot\varphi_i}\right) - \frac{\partial T_\vartheta}{\partial\varphi_i} = -\frac{\partial C_\psi^*}{\partial\varphi_i} \tag{8}$$

und sprechen so den Satz von THOMSON aus: In den gyroskopisch ungekoppelten, kräftefreien zyklischen Systemen wirken die verborgenen (zyklischen) Koordinaten auf die sichtbaren (nichtzyklischen) Koordinaten gerade so, wie wenn das System konservativen Kräften unterworfen wäre, deren Potential die Bewegungsenergie (7) der zyklischen Bewegung ist.

Diese Erscheinung legt die Hypothese nahe, daß jede potentielle Energie auf kinetische Energie verborgener, zyklisch bewegter Massen zurückführbar sei. Sie hat Physiker wie Lord KELVIN, HELMHOLTZ[1]), HERTZ[2]), J. J. THOMSON stark beschäftigt. Eine Durchführung dieser für die kinetische Theorie der Materie fundamentalen Idee ist aber nicht gemacht worden. Doch verweisen wir auf die von Lord KELVIN[3]) entwickelte Theorie der gyroskopischen Ketten (vgl. auch Ziff. 55).

53. Die Methode der kleinen Schwingungen. Die für die Behandlung vieler sonst nicht lösbarer Probleme der Stereomechanik geeignete Methode der kleinen Schwingungen, welche namentlich von ROUTH[4]) zu einer förmlichen Technik entwickelt wurde, verfolgt einen doppelten Zweck, wie dies schon früher[5]) auseinandergesetzt worden ist. Von einem vollständig bekannten Gleichgewichts- oder Bewegungszustand des mechanischen Systems ausgehend, versucht man einerseits durch Ermittlung der infolge einer „kleinen" Störung dieses Zustandes eintretenden Nachbarbewegung Aufschluß über die Stabilität des ursprünglichen Zustandes zu gewinnen; andererseits sollen die so gefundenen benachbarten Bewegungsformen eine angenäherte Erkenntnis der allgemeinen Bewegung in allen den Fällen anbahnen, in welchen eine strengere und allgemeinere Integration der kinetischen Gleichungen bisher an mathematischen Schwierigkeiten gescheitert ist. In der Tat ist die Methode der kleinen Schwingungen ein Näherungsverfahren, und da in der Regel eine Fehlerabschätzung unterbleibt[6]), so sind ihre Ergebnisse mit einer gewissen kritischen Vorsicht zu verwerten. Streng genommen handelt es sich um die Grenzform, welche die

[1]) H. v. HELMHOLTZ, Wiss. Abhandl. Bd. 3. Leipzig 1895 (Abh. über monozykl. Systeme).
[2]) H. HERTZ, Die Prinzipien der Mechanik.
[3]) W. THOMSON u. P. G. TAIT, Treatise, Art. 345 ff.
[4]) E. J. ROUTH, Dynamik, Bd. II, Kap. 6 u. 7.
[5]) Kap. 7, Ziff. 37 u. 38, ds. Bd. des Handb.
[6]) Eine Ausnahme bilden z. B. die in Ziff. 28 und 29 genannten Fehlerabschätzungen von F. KLEIN und A. SOMMERFELD.

Bewegung annimmt, wenn die Störung gegen Null strebt, und nur in wenigen Fällen ist es gelungen, über diese erste Annäherung hinaus den Einfluß endlicher Störungen festzustellen[1]).

Sonderbeispiele zur Methode der kleinen Schwingungen sind schon in Ziff. 27 bis 29, 31, 34, 35, 42 und 50 sowie in Kapitel 7, Ziff. 38, gegeben worden; jetzt soll die Methode systematisch entwickelt werden. Diese Entwicklung ist bisher nur für holonome Bewegungen[2]) und für den Fall durchgeführt worden, daß der ungestörte Zustand und die störenden Kräfte ganz bestimmte Voraussetzungen erfüllen, die wir nachher aufzählen.

Die Lagekoordinaten eines Systems von s holonomen Freiheitsgraden mögen im ungestörten Zustand der Ruhe oder Bewegung die bekannten Werte $q_1, q_2, \ldots q_s$ besitzen; sie mögen zu irgendeinem Zeitpunkt t_0 eine Änderung erfahren, so daß sie für $t > t_0$ die Werte $q_i + \xi_i$ annehmen. Indem wir erwarten, daß hinreichend kleine Störungen wenigstens für einen beschränkten Zeitraum, vielfach aber für alle Zukunft kleinbleibende Änderungen des ursprünglichen Zustandes hervorrufen, verwandelt sich die durch die quadratische Form

$$T_0 = \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s A_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \tag{1}$$

dargestellte Bewegungsenergie in

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s A'_{ik}(\dot{q}_i + \dot{\xi}_i)(\dot{q}_k + \dot{\xi}_k),$$

wo die A'_{ik} sich von den A_{ik} dadurch unterscheiden, daß darin auch alle q_i durch $q_i + \xi_i$ ersetzt sind. Durch Potenzentwicklung nach den ξ_i und $\dot{\xi}_i$ und Vernachlässigung aller über die zweite Potenz hinausgehenden Glieder (damit durch die Differentiation alle linearen Glieder erhalten werden) entsteht hieraus

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \tag{2}$$

wo T_ν eine homogene Funktion ν-ten Grades in den ξ_i und $\dot{\xi}_i$ ist.

Das erste Glied T_0 ist unabhängig von den ξ_i und $\dot{\xi}_i$, also ausschließlich Funktion der q_i und $\dot{q}_i$; das zweite wird von der Form

$$T_1 = \sum_1^s B_i\dot{\xi}_i + \sum_1^s C_i\xi_i, \tag{3}$$

das dritte von der Form

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s B_{ik}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k + \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s C_{ik}\xi_i\xi_k + \sum_1^s\sum_1^s D_{ik}\dot{\xi}_i\xi_k, \tag{4}$$

wobei die Koeffizienten $B_i, C_i, B_{ik}, C_{ik}, D_{ik}$ nur Funktionen der q_i und $\dot{q}_i$ sind und überdies

$$B_{ik} = B_{ki}, \qquad C_{ik} = C_{ki} \tag{5}$$

sein muß, wogegen im allgemeinen $D_{ik} \neq D_{ki}$ bleibt.

Da nun aber die q_i und $\dot{q}_i$ bekannte Funktionen der Zeit sind (im Ruhefall konstant bzw. Null), so kann man den durch die Vernachlässigungen verkürzten Ausdruck (2) als die Bewegungsenergie eines Systems mit kinetischer Bindung (Ziff. 49) ansehen und behandeln, dessen nichtgeführte Koordinaten die Größen ξ_i sind, mit anderen Worten: man kann die Änderungen ξ_i und $\dot{\xi}_i$ geradezu als die

[1]) Vgl. die Literaturübersicht in Kap. 7, Ziff. 37 ds. Bd. des Handb.

[2]) Kleine Schwingungen nichtholonomer Systeme werden auf solche holonomer zurückgeführt von E. T. Whittaker, Analytische Dynamik, deutsch von F. u. K. Mittelsten-Scheid, S. 234. Berlin 1924. Im 7. Kap. dieses Werkes befindet sich auch eine mathematisch elegante Darstellung der kleinen Schwingungen.

Koordinaten und Geschwindigkeiten des benachbarten Bewegungszustandes ansprechen und also für sie die Gleichungen nach der Lagrangeschen Vorschrift aufstellen:

$$W_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_i} - Q_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (6)$$

Hierbei ist

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} = B_i + \sum_{k=1}^{n} B_{ik}\dot{\xi}_k + \sum_{k=1}^{n} D_{ik}\xi_k,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_i} = C_i + \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\xi_k + \sum_{k=1}^{n} D_{ki}\dot{\xi}_k.$$

Die wesentlichste der angekündigten Einschränkungen besteht nun darin, daß wir die Koeffizienten B_{ik}, C_{ik} und D_{ik} als **unabhängig von der Zeit** voraussetzen, so daß also der benachbarte Bewegungszustand der gleiche bleibt, zu welcher Zeit t_0 die Störung auch eingesetzt haben mag. Man nennt solche ursprünglichen Bewegungen q_i, $\dot{q}_i$, für die dies zutrifft, nach ROUTH wohl auch **ständige Bewegungen (steady motions**, oft fälschlich als „stationäre" bezeichnet). Bei Ruhezustand ist diese Voraussetzung von selbst erfüllt. Ständige Bewegungen sind insbesondere bei zyklischen Systemen möglich, wenn die nichtzyklischen Koordinaten ruhen und die zyklischen Koordinatengeschwindigkeiten konstant bleiben (isozyklische Bewegungen; Ziff. 52).

Für die Störung einer ständigen Bewegung gilt hiernach

$$W_i = \frac{dB_i}{dt} - C_i + \sum_{k=1}^{n}\{B_{ik}\ddot{\xi}_k + (D_{ik} - D_{ki})\dot{\xi}_k - C_{ik}\xi_k\}. \quad (7)$$

Die beiden ersten Glieder beziehen sich auf den ungestörten Zustand und sind entweder konstant oder reine Zeitfunktionen.

Die Lagrangeschen Kräfte Q_i können als Funktionen der Zeit und des Systemzustandes, d. h. der Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten $q_i + \xi_i$ und $\dot{q}_i + \dot{\xi}_i$ angesehen werden, und wir wollen nun als zweite Einschränkung voraussetzen, daß in der Potenzreihenentwicklung bis zu den in ξ_i und $\dot{\xi}_i$ linearen Gliedern

$$Q_i = Q_i^0 + \sum_{k=1}^{n} L_{ik}\xi_k + \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\dot{\xi}_k \quad (8)$$

auch die Koeffizienten L_{ik} und M_{ik} **zeitlich konstant** sein sollen, wogegen die Q_i^0 das Kräftesystem der ungestörten Bewegung vertreten und auch von der Zeit abhängen dürfen.

Da für die ungestörte Bewegung die Gleichungen

$$\frac{dB_i}{dt} - C_i = Q_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (9)$$

gelten, so lauten die n Differentialgleichungen der Nachbarbewegung zur ständigen Bewegung

$$\sum_{k=1}^{n}\{B_{ik}\ddot{\xi}_k + (D_{ik} - D_{ki})\dot{\xi}_k - C_{ik}\xi_k\} = \sum_{k=1}^{n}\{L_{ik}\xi_k + M_{ik}\dot{\xi}_k\}. \quad (i = 1, 2, \ldots n) \ (10)$$

Die Nachbarbewegungen eines ständigen Zustandes werden also für Kräfte von der Art (8) angenähert durch ein simultanes System von Differential-

gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beherrscht. Ihre rechten Seiten müssen wir jetzt noch weiter analysieren.

Das Kräftesystem, welches den gestörten Zustand unterhält, ist durch den linearen Ansatz (8) in zwei Gruppen zerlegt; die von den Koeffizienten L_{ik} abhängigen, den Lagekoordinaten ξ_i proportionalen heißen nach Lord KELVIN und TAIT **Lagekräfte** (**positional forces**), die von den Koeffizienten M_{ik} abhängigen, den Koordinatengeschwindigkeiten $\dot{\xi}_i$ proportionalen heißen **Geschwindigkeitskräfte** (**motional forces**). Jede Gruppe läßt sich weiter teilen:

$$L_{ik}\xi_k = E_{ik}\xi_k + E'_{ik}\xi_k, \qquad M_{ik}\dot{\xi}_k = F_{ik}\dot{\xi}_k + F'_{ik}\dot{\xi}_k, \tag{11}$$

wobei man

$$2E_{ik} = L_{ik} + L_{ki}, \qquad 2F_{ik} = M_{ik} + M_{ki},$$
$$2E'_{ik} = L_{ik} - L_{ki}, \qquad 2F'_{ik} = M_{ik} - M_{ki}$$

setzt; die neuen Koeffizienten erfüllen die Bedingungen

$$E_{ik} = E_{ki}, \quad E_{ii} = L_{ii}, \quad F_{ik} = F_{ki}, \quad F_{ii} = M_{ii},$$
$$E'_{ik} = -E'_{ki}, \quad E'_{ii} = 0, \quad F'_{ik} = -F'_{ki}, \quad F'_{ii} = 0.$$

Die so neu entstehenden vier Kraftgruppen klassifizieren sich auf Grund der Eigenschaften ihrer Koeffizienten folgendermaßen:

a) $E_{ik}\xi_k$ ist eine **konservative** Kraftkoordinate, ableitbar aus einem Potential

$$V = -\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n E_{ik}\xi_i\xi_k, \qquad \text{so daß} \qquad -\frac{\partial V}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^n E_{ik}\xi_k. \tag{12}$$

b) $E'_{ik}\xi_k$ ist eine **nichtkonservative** Kraftkoordinate, deren Kraftfeld von „Wirbeln" durchsetzt ist. Ihre Gesamtheit

$$U_i = \sum_{k=1}^n E'_{ik}\xi_k \tag{13}$$

besitzt die „Wirbelkoordinaten"

$$U_{ik} = \frac{\partial U_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial U_k}{\partial \xi_i} = 2E'_{ik} = L_{ik} - L_{ki}. \tag{14}$$

Systeme mit solchen nichtkonservativen Lagekräften nennen Lord KELVIN und TAIT **naturwidrig** (**artificial**), weil sie, wiederholt durch einen geschlossenen Zyklus von Konfigurationen geführt, unbegrenzte Energiemengen liefern würden. Doch ist die Möglichkeit solcher mit „künstlichen" Kräften geführten Systeme, die von einer unversiegbaren Energiequelle gespeist werden, z. B. in der Technik durchaus nicht abzuweisen. Freilich sind solche Fälle theoretisch bisher kaum behandelt worden.

c) $F_{ik}\dot{\xi}_k$ ist eine die ganze Energie des Systems ändernde, Energie sammelnde oder (in der Regel) Energie zerstreuende Kraftkomponente; ihre Gruppe ist aus einer **Zerstreuungsfunktion**[1] F (**dissipation function** nach Lord RAYLEIGH oder **dissipativity** nach Lord KELVIN und TAIT) ableitbar:

$$F = -\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n F_{ik}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k, \qquad \text{so daß} \qquad -\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_i} = \sum_{k=1}^n F_{ik}\dot{\xi}_k. \tag{15}$$

[1] Vgl. Kap. 2, Ziff. 14 ds. Bd. des Handb.

Ist F eine im ganzen Bewegungsbereich positiv definite Form, so wird das System durch diese Kraftkoordinaten gedämpft; sie heißen dann **Dämpfungskräfte**, und der kinetische Prozeß selbst wird als **Dämpfung** bezeichnet.

d) $F'_{ik}\dot{\xi}_k$ sind wieder **gyroskopische Kräfte** (Ziff. 52) oder auch **Zentrifugalkräfte**; solche Glieder traten vermöge der kinetischen Bindung in der Gestalt $(D_{ik} - D_{ki})\dot{\xi}_k$ bereits auf der linken Seite der Gleichungen (10) auf.

Berechnet man den durch die Nachbarbewegung herbeigeführten **Energieumsatz**, indem man jede Gleichung (10) mit dem zugehörigen $\dot{\xi}_i$ multipliziert und dann alle addiert, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(T_2^* + V) = U - 2F. \tag{16}$$

Hier ist zur Abkürzung

$$T_2^* = \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s\{B_{ik}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k - C_{ik}\xi_i\xi_k\} \tag{17}$$

gesetzt, ferner bedeutet V die potentielle Energie (12) der konservativen Kraftgruppe; die Größe

$$U = \sum_1^s U_i\dot{\xi}_i \tag{18}$$

ist die Leistung der „Wirbelkräfte" und F die Zerstreuungsfunktion der dritten Kraftgruppe. Die gyroskopischen Glieder sind wieder herausgefallen und tragen nichts zum Energieumsatz bei. Eine positive Zerstreuungsfunktion würde allmählich die ganze Energie verzehren. Ist $U = 0$ und außerdem $B_i = C_i = C_{ik} = D_{ik} = 0$, also $T_2^* = T_1 + T_2$, so mißt $2F$ die Geschwindigkeit der zeitlichen Abnahme der Energie der Störungsbewegung.

In diesem schematischen dynamischen Ansatz sind von Reaktionen abhängige eingeprägte Kräfte, wie z. B. die Gleitreibung, oder durch die Haftreibung herbeigeführte Unstetigkeiten des Kraftfeldes außer acht gelassen. Reibungskinetische Probleme dieser Art sind bisher nur ganz vereinzelt behandelt[1]). Die Idealkinetik hat sich von jeher auf konservative, dämpfende und gyroskopische Kräfte beschränkt, d. h. auf solche, die sich während des ganzen Bewegungsverlaufes regulär verhalten.

Verschmelzen wir jetzt alle gleichartigen Glieder, indem wir sie alle auf eine Seite der Gleichungen (10) bringen und dabei setzen

$$D_{ik} - D_{ki} - F'_{ik} = G_{ik}, \qquad -C_{ik} - E_{ik} = H_{ik}, \tag{19}$$

und vertauschen wir F_{ik} lieber mit $-F_{ik}$, um den im allgemeinen dissipativen Charakter dieser Glieder besser hervorzuheben, so lassen sich mit Hilfe der quadratischen bzw. bilinearen Formen

$$\left.\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s B_{ik}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k \text{ als verkürzter Bewegungsenergie},\\ F &= \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s F_{ik}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k \text{ als Zerstreuungsfunktion},\\ G &= \sum_1^s\sum_1^s G_{ik}\dot{\xi}_i\xi_k \text{ als gyroskopischer Funktion},\\ H &= \tfrac{1}{2}\sum_1^s\sum_1^s H_{ik}\xi_i\xi_k \text{ als Potential}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

[1]) Ein technisches Beispiel gibt R. v. MISES, Elektrotechnik und Maschinenbau, S. 783. 1908. Vgl. auch Enzykl. d. Math. Wiss. Bd. IV, 10, Nr. 16a, S. 278.

die kinetischen Gleichungen (10) nach der Vorschrift

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B}{\partial \dot{\xi}_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial}{\partial \xi_i}(G + H) = U_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (21)$$

bilden, womit wir die Differentialgleichungen der kleinen Schwingungen endgültig in der Form erhalten

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{B_{ik}\ddot{\xi}_k + F_{ik}\dot{\xi}_k + G_{ik}\dot{\xi}_k + H_{ik}\xi_k - E'_{ik}\xi_k\right\} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \quad (22)$$

Die Zeigervertauschung ändert an den Werten von B_{ik}, F_{ik} und H_{ik} nichts, an G_{ik} und E'_{ik} nur das Vorzeichen, so daß alle $G_{ii} = 0$ und $E'_{ii} = 0$ sind.

54. Die Stabilität der ständigen Bewegung. Die Differentialgleichungen (22) der vorigen Ziffer bilden ein lineares System zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Integrationstechnik solcher Systeme ist seit langem völlig durchgebildet[1]). Hier wollen wir nur die Frage der Stabilität der ursprünglichen ständigen Bewegung behandeln, indem wir mit dem schon früher ausgesprochenen Vorbehalt[2]) ihre Stabilität für gesichert ansehen, falls die Bewegung (22) dauernd eine Nachbarbewegung zu ihr, sämtliche ξ_i also dauernd klein bleiben. Nun setzen sich die Integrale ξ_i bekanntermaßen linear aus Gliedern von der Form $a_{il}e^{\varrho_l t}$ oder $a_{il}t^h e^{\varrho_l t}$ zusammen, wo die a_{il} Integrationskonstanten und die ϱ_l die $2n$ oder weniger Nullstellen der zu der Matrix

$$\left|B_{ik}\varrho^2 + (F_{ik} + G_{ik})\varrho + (H_{ik} - E'_{ik})\right|$$

gehörigen n-reihigen Determinante $\Delta(\varrho)$ bedeuten und h eine positive ganze Zahl ist, die alle Werte der Skala $0, 1, 2 \ldots, h_l - 1$ annimmt, wenn die Nullstelle ϱ gerade eine h_l-fache ist.

Damit alle ξ_i dauernd klein bleiben, müssen aber die reellen Teile aller einfachen Nullstellen ϱ_l negativ oder Null, diejenigen aller mehrfachen Nullstellen ϱ_l wirklich negativ sein.

Dafür, ob dies der Fall ist, gibt es verhältnismäßig einfache Kriterien. Man setze etwa die Partikulärintegrale $\xi_k = a_{kl}e^{\varrho_l t}$ in die n Gleichungen (22) von Ziff. 53 ein, multipliziere jeweils die i-te Gleichung mit $a_{i\lambda}$ und addiere alle, so kommt

$$\varrho_l^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}B_{ik}a_{kl}a_{i\lambda} + \varrho_l\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(F_{ik} + G_{ik})a_{kl}a_{i\lambda} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(H_{ik} - E'_{ik})a_{kl}a_{i\lambda} = 0. \quad (1)$$

Ist ϱ_l eine reelle Nullstelle, so setze man $\lambda = l$; dann geht (1) zufolge der Schlußbemerkung von Ziff. 53 über in

$$B_{\varrho\varrho}\varrho_l^2 + F_{\varrho\varrho}\varrho_l + H_{\varrho\varrho} = 0. \qquad (\varrho_l \text{ reell}) \quad (2)$$

Hierbei ist mit $B_{\varrho\varrho}$ die in a_{kl} und a_{il} statt $\dot{\xi}_i$ und $\dot{\xi}_k$ geschriebene quadratische Form B von (20) in Ziff. 53 bezeichnet, und $F_{\varrho\varrho}$ sowie $H_{\varrho\varrho}$ haben analoge Bedeutung. Weil zu reellen ϱ_l auch lauter reelle Werte von a_{il} gehören, so schließt man aus (2):

Wenn die quadratischen Formen B, F und H entweder alle positiv definit oder alle negativ definit sind, so können etwaige reelle Nullstellen ϱ_l nur negativ sein.

---

[1]) Vgl. die Lehrbücher der Differentialgleichungen oder auch E. J. Routh, Dynamik, Bd. II, Kap. 6 u. 7.

[2]) Kap. 7, Ziff. 37 ds. Bd. des Handb.

Ist ϱ_l eine komplexe Nullstelle, so sei $\varrho_{\bar{l}}$ die dazu konjugiert komplexe und wir setzen

$$\varrho_l = r + is, \qquad \varrho_{\bar{l}} = r - is.$$

Dann müssen auch a_{kl} und $a_{k\bar{l}}$ konjugiert komplex zueinander sein, und man überzeugt sich rasch, daß in der mit leichtverständlichen Abkürzungen geschriebenen Gleichung (1)

$$B_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}\varrho_l^2 + (F_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}} + G_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}})\varrho_l + H_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}} - E'_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}} = 0 \tag{3}$$

die scheinbar komplexen bilinearen Formen $B_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}$, $F_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}$ und $H_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}$ reell sind und überdies positiv bzw. negativ definit werden, sobald dies für die zugehörigen quadratischen Formen $B_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}}$, $F_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}}$ und $H_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}}$ zutrifft. Die bilinearen Formen $G_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}$ und $E'_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}$ sind jetzt, wie ebenfalls rasch einzusehen ist, rein imaginär. Indem man also die Gleichung (3) in ihren reellen und imaginären Teil spaltet und aus beiden Teilgleichungen $G_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}$ eliminiert, erhält man

$$B_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}r(r^2 + s^2) + F_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}(r^2 + s^2) + H_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}r = -isE'_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}}$$

und schließt:

Wenn alle $E'_{ik} = 0$ sind, und wenn die quadratischen Formen B, F und H entweder alle positiv definit oder alle negativ definit sind, so können, bei beliebigen Werten von G_{ik}, etwaige komplexe Nullstellen ϱ_l nur negative Realteile besitzen.

Hiernach ist bei nur konservativen Lagekräften für die Stabilität der ständigen Bewegung hinreichend (aber nicht immer notwendig), daß die drei Formen B, F und H definit von gleichem Vorzeichen bleiben. Dies gilt auch noch bei fehlender Dämpfung ($F_{ik} = 0$), falls keine mehrfachen Nullstellen ϱ_l vorkommen.

In vielen Fällen genügt dieses Stabilitätskriterium schon vollständig. Im allgemeinen muß man freilich die Determinantengleichung $\Delta(\varrho) = 0$ explizit aufstellen; sie möge lauten

$$a_0\varrho^m + a_1\varrho^{m-1} + a_2\varrho^{m-2} + \cdots + a_m = 0. \tag{4}$$

Handelt es sich nur um die Frage der Stabilität, so ist es nicht nötig, diese Gleichung wirklich aufzulösen. Vielmehr kann auf das Vorzeichen der Realteile der Wurzeln ϱ ohne weiteres schon aus den (stets reellen) Koeffizienten a_i der Gleichung geschlossen werden. Wie HURWITZ[1]) bewiesen hat, besitzt die Gleichung (4) mit $a_0 > 0$ dann und nur dann lauter Wurzeln mit negativem Realteil, wenn die m aus ihren Koeffizienten a_i gebildeten Determinanten

$$D_1 = a_1,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots D_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \ldots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2m-1} & a_{2m-2} & \ldots a_m \end{vmatrix} \tag{5}$$

sämtlich positiv sind; dabei ist $a_i = 0$ zu nehmen für alle Zeiger $i > m$. Man beachte, daß die letzte Bedingung $D_m > 0$ einfach mit $a_m > 0$ identisch ist.

Mit diesen Hurwitzschen Bedingungen sind völlig äquivalent diejenigen von ROUTH[2]), welcher folgende sehr bequeme Regel für die Berechnung der Determinanten D_i gegeben hat: Man schreibe die erste, nämlich a_1 an; dann erhält

[1]) A. HURWITZ, Math. Ann. Bd. 46, S. 273. 1895.
[2]) E. J. ROUTH, Dynamik, Bd. II, S. 230.

man die zweite aus der ersten, die dritte aus der zweiten usw., indem man jeweils die durch folgende Pfeile angedeutete Buchstabenvertauschung vornimmt:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & \cdots & a_{2\nu} & & a_{2\nu+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_1 & & (a_1a_2 - a_0a_3) & & a_3 & & (a_1a_4 - a_0a_5) & \cdots & a_{2\nu+1} & & (a_1a_{2\nu+2} - a_0a_{2\nu+3}), \end{array}$$

wobei wieder $a_i = 0$ für $i > m$ zu setzen ist.

Obwohl die Hurwitz-Routhschen Bedingungen hinreichend und notwendig sind, so stellen sie doch für $m > 3$ noch nicht in allen Fällen die einfachste Form der Stabilitätskriterien vor; sie berücksichtigen offenbar nicht die Vertauschbarkeit aller Koeffizienten a_i gegen a_{m-i}.

Für $m = 3$ verlangen sie, daß mit a_0 auch alle übrigen Koeffizienten a_i sowie der Ausdruck $a_1a_2 - a_0a_3$ positiv bleiben.

Für $m = 4$ lauten die Bedingungen

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad g \equiv a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \quad a_3g - a_1^2a_4 > 0, \quad a_4 > 0.$$

Offensichtlich kann die dritte (im Hinblick auf die vierte und fünfte) durch die einfachere Bedingung $a_3 > 0$ ersetzt werden, und dann folgt auch noch, daß $a_2 > 0$ sein muß.

Für $m = 5$ hat man mit den Abkürzungen

$$g \equiv a_1a_2 - a_0a_3, \qquad h \equiv a_1a_4 - a_0a_5, \qquad k \equiv a_3a_4 - a_2a_5$$

die Bedingungen

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad g > 0, \quad a_3g - a_1h > 0, \quad gk - h^2 > 0, \quad a_5 > 0;$$

da aber $a_1(gk - h^2) \equiv h(a_3g - a_1h) - a_5g^2$ ist, so kann man hier die vierte (im Hinblick auf die fünfte und sechste) durch die einfachere Bedingung $h > 0$ ersetzen, womit dann auch $a_4 > 0$ und $k > 0$ sein muß.

In ähnlicher Weise lassen sich auch für $m > 5$ Vereinfachungen treffen; eine allgemeine Untersuchung hierüber scheint noch zu fehlen.

Da in jedem Falle die Ungleichungen $a_0 > 0$ und $a_m > 0$ wesentliche Stabilitätsbedingungen sind, so bemerken wir noch, daß diese beiden Koeffizienten durch die Determinanten

$$a_0 = |B_{ik}|, \qquad a_m = |H_{ik} - E'_{ik}| \tag{6}$$

angegeben werden.

Der Fall, daß $a_m = 0$ ist, bedeutet eine Nullstelle $\varrho = 0$, und dies beeinträchtigt die Stabilität im allgemeinen nicht. Ähnliches gilt, wenn andere Stabilitätsungleichungen in Gleichungen übergehen; doch ist hier stets eine besondere Untersuchung notwendig, die auf mehrfache Nullstellen der Determinante $\Delta(\varrho)$ zu achten hat (vgl. Ziff. 55).

55. Gyroskopische Stabilisierung. Wir wollen noch zeigen, wie an sich labile Systeme durch eingebaute zyklische Mechanismen stabilisiert werden können. Solche Mechanismen sind in der Regel Schwungmassen (Kreisel). Ausgehend von einem möglicherweise labilen Gleichgewichtszustand des Systems bezeichnen wir mit ξ_i auch hier die nach einer etwaigen Störung vorhandenen, im ersten Augenblicke jedenfalls kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage. Die Größen ξ_i bedeuten zugleich die (labilen oder stabilen) Freiheitsgrade des Systems.

Sind keine durch zyklische Mechanismen bedingten gyroskopischen Koppelungen zwischen den Koordinaten ξ_i vorhanden, so kann man die zugehörigen Gleichungen der kleinen „Schwingungen" in der Regel in der Form darstellen

$$B_i\ddot{\xi}_i + F_i\dot{\xi}_i + H_i\xi_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

wo also jede Gleichung nur eine Koordinate umfaßt. [Bei fehlender Dämpfu… ist die Wahl solcher Koordinaten ξ_i stets möglich, wie aus der Theorie … quadratischen Formen folgt[1]]. Kommen gyroskopische Koppelungen hinzu, … ergänzen sich die linken Seiten der Gleichungen (1) zu

$$B_i\ddot{\xi}_i + F_i\dot{\xi}_i + H_i\xi_i + \sum_{k=1}^{n} G_{ik}\dot{\xi}_k = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wobei nach Ziff. 52 und 53 stets

$$G_{ik} = -G_{ki} \qquad \text{und} \qquad G_{ii} = 0$$

ist. Überdies darf man voraussetzen, daß die Trägheitskoeffizienten B_i sämtl… positiv sind. Die Koeffizienten F_i sind in der Regel positiv und bedeut… Dämpfungsziffern. Je nachdem dann H_i positiv oder negativ ausfällt, ist na… Ziff. 54 der zu ξ_i gehörige Freiheitsgrad an sich, d. h. ohne die gyroskopi… Koppelung, stabil oder labil.

Bildet man die Determinantengleichung $\Delta(\varrho) = 0$, so erhält man nach … von Ziff. 54 für den ersten und letzten Koeffizienten

$$a_0 = B_1 \cdot B_2 \cdots B_n, \qquad a_{2n} = H_1 \cdot H_2 \cdots H_n.$$

Weil von vornherein $a_0 > 0$ ist, so erfordert die Stabilisierung vor allem, d… auch $a_{2n} > 0$ werde. Kommt eine gerade Anzahl von an sich labilen Freiheit… graden, also eine gerade Anzahl negativer Faktoren H_i vor, so ist die Bedingun… $a_{2n} > 0$ erfüllt. Enthält das System jedoch eine ungerade Anzahl von an si… labilen Freiheitsgraden, so wird $a_{2n} < 0$ und auch die gyroskopischen Glie… können das Positivwerden von a_{2n} nicht erzwingen. Damit ist der Satz von L… KELVIN bewiesen: Nur Systeme mit einer geraden Anzahl von an sich labil… Freiheitsgraden können gyroskopisch stabilisierbar sein. Indifferente Freiheit… grade zählen dabei im allgemeinen zu den labilen.

Ob die Stabilisierung bei Erfülltsein der Bedingungen (4) wirklich geling… das hängt von den weiteren Hurwitz-Routhschen Bedingungen (Ziff. 54) a… welche insbesondere auch die gyroskopischen Koeffizienten G_{ik} enthalten. Ei… allgemeine abschließende Untersuchung hierüber liegt bis jetzt nicht vo… es scheint aber, daß folgende Ergebnisse gesichert sind: Wenn keine Dämpfun… vorhanden ist, so kann die Stabilisierung durch hinreichende Steigerung d… zyklischen Intensitäten G_{ik} erzwungen werden; kommen dagegen einige Freiheit… grade mit Dämpfung vor ($F_i > 0$), so muß das System, um stabilisierbar zu … auch künstlich beschleunigte Koordinaten (mit $F_k < 0$) besitzen.

Wir erläutern dies an dem Fall zweier Freiheitsgrade. Hier lautet d… System (2):

$$B_1\ddot{\xi}_1 + F_1\dot{\xi}_1 + H_1\xi_1 + G\dot{\xi}_2 = 0,$$

$$B_2\ddot{\xi}_2 + F_2\dot{\xi}_2 + H_2\xi_2 - G\dot{\xi}_1 = 0.$$

Die Koeffizienten der Determinantengleichung $\Delta(\varrho) = 0$ werden

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= B_1 B_2, \\ a_1 &= B_1 F_2 + B_2 F_1, \\ a_2 &= B_1 H_2 + F_1 F_2 + B_2 H_1 + G^2, \\ a_3 &= F_1 H_2 + F_2 H_1, \\ a_4 &= H_1 H_2. \end{aligned}\right\}$$

[1] Vgl. etwa R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. … S. 228, Berlin 1924.

[2] Am weitesten ist das Problem durchgeführt bei W. THOMSON u. P. G. TAIT, Treati… on Natural Philosophy, Bd. I, Teil 1, Ziff. 345 x ff.

Die Hurwitz-Routhschen Bedingungen verlangen, daß alle Koeffizienten a_i positiv sind, und daß außerdem die Ungleichung

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0 \tag{6}$$

besteht. Diese letzte Forderung kann durch einen genügend großen Wert von G^2 (der auch a_2 groß genug macht) erfüllt werden. Dies verbürgt aber die Stabilität noch keineswegs. Sind beide Freiheitsgrade an sich labil, also $H_1 < 0$, $H_2 < 0$, und damit $a_4 > 0$, so müssen zur Erfüllung der noch übrigbleibenden Bedingungen $a_1 > 0$ und $a_3 > 0$ die beiden Größen F_1 und F_2 verschiedene Vorzeichen haben, und der Absolutwert ihrer Quotienten muß in den Grenzen

$$\frac{B_1}{B_2} \lessgtr \left|\frac{F_1}{F_2}\right| \lessgtr \left|\frac{H_1}{H_2}\right| \tag{7}$$

liegen, wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem die linke Grenze kleiner oder größer als die rechte ist; im ersten Fall ist F_1 positiv und F_2 negativ zu wählen, im zweiten Fall umgekehrt. Bei einem System mit einem gedämpften Freiheitsgrad ist mithin gyroskopische Stabilisierung nur dann denkbar, wenn der zweite Freiheitsgrad eine künstliche Beschleunigung erhält und wenn überdies die Ungleichung (7) möglich ist.

Ist etwa $H_1 = 0$, also der Freiheitsgrad der Koordinate ξ_1 an sich indifferent, so kommt mit $a_4 = 0$ eine Wurzel $\varrho = 0$, und die Determinantengleichung vierten Grades geht nach Weglassen des Faktors ϱ über in eine solche dritten Grades, deren Diskussion wieder die übrigen Stabilitätsbedingungen in unveränderter Form liefert.

Fehlen die Dämpfungsglieder ($F_1 = F_2 = 0$), so wird $a_1 = a_3 = 0$, und die Ungleichung (6) ist jetzt durch $a_2 > 0$ zu ersetzen: dann werden die vier Wurzeln ϱ mit $a_4 > 0$ rein imaginär und verschieden, und Stabilisation ist nach wie vor durch Steigerung von G^2 möglich.

Lord KELVIN[1]) hat sehr schöne Versuche mit sog. Gyrostaten ersonnen, die diese Ergebnisse für zwei, drei und vier Freiheitsgrade erläutern. Soweit die ξ_i dabei Winkelkoordinaten vorstellen, ist G nichts anderes als der Betrag des Schwungvektors des eingebauten Kreisels. Über sonstige Anwendungen vgl. Ziff. 35 ff. des folgenden Kapitels.

---

[1]) W. THOMSON u. P. G. TAIT (s. Fußnote 2, S. 482).

Kapitel 9.

Technische Anwendungen der Stereomechanik.

Von

Th. Pöschl, Prag.

Mit 60 Abbildungen.

Vorbemerkung. Das folgende Kapitel erstrebt keine lückenlose Darstellung der sog. technischen Mechanik, sondern greift nur diejenigen Probleme heraus, die neuerdings auch für den Physiker wichtig geworden sind oder auf dem Grenzgebiet zwischen Technik und Physik liegen[1]).

I. Reibung fester Körper.

1. Die Arten der Reibung[2]). Die Schwierigkeiten, das „wirkliche" Verhalten der Körper unserer physischen Welt im Gebiete der Mechanik mit hinreichender Genauigkeit zu beschreiben und durch Gesetze zu erfassen, zeigen sich schon bei dem anscheinend sehr einfachen, tatsächlich jedoch äußerst verwickelten Erscheinungsgebiet der **Reibung**. Die sog. klassische Mechanik betrachtet nur freie Bewegungen der Körper und von unfreien nur solche, deren Bindungen durch Normalkräfte allein gekennzeichnet werden. Schon an ganz einfachen Fällen — z. B. für einen Körper auf einer schiefen Ebene — erkennt man, daß man durch diese Beschränkung für die Gleichgewichts- und Bewegungsprobleme der Technik nicht einmal eine erste Annäherung an den wirklichen Ablauf erhält. Die Annahme besagt nichts anderes, als daß die miteinander in Berührung stehenden Körper **vollkommen glatt** und **vollkommen starr** sein sollen. Will man dem wirklichen Verhalten nahekommen, so ist es nötig, den Einfluß der Körper aufeinander für jede Berührungsstelle A durch Hinzufügung der anderen **fünf Komponenten** (außer der Normalkraft $\mathfrak{N}$ vom Betrag N) der

---

[1]) Außer dem eingehenden Überblick über dieses Gebiet von R. v. Mises, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, Art. 10 (bis 1911), und dem Bericht von K. Heun, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. Bd. 9. 1900, möge auf die Lehrbücher der technischen Mechanik hingewiesen werden: A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. Leipzig u. Berlin, viele Auflagen; H. Lorenz, Lehrbuch der techn. Physik, 2. Aufl., Bd. I, 1 u. I, 2. Berlin 1924–1926; Th. Pöschl, Lehrbuch der techn. Mechanik. Berlin 1923; Autenrieth-Ensslin, Techn. Mechanik, 3. Aufl. Berlin 1922; Kaufmann, Vorträge über Mechanik, Bd. I (3. Aufl. der Mechanik von Keck-Hotopp), Hannover 1927.

[2]) Von älteren Sonderschriften über die Reibung sind zu nennen: G. Herrmann, Der Reibungswinkel, Festschrift zum Jubiläum der Universität Würzburg, 1880; N. Petroff, Neue Theorie der Reibung, deutsch von L. Wurzel, Leipzig 1887; J. H. Jellett, Die Theorie der Reibung, deutsch von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig 1890; P. Painlevé, Leçons sur le frottement, Paris 1895.

an diese Stelle reduzierten räumlichen Kräftesystems zu ergänzen. Und zwar nennt man (Abb. 1)

1. die in der gemeinsamen Berührungsebene E liegende Kraft $\mathfrak{R}$ vom Betrag R die **Reibungskraft**, oft als **Reibung** schlechthin bezeichnet (sie wird im allgemeinen Falle durch zwei Komponenten R_x, R_y festgelegt);

2. das in der Ebene liegende Moment $\mathfrak{M}_1$ vom Betrag M_1 das **Moment der Rollreibung** (ebenfalls durch zwei Komponenten M_x, M_y bestimmt);

3. das in der Richtung der Normalen (z) liegende Moment $\mathfrak{M}_z$ das **Moment der Bohrreibung**.

Diese Kräfte und Momente haben — ihrem Wesen nach — das Bestreben, den **Eintritt** der Bewegung der miteinander in Berührung stehenden Körper zu verhindern — in diesem Falle spricht man von **Haftreibung** oder von **Reibung der Ruhe** —, bzw. einer vorhandenen Relativbewegung entgegenzuwirken — man spricht dann von **Bewegungsreibung**.

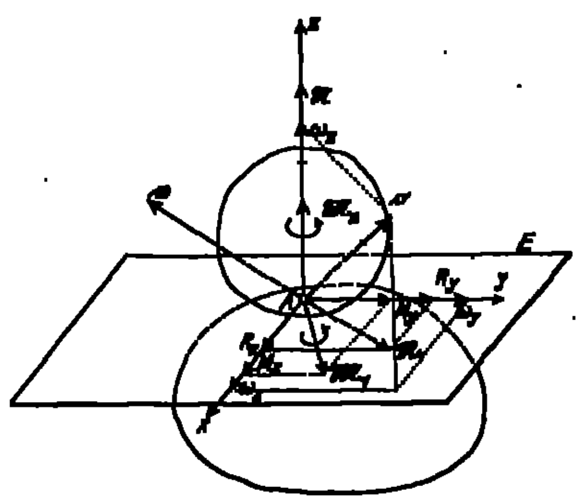


Abb. 1. Reibungskräfte und -momente.

Wenn die mögliche Beweglichkeit (bei der Haftreibung) oder die vorhandene Bewegung (bei der Bewegungsreibung) nur eine **Schiebung** oder **Gleitung** (ohne Drehung) ist, so nennt man die auftretende Reibung kurz **Gleitreibung**. Bei dieser tritt nur eine Reibungskraft $\mathfrak{R}$ auf, die — außer vom Normaldruck $\mathfrak{N}$ und vom Material, worüber unten ausführliche Angaben folgen — bei Vorhandensein einer Bewegung nur von der relativen Gleitgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ abhängen wird. Bei der Roll- oder Bohrreibung kommen außer der Reibungskraft $\mathfrak{R}$ noch die Momente M_x, M_y, M_z vor, und für alle diese Größen muß außer der Abhängigkeit von N und v auch noch eine Abhängigkeit vom sonstigen Bewegungszustande, d. h. von den Komponenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ der momentanen Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{o}$ angenommen werden. In dieser Allgemeinheit ist das Problem von v. Mises[1] formuliert worden, es ist aber bisher nicht gelungen, die Form der betreffenden Funktionen im einzelnen anzugeben.

Für die Gleitreibung und ohne Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gelten die folgenden Aussagen, die als die **Coulombschen Reibungsgesetze** bekannt sind:

1. Die **Haftreibung** ($\mathfrak{R}_0$) tritt auf, wenn zwei Körper unter Druck N miteinander in Berührung stehen, und zwar in solcher Größe, die nötig ist, um eine Verschiebung der Körper gegeneinander zu verhindern, sie kann aber über einen bestimmten Grenzwert hinaus nicht zunehmen; und zwar kann gesetzt werden

$$R_0 \le f_0 N. \qquad (1)$$

$\mathfrak{R}_0$ liegt in der gemeinsamen Berührungsebene der beiden Körper und kann in dieser jede beliebige Richtung annehmen. Diese Richtung und ihre Größe werden

[1] R. v. Mises, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 10, Art. 6 u. 7.

erst durch die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Das Gleichheitszeichen gibt die **Grenzlagen des Gleichgewichts**; f_0 nennt man die **Haftreibungszahl**.

Wenn also durch Anbringung einer solchen Reibungskraft von beliebiger Richtung ohne Überschreitung des Grenzwertes Gleichgewicht überhaupt eintreten kann, so tritt es auch tatsächlich ein.

2. Die **Bewegungsreibung** ($\mathfrak{R}$) wirkt stets der relativen Gleitung der Berührungsstellen entgegen und ist vom Betrage

$$R = fN; \tag{2}$$

f nennt man die **Reibungszahl für Bewegung**.

Diese beiden Ansätze werden den meisten Rechnungen zugrunde gelegt, die in der Technik zur Berücksichtigung der Reibungserscheinung angestellt werden.

Von dieser **äußeren Reibung** fester Körper ist zu unterscheiden die **innere** oder molekulare Reibung der festen Körper, die für die Erscheinungen der bleibenden Formänderungen, der elastischen Nachwirkung u. dgl. von bestimmendem Einfluß ist[1]) und ferner die Reibung zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten und Gasen oder solchen untereinander[2]).

3. **Die Gleitreibungszahlen; Versuchsergebnisse.** Durch die beiden Ansätze (1) und (2) von Ziff. 1 wird die Haft- und Bewegungsreibung auf die Festlegung der bezüglichen Reibungszahlen zurückgeführt, was, wenn die Form dieser Ansätze als zutreffend angenommen wird, noch offen läßt, daß f_0 und f vom **Material** der beiden in Berührung stehenden Körper und zwar insbesondere von deren **Oberflächenbeschaffenheit**, und f überdies noch von der Relativgeschwindigkeit v abhängen kann (ferner beide noch außerdem von einer Reihe anderer Umstände, über die unten einige Angaben folgen). Die exakte Feststellung der Abhängigkeit vom Material ist deshalb so unsicher, weil es bisher nicht gelungen ist, die Oberflächenbeschaffenheit eines Körpers oder Körperpaares, soweit sie für die Reibungserscheinung von Bedeutung ist, in eindeutiger und vergleichungsfähiger Weise zu beschreiben.

a) **Trockene und Flüssigkeitsreibung.** Die Coulombschen Ansätze (1) und (2) von Ziff. 1 gelten zunächst nur dann, wenn die miteinander in Berührung stehenden Flächen **vollkommen trocken** sind. Bei **nassen Flächen** hat man eigentlich ein Problem der Bewegung einer **zähen** (reibenden) **Flüssigkeit** vor sich, die an den benetzten Flächen in Form von dünnen „Ölfilmen" haftet, deren Form und Ausdehnung über den zylindrischen Lagermantel beim Umlauf der Welle meist stark schwankt; dieses Problem muß durch die Ansätze und Hilfsmittel behandelt werden, die in der Dynamik der zähen Flüssigkeiten Geltung haben[3]). Für diese beiden Arten bestehen folgende charakteristischen Verschiedenheiten: Es ist[4]) die

trockene Reibung	Flüssigkeitsreibung
proportional dem Normaldruck,	unabhängig vom Normaldruck,
unabhängig von der Geschwindigkeit,	proportional der Geschwindigkeit,
„ von der Größe der Gleitflächen,	„ der Größe der Gleitflächen,
abhängig von der Rauhigkeit der Gleitflächen,	unabhängig von der Rauhigkeit der Gleitflächen,
beim Eintritt der Bewegung größer als für die weitere Bewegung ($f_0 > f$).	gleich Null für den Eintritt der Bewegung.

[1]) Vgl. Bd. VI ds. Handb. [2]) Vgl. Bd. VII ds. Handb. [3]) Vgl. Bd. VII ds. Handb.
[4]) Erweiterung einer von R. v. Mises a. a. O. gegebenen Zusammenstellung.

b) Einfluß der Glättung der Gleitflächen. Die Funktion $f = f(v)$ würde (mit $f_0 > f$) nach diesen Aussagen den in Abb. 2 (ausgezogene Linie) dargestellten unstetigen Verlauf zeigen; für $v = 0$ ist f aller Werte fähig, die zwischen $-f_0$ und $+f_0$ liegen. Genauere Versuche (auf der schiefen Ebene) zur Nachprüfung dieses Verhaltens rühren von JAKOB[1] her, die folgende Ergebnisse lieferten: Bei Platten, deren Oberflächen nicht besonders bearbeitet wurden, besteht ein großer Unterschied zwischen der Haftreibungszahl und der Bewegungsreibungszahl, ganz so, wie es die älteren Versuche und die erwähnte Abb. 2 zeigen; nach Überwindung der Haftreibung (Anstoß) bewegt sich der Probekörper gleichförmig beschleunigt nach abwärts. Bei sorgfältig geglätteten und gesäuberten Platten (untersucht wurden solche aus Messing und Glas) besteht jedoch kein Unterschied mehr zwischen f_0 und f, d. h. der Körper setzt sich schon bei sehr kleinen Neigungen in Bewegung, und zwar verläuft diese bei kleinen Geschwindigkeiten merklich gleichförmig (nicht beschleunigt); für die Größe der Neigung der schiefen Ebene, bei welcher diese Abwärtsbewegung beginnt, läßt sich eine untere Grenze überhaupt nicht angeben, sie schien vielmehr nur von der Empfindlichkeit der mikroskopischen Beobachtung abhängig zu sein. Der Verlauf der Funktion $f = f(v)$ ist für diesen Fall durch die gestrichelte Linie in Abb. 2 gegeben, ist also von stetigem Charakter. (Übrigens hat bereits COULOMB in einzelnen Fällen und für einige Stoffe ein ähnliches Verhalten bemerkt, hat es aber nur als Ausnahme betrachtet; jedenfalls wurde es in der folgenden Literatur nicht beachtet.) Minimale Verunreinigungen — schon einzelne Staubkörnchen — verursachen bereits eine Rückkehr zu dem vorgenannten, unstetigen Verhalten. Die Versuche zeigen, daß f schon bei sehr kleinen Geschwindigkeiten (~ 1 mm/sec) asymptotisch dem Endwerte nahekommt, und bei den größeren Werten, die bei diesen Versuchen erreicht wurden, merklich konstant bleibt.

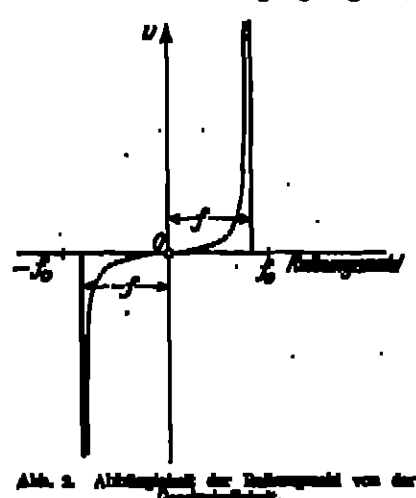


Abb. 2. Abhängigkeit der Reibungszahl von der Geschwindigkeit.

c) Zahlenwerte. Bei allen für rein technische Zwecke ausgeführten Messungen wurden die Versuchskörper nicht erst nach dieser besonderen, mit allen Hilfsmitteln der physikalischen Technik durchgeführten Reinigung verwendet, wie bei denen von JAKOB; ihnen allen haftet der Mangel der unzureichenden Beschreibung ihrer Oberflächenbeschaffenheit an, welcher jeden Vergleich solcher Versuche miteinander nahezu ausschließt. Die starke Abhängigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit ist auch der Grund, warum die in der Literatur mitgeteilten Zahlenwerte so sehr verschieden sind; die im folgenden angeführten sind nur als Mittelwerte anzusehen, sie haben nicht den Charakter von eindeutigen Materialkonstanten. Die Messungsverfahren, nach denen sie bestimmt wurden, sind die schiefe Ebene, bei der die Neigung im Augenblicke des Bewegungsbeginns abgelesen wird, und der belastete Schlitten (Tribometer) auf wagerechter Ebene, bei dem die Kraft für den Eintritt bzw. zur Erhaltung einer gleichförmigen

---

[1] CH. JAKOB, Dissert. Königsberg; Ann. d. Phys. Bd. 38, S. 126. 1912; vgl. auch W. KAUFMANN, Phys. ZS. Bd. 11, S. 985. 1910.

Bewegung unmittelbar durch ein Gewicht gemessen wird, das durch eine Schnur über eine Rolle mit dem belasteten Schlitten in Verbindung steht.

Durch Verwendung von Schmiermitteln wird (fast immer) die Reibung herabgesetzt, ohne sie wäre ein Betrieb von Maschinen mit bewegten Teilen wegen der sonst auftretenden Wärmeentwicklung und Materialabnutzung ausgeschlossen. Bei Verwendung von Schmiermitteln schwindet auch merklich die Abhängigkeit vom Material, und es bleibt im wesentlichen nur die vom Schmiermittel übrig. Die Schmiermittel wirken reibungsvermindernd in der Reihenfolge: Talg, trockene Seife, Schweinefett, Olivenöl. Eine besondere Stellung nimmt auch in dieser Beziehung das Wasser ein, das bald als Schmiermittel, bald als Gegenschmiermittel wirkt, wobei aber die Einzelheiten dieses Verhaltens noch nicht vollständig geklärt sind[1]).

Von Versuchen zur Bestimmung der Reibungszahlen sind insbesondere die von Coulomb[2]), Morin[3]), Brix[4]) und Rennie[5]) zu nennen.

Tafel der Reibungszahlen[6]).

Reibungszahlen	f_0 (Haftreibung)			f (Bewegungsreibung)		
Stoffpaar	trocken	geschmiert	mit Wasser	trocken	geschmiert	mit Wasser
Stahl auf Stahl	0,15	0,12—0,11	—	0,09—0,03	0,009	—
Metall auf Holz	0,6—0,5	0,1	—	0,5 —0,2	0,08—0,02	0,26—0,22
Holz auf Holz	0,65	0,2	0,7	0,4 —0,2	0,16—0,04	0,25
Leder auf Metall (Draht) .	0,6	0,12—0,25	0,62	0,25—0,5	0,12—0,15	0,36
Lederriem. a. Eichentromm	—	0,12	0,38	0,27	—	—
Hanfseil a. rauhem Holz .	0,5	—	—	—	—	—
Hanfseil a. poliert. Holz .	0,33	—	—	—	—	—
Holz auf Stein	bis 0,7	0,4	—	0,3	—	—
Stein a. Ziegel o. Ziegel . .	0,5—0,73	—	—	—	—	—
Mauerwerk auf Beton . .	0,76	—	—	—	—	—
Mauerwerk a. gew. Boden .	0,3—0,65	—	—	—	—	—
Stahl auf Eis	0,027	—	—	0,014	—	—

Die kleine Reibung des Eises (letzte Zeile) wird nach Reynolds[7]) durch Bildung einer Wasserschicht zwischen dem Stahl (Schlittschuh) und dem Eise hervorgebracht.

d) **Für größere Geschwindigkeiten** sind vor allem die Versuche zu nennen, die im Hinblick auf die Bedeutung der Reibungsfragen für das Eisenbahnwesen unternommen wurden. Die Ergebnisse der Versuche von Poirée[8]) (für stählerne Radreifen auf trockenen eisernen Schienen), Galton[9]) (ebenso, und für gußeiserne Bremsklötze an stählernen Radreifen) und Wichert[10]) (Brems-

[1]) Siehe Discussion on lubrication. Proc. Lond. Phys. Soc. 1920.

[2]) C. A. Coulomb, Mém. des sav. étrang. Bd. 10, S. 254. 1785; Théorie des machines simples. Nouv. éd. Paris 1821.

[3]) A. J. Morin, Mém. de l'Acad. franc. Bd. 2. 1834; Bd. 3. 1835.

[4]) A. F. N. Brix, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbefl. Bd. 16, S. 186. 1850; Über die Reibung auf Straßen von verschiedener Beschaffenheit, 2. Ausg., Berlin 1860.

[5]) G. Rennie, Dinglers Journ. Bd. 34, S. 95 u. 165. 1829; Trans. Roy. Soc. London Bd. 119, S. 143. 1829; ZS. f. Arch.- u. Ing.-Wiss. Bd. 7, S. 345. Hannover 1861.

[6]) Kennzeichnend für den derzeitigen Stand der Reibungsfrage ist z. B., daß in Landolt-Börnstein, Phys.-Chem. Tabellen, 5. Aufl., 1923, nur Zahlenwerte angegeben sind, die von A. Morin (1831) und G. Rennie (1861) herrühren.

[7]) O. Reynolds, Mem. Phil. Soc. Manchester Bd. 43. 1899; Papers Bd. 2, S. 734.

[8]) S. Poirée, Ann. des mines (5) Bd. 13, S. 271—320. 1858; Bd. 19, S. 27—120. 1861; C. R. Bd. 46, S. 802. 1858.

[9]) D. Galton, Engineering Bd. 25, S. 469. 1878; Bd. 26, S. 386 u. 395. 1878; Bd. 27, S. 372. 1879; Proc. Inst. Mech. Eng. 1878 u. 1879.

[10]) Vgl. den Bericht von [illegible] im Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnwesens Bd. 44, S. 72 u. 113. 1889 und Zentralbl. d. Bauverw. Bd. 14, S. 73. 1894.

klötze aus Stahlguß an stählernen Radreifen) sind in Abb. 3 zusammengestellt und zeigen eine deutliche Abnahme der Reibungszahl mit zunehmender Geschwindigkeit, während die Versuche von KLEIN[1]) für die Reibungszahlen von guß- oder schmiedeeisernen Bremsscheiben gegen Holzklötze für $v = 2$ bis 20 m/sec nahezu keine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit erkennen ließen. Der Verein Deutscher Eisenbahnverwaltungen nahm die von BOCHET[2]) aufgestellte Formel an mit den Werten

$$f = \frac{1 + 0{,}0112 \cdot v}{1 + 0{,}06 \cdot v} \cdot f_0, \qquad (1)$$

wobei für trockene Flächen $f_0 = 0{,}45$ und für nasse $f_0 = 0{,}25$ zu setzen und v in m/sec einzuführen ist.

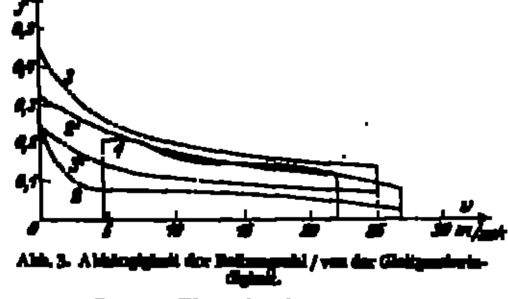


Abb. 3. Abhängigkeit der Reibungszahl f von der Gleitgeschwindigkeit.

——— POIRÉE: 1 Eiserne Radreifen auf trockenen eisernen Schienen.
– – – GALTON: 2 Stählerne Radreifen auf Stahlschienen, 2' Gußeiserne Bremsklötze an stählernen Radreifen.
—·— WICHERT: 3 Trockene Reibungsfläche, 3' Nasse Reibungsflächen.

Eine mittlere, aus den Versuchen von WICHERT entnommene Kurve wird nachher in der Theorie der Eisenbahnbremsen benutzt (s. Ziff. 50).

e) Von sonstigen Umständen, die auf die Reibung von Einfluß sind, wenn auch eine exakte physikalische Klärung noch keineswegs erreicht ist, seien hier noch angeführt: die Berührungsdauer, die Größe der Berührungsfläche, der Normaldruck (was deshalb verständlich wird, weil bei größeren Drucken die Berührungsflächen deformiert werden), die Faserrichtung (z. B. bei Holz, Walzeisen), die Vertauschung von Versuchskörper und Unterlage u. dgl.

f) Für die andern Arten der Reibung, insbes. der Rollreibung folgen in Ziff. 5 nähere Angaben.

3. Rechnungsansätze und Anwendungen. In die Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen der Mechanik wurde die Reibung bisher fast ausschließlich nur durch die Coulombschen Ansätze (1) und (2) von Ziff. 1 eingeführt, wobei die Reibungszahlen als Festwerte behandelt wurden. Der Umstand, daß die Haftreibung nicht durch eine Gleichung, sondern durch eine Ungleichung ins Spiel tritt, hat zur Folge, daß für die Gleichgewichtstellungen bzw. für die zur Herstellung des Gleichgewichts notwendigen Kräfte nicht eindeutige Werte, sondern endliche Bereiche auftreten. Die Art und Weise, wie die Einführung der Reibung erfolgt, mag aus den folgenden Beispielen ersehen werden.

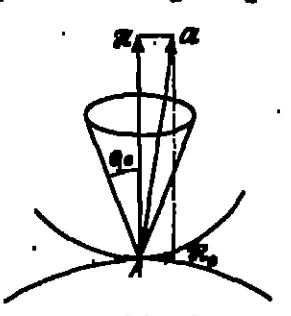


Abb. 4. Der Reibungskegel.

a) Der Reibungswinkel. Setzt man $f = \operatorname{tg} \varrho$, so nennt man ϱ den zu f gehörigen Reibungswinkel; für Haftreibung ist er unmittelbar durch die Neigung gegeben, bei der der Körper längs einer schiefen Ebene zu gleiten beginnt. Umgibt man die Normale im Berührungspunkte A zweier Körper mit einem Kegel (Abb. 4) vom halben Öffnungswinkel ϱ_0 (wobei $\operatorname{tg} \varrho_0 = f_0$), so läßt sich die Bedingung für Gleichgewicht auch so aussprechen, daß die an der Stelle A auftretende Auflagerkraft $\mathfrak{A}$ innerhalb dieses Reibungskegels liegen muß. Die

---

[1]) L. KLEIN, Mitt. üb. Forschungsarbeiten, Heft 10, Berlin 1903; ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 47, S. 1083. 1903.
[2]) H. BOCHET, Mém. de la Soc. des Ing. civ. 1852.

Einführung dieses Reibungskegels liefert für die Gleichgewichtsaufgaben eine einfache geometrische Deutung der Gleichgewichtsbedingungen. Für eine Leiter z. B., die sich nach Abb. 5 auf Boden und Wand stützt, herrscht Gleichgewicht, sobald die Lastwirkungslinie $\mathfrak{K}$ den gemeinsamen Bereich der Reibungskegel (die sich bei ebenen Problemen auf Winkelräume beschränken) trifft. Für welchen Punkt M die Zerlegung von $\mathfrak{K}$ ausgeführt werden muß, um die Auflagerdrücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zu ergeben, läßt sich durch die Hilfsmittel der Statik allein nicht entscheiden, die Lösung ist „einfach statisch unbestimmt". Die Grenzlagen der Last $\mathfrak{K}$, bei denen noch Gleichgewicht möglich ist, sind durch die Lotrechten durch die Punkte P und Q gegeben.

Eine Anwendung finden derartige Betrachtungen bei den sog. einfachen Maschinen: Hebel, schiefe Ebene, Keil, Schraube, Rolle, Wellrad. Als Wirkungsgrad (< 1) für eine bestimmte „Last" bezeichnet man dabei das Verhältnis der erforderlichen Kraft ohne, zu jener mit Berücksichtigung der auftretenden Reibungen[1]).

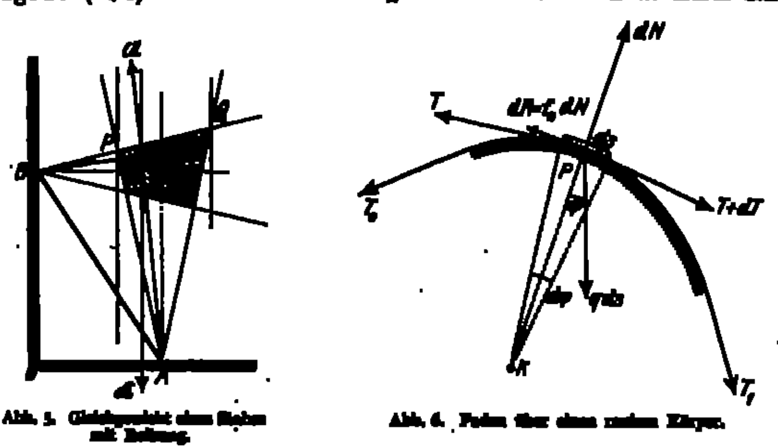


Abb. 5. Gleichgewicht eines Stabes mit Reibung.

Abb. 6. Faden über einem rauhen Körper.

b) Spannung in einem längs einer rauhen Kurve gespannten Faden. Ein unausdehnbarer, vollkommen biegsamer Faden vom Gewichte q für die Längeneinheit ist über eine in einer lotrechten Ebene liegende, rauhe Kurve gespannt. Zur Ermittlung der Spannung T und des Normaldrucks an jeder Stelle des Fadens setzt man für die Reibung $dR = f_0 dN$, bestimmt also die Spannungen für den Grenzwert der Haftreibung an jeder Stelle. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Richtungen der Tangente und Normale lauten (Abb. 6):

$$\left.\begin{aligned} dT - f_0\, dN + q\, ds \sin\varphi = 0, \\ T d\varphi - \quad dN + q\, ds \cos\varphi = 0. \end{aligned}\right\}$$

Mit $ds = \varrho\, d\varphi$ erhält man nach Entfernung von dN

$$\frac{dT}{d\varphi} - f_0 T = -q\varrho(\sin\varphi + f_0\cos\varphi),$$

und da $\varrho = \varrho(\varphi)$ und $q = q(\varphi)$ als gegeben anzusehen sind, so folgt für die Spannung an der Stelle φ:

$$T = C e^{f_0\varphi} - e^{f_0\varphi}\int q\varrho e^{-f_0\varphi}(\sin\varphi + f_0\cos\varphi)\, d\varphi. \tag{1}$$

[1]) Vgl. auch G. Herrmann, Der Reibungswinkel. Festschr. z. Jubil. d. Univ. Würzburg 1882.

Insbesondere erhält man für $\varrho =$ konst. $= a$, d. h. für den Kreis mit $q =$ konst.

$$T = c e^{f\varphi} + q a \cos\varphi + \text{konst.}, \tag{2}$$

und wenn das Eigengewicht vernachlässigt und die Spannung an der Anlaufstelle (φ_0) mit T_0 bezeichnet wird

$$T = T_0 e^{f(\varphi - \varphi_0)}. \tag{3}$$

c) **Die Energiezerstreuung.** Daß durch den Einfluß der Bewegungsreibung die mechanische Energie beständig abnimmt, folgt unmittelbar aus den Bewegungsgleichungen, die etwa für einen kleinen Körper auf einer rauhen ebenen Kurve mit leichtverständlichen Bezeichnungen in folgender Form geschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X - fN\frac{dx}{ds}, \\ m\ddot{y} &= Y - fN\frac{dy}{ds}. \end{aligned}\right\}$$

Multiplikation mit $\dot{x}dt$ und $\dot{y}dt$ und Addition liefert

$$m\frac{v^2}{2} = \int(X\,dx + Y\,dy) - \int fN\,ds + h,$$

d. h.

$$T + V = h - \int fN\,ds.$$

Da der Integrand beständig positiv ist, so drückt diese Gleichung die beständige Abnahme der Energie unter der Einwirkung der Reibung aus.

In manchen Fällen lassen sich auch die **Lagrangeschen Gleichungen**[1]) durch Einführung einer **Zerstreuungs- oder Dissipationsfunktion** auf Systeme erweitern, bei denen durch eine Widerstandskraft, die von der Geschwindigkeit und vom Orte abhängt, fortgesetzt Energie verloren geht, genauer gesagt in nichtmechanische Formen übergeführt wird. So hat Lord RAYLEIGH[2]) gezeigt, daß die Bewegungsgleichungen von der Form

$$m\ddot{x} = -k_x\dot{x} + X, \qquad m\ddot{y} = -k_y\dot{y} + Y, \qquad m\ddot{z} = -k_z\dot{z} + Z,$$

in denen k_x, k_y, k_z Funktionen der x, y, z sind, durch Einführung der Funktion

$$F = \tfrac{1}{2}\sum(k_x\dot{x}^2 + k_y\dot{y}^2 + k_z\dot{z}^2),$$

und Umschreibung in Lagrangesche Koordinaten q_r auf die Form gebracht werden können[3])

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} = Q_r.$$

Auf Reibungskräfte von der zuvor betrachteten Art läßt sich jedoch dieser Ansatz nicht übertragen.

d) **Das Problem der Bewegung eines Punktes auf einer rauhen Kurve** unter dem Einflusse von Kräften, die nur vom Orte auf der Kurve abhängen, läßt sich allgemein integrieren. Sei $T(s)$ die tangentiale, und $U(s)$ die normale Komponente der eingeprägten Kraft für die Masseneinheit, und N

---

[1]) Siehe Kap. 2, Ziff. 9ff. ds. Bd. des Handb.

[2]) Lord RAYLEIGH, Proc. Math. Soc. London 1873; Theory of sound, 2. Aufl., Bd. I, S. 130, London 1894.

[3]) Siehe die näheren Ausführungen in Kap. 2, Ziff. 14, und Kap. 8, Ziff. 53 ds. Bd. des Handb. Über die verschiedenen Formen der Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit, für welche die Integration der Bewegungsgleichungen möglich ist, siehe die Zusammenstellung in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, S. 469, 470 (P. STÄCKEL).

der ebenso verstandene Normaldruck der Führung, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} &= T(s) - fN,\\ \frac{v^2}{\varrho} &= U(s) + N.\end{aligned}\right\}$$

Die Ausscheidung von N liefert die Gleichung:

$$\frac{dv^2}{ds} + 2f\frac{v^2}{\varrho} = 2T(s) + 2fU(s).$$

Diese Gleichung gibt integriert, wenn $\int ds/\varrho = \varphi$ gesetzt wird und c eine Integrationskonstante bedeutet,

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c\,e^{-2f\varphi} + 2e^{-2f\varphi}\int^s e^{+2f\varphi}\{T(s) + 2fU(s)\}\,ds;$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist eine bekannte Funktion von s, sagen wir $F(s)$, so daß sich auch die zweite Integration, die die Bewegung selbst liefert, allgemein ausführen läßt:

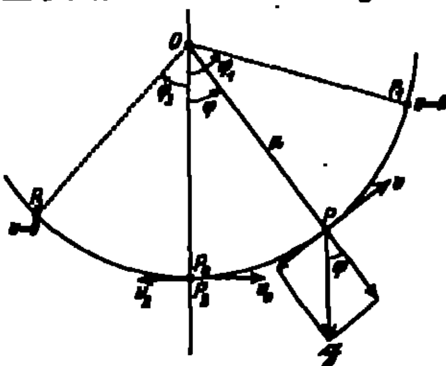


Abb. 7. Bewegung auf rauhem Kreise.

$$t - t_0 = \int^s \frac{ds}{\sqrt{F(s)}}.$$

Eine Anwendung dieses Vorganges gibt das folgende Beispiel.

e) **Schwerer Punkt auf lotrechtem Kreise.** Mit den aus der Abb. 7 ersichtlichen Bezeichnungen lautet die Bewegungsgleichung für die aufsteigende Bewegung, da der Normaldruck $N = g\cos\varphi + v^2/a$ ist,

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{v}{a}\frac{dv}{d\varphi} = -g(\sin\varphi + f\cos\varphi) - f\frac{v^2}{a},$$

oder

$$\frac{dv^2}{d\varphi} + 2fv^2 = -2ag(\sin\varphi + f\cos\varphi);$$

daraus folgt durch Integration, wenn $v = v_0$ für $\varphi = 0$ sein soll

$$v^2 = \left(v_0^2 - 2ag\frac{1-2f^2}{1+4f^2}\right)e^{-2f\varphi} + 2ag\frac{(1-2f^2)\cos\varphi - 3f\sin\varphi}{1+4f^2}. \tag{4}$$

Der Punkt kommt bei jenem Winkel φ_1 zur Ruhe, der durch die Gleichung $v = 0$ bestimmt ist. Von da an kehrt seine Bewegung um, er macht eine absteigende Bewegung, für die die Gleichung gilt

$$\frac{dv^2}{d\varphi} - 2fv^2 = -2ag(\sin\varphi - f\cos\varphi)$$

mit dem Integral (und der Anfangsbedingung $\varphi = \varphi_1$, $v = 0$)

$$v^2 = -2ag\frac{(1-2f^2)\cos\varphi_1 + 3f\sin\varphi_1}{1+4f^2}e^{2f(\varphi-\varphi_1)} + 2ag\frac{(1-2f^2)\cos\varphi + 3f\sin\varphi}{1+4f^2},$$

das sich mit Benutzung der Gleichung (4) (für $\varphi = \varphi_1$, $v = 0$) auch so schreiben läßt:

$$v^2 = \left(v_0^2 - 2ag\frac{1-2f^2}{1+4f^2}\right)e^{2f(\varphi-2\varphi_1)} + 2ag\frac{(1-2f^2)\cos\varphi + 3f\sin\varphi}{1+4f^2},$$

so daß v^2 beim Durchgang durch den tiefsten Punkt den Wert annimmt

$$v_1^2 = v_0^2 e^{-4f\pi} - 2ag\frac{1-2f^2}{1+4f^2}\left(e^{-4f\pi} - 1\right) < v_0^2 .$$

Ebenso kann gezeigt werden, daß die Winkel φ, bei denen die Umkehrung der Bewegung erfolgt, fortgesetzt abnehmen.

4. Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze. Die Ansätze, die in der Mechanik zur Darstellung der wirklich stattfindenden Vorgänge verwendet werden, bringen die der Erfahrung entnommenen Tatsachen in Form von Kraftgesetzen zum Ausdruck, die dann in die Gleichungen der Mechanik eingeführt werden. Für diese Ansätze muß die Forderung aufgestellt werden, daß die Bewegungsgleichungen aus bestimmten Anfangsbedingungen einen eindeutigen und widerspruchsfreien Verlauf der betreffenden Erscheinung erschließen lassen. Was nun die Coulombschen Reibungsgesetze anlangt, so ist zuerst von PAINLEVÉ[1]) darauf aufmerksam gemacht worden, daß diese Forderung nicht immer erfüllt werden kann, daß sich vielmehr schon in verhältnismäßig einfachen Fällen Widersprüche dagegen ergeben, so daß gewisse Ergänzungen an den bisher formulierten Aussagen oder Voraussetzungen notwendig werden, um eine logisch befriedigende Beschreibung des betreffenden Vorganges in seinen aufeinanderfolgenden Phasen zu sichern.

Um diesen Einwand zu kennzeichnen, sind eine Anzahl von Beispielen angegeben worden, die die Zweifelpunkte in die Erscheinung treten lassen. Das von KLEIN erläuterte Beispiel, das von PRANDTL[2]) herrührt, ist das folgende (Abb. 8): Zwei Punktmassen m_1, m_2 sind durch eine Stange von unveränderlicher Länge l miteinander verbunden und können auf zwei parallelen Geraden gleiten; die Führung von m_1 habe die Reibungszahlen f_0 bzw. f, die von m_2 sei vollkommen glatt. Die Koordinaten, von einem festen Anfangspunkt O gemessen, seien x_1, x_2, der Winkel der Stange gegen die x-Achse sei α, so daß die geometrische Bedingung gilt:

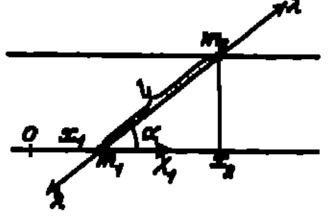


Abb. 8. Beispiel zur Kritik der Reibungsgesetze.

$$x_2 - x_1 = l\cos\alpha .$$

Auf m_1 wirke die eingeprägte Kraft X_1. Wenn ferner mit λ die Kraft in der Stange (positiv als Druck, negativ als Zug) bezeichnet wird, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2 &= \lambda\cos\alpha , \\ m_1\ddot{x}_1 &= X_1 - \lambda\cos\alpha - (f)\,\lambda\sin\alpha . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Mit (f) werde die augenblicklich geltende Reibungszahl bezeichnet, also, sobald Ruhe vorliegt,

$$-f_0 \leqq (f) \leqq +f_0 ,$$

und sobald Bewegung eintritt, $(f) = \pm f$, wobei die Bedingung erfüllt sein muß

$$(f)\,\lambda\,\dot{x}_1 > 0 , \tag{2}$$

---

[1]) P. PAINLEVÉ, Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique, S. 491 ff., Paris 1895; Leçons sur le frottement, Paris 1895; ferner C. R. Bd. 120, S. 596. 1895.

[2]) F. KLEIN, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 58, S. 186—191. 1910, und die daran anschließenden Noten von R. v. MISES, G. HAMEL, L. PRANDTL und F. PFEIFFER, ebenda; ferner F. PFEIFFER, ZS. f. Unterr. Bd. 24, S. 101. 1911.

die besagt, daß die Bewegungsreibung in m_1 stets der Geschwindigkeit dieses Punktes entgegengerichtet ist. Für $m_1 = m_2$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$ folgt:

$$\lambda = \frac{X_1}{2\cos\alpha + (f)\sin\alpha}.$$

Wenn nun $X_1 > 0$, $\cos\alpha > 0$ vorausgesetzt wird, so wird für $|\operatorname{tg}\alpha| > 2/f$ also $f|\sin\alpha| > 2|\cos\alpha|$ (also für eine steil gestellte Stange):

$$\lambda \gtrless 0, \qquad \text{je nachdem} \qquad (f) = \pm f;$$

dann kann für $\dot{x}_1 > 0$ beliebig einer der beiden Werte $(f) = \pm f$ genommen werden, wogegen für $\dot{x}_1 < 0$ ein Widerspruch mit Gleichung (2) folgt. Das gleiche erhält man für $\cos\alpha < 0$. Für $|\operatorname{tg}\alpha| = 2/f$ und $\cos\alpha > 0$ wäre $\lambda = 0$ oder ∞, je nachdem $(f) = \pm f$, so daß auch in diesem Fall für $\dot{x}_1 < 0$ ein Widerspruch mit Gleichung (2) eintritt. Für $\lambda = \infty$ tritt augenblickliche Selbsthemmung ein. Auch im vorhergehenden Falle zeigen die näheren Überlegungen und das Experiment, daß man es im Fall des Widerspruches mit augenblicklicher Selbsthemmung zu tun hat. Nach KLEIN werden die Widersprüche dadurch behoben, daß in diesen kritischen Punkten (f) nicht $= \pm f$, sondern irgendeinem Wert in dem Bereiche $(-f_0, +f_0)$ gleichgesetzt wird, wodurch stets $\lambda = \infty$ gemacht werden, also das Eintreten augenblicklicher Selbsthemmung veranlaßt werden kann.

Bei Beschränkung auf das Gebiet der Stereomechanik müßte demnach zur Beseitigung der auftretenden Widersprüche ein Satz von folgender Art eingeführt werden: „Sobald im Verlaufe der Bewegung oder im Anfangszustand der oben gekennzeichnete Sachverhalt eintritt, nimmt die Gleitgeschwindigkeit augenblicklich auf Null ab, es stellt sich Haftreibung ein, und für die Reibungszahl kann irgendein Wert des Bereiches $(-f_0, +f_0)$ auftreten."

PRANDTL hat darauf hingewiesen, daß es zur Behebung dieser Widersprüche vollkommen genügt, die Verbindungsstange zwischen den beiden Massen als elastisch ausdehnbar mit endlicher Elastizitätszahl E anzunehmen; dadurch erhält man ein Problem von zwei Freiheitsgraden, und es ergibt sich jetzt unter der Annahme der Coulombschen Reibungsgesetze für jeden anfänglichen Bewegungszustand eine eindeutige Lösung mit überall endlichen Beschleunigungen. Für negative Anfangsgeschwindigkeiten erhält man eine rasche Umkehr der Bewegung und für $E = \infty$ als Grenzwert die augenblickliche Selbsthemmung. Die Folgerungen dieser Annahme im einzelnen hat PFEIFFER (a. a. O.) herausgearbeitet.

CHAUMAT[1]) hat die von PAINLEVÉ aufgedeckten (scheinbaren) Widersprüche an dem (auch von PAINLEVÉ selbst erläuterten) Beispiel einer zylindrischen Kreisscheibe mit exzentrisch liegendem Schwerpunkt, die auf einer wagrechten Ebene rollt, auch experimentell bestätigt gefunden; auch diese Widersprüche müßten sich durch eine ähnliche Erweiterung der Voraussetzungen beheben lassen, wie sie zuvor angegeben wurden.

MAYER[2]) unterscheidet außer der Haft- und Bewegungsreibung noch die „Reibung bei entstehender Bewegung" und gibt andere Beispiele an, wo der daraus folgende Zustand zu Widersprüchen führen kann; derselbe behandelt auch die beim Stoß[3]) zweier Körper auftretenden Reibungserscheinungen (im Anschluß an DARBOUX und ROUTH).

5. Besondere Reibungserscheinungen. Bei der Behandlung der gleitenden Reibung haben sich noch andere Probleme eingestellt, die man versucht hat,

[1]) H. CHAUMAT, C. R. Bd. 136, S. 1634. 1903.
[2]) A. MAYER, Leipziger Ber. 1893 bis 1902, insbes. aber 1901.
[3]) Nähere Ausführungen hierüber Bd. VI ds. Handb.

durch Verwendung der Coulombschen Ansätze zu erledigen, obwohl sie auch rein mechanisch noch reichlich ungeklärt sind. Hierzu gehört der Fall der **Zapfenreibung**, sowohl für Trag- als auch für Spurzapfen. Mit Hilfe des Coulombschen Ansatzes wird z. B. beim Spurzapfen das „Moment der Zapfenreibung" in der Form

$$M = 2\pi \int f p r dr$$

angesetzt, wobei zur weiteren Auswertung eine Festsetzung über die Form der Funktionen $p = p(r)$, die den Einheitsdruck angibt, und f notwendig wäre. Das Versagen der bisher versuchten Ansätze scheint darauf hinzudeuten, daß diese zu jenen Problemen gehören, die sich nicht durch ein sog. Elementargesetz und nachherige Summation bewältigen lassen, wie dies z. B. auch beim Luftwiderstand eines Körpers unmöglich ist, der sich auch nicht durch Addition über die Widerstände der einzelnen Teilchen ermitteln läßt.

Für praktische Rechnungen wird die Größe M des Zapfenreibungsmoments nach der Gleichung ermittelt

$$M = f_1 Q r, \tag{1}$$

in der Q die Querbelastung des Zapfens, r seinen Halbmesser und f_1 die **Zapfenreibungszahl** bezeichnet. Genauere Versuche über die Abhängigkeit der Zapfenreibung von der Geschwindigkeit, der Druckverteilung und der anderen bestimmenden Größen sind insbesondere von STRIBECK[1]) und LASCHE[2]) angestellt worden[3]).

Ähnliche Ansätze wie bei der gleitenden Reibung sind auch für die **Roll- und Bohrreibung** eingeführt worden, und zwar wird (nach Abb. 1)

$$\frac{M_1}{N} = f_2 \text{ als die } \textbf{Rollreibungszahl},$$

$$\frac{M_2}{N} = f_3 \text{ als die } \textbf{Bohrreibungszahl}$$



Abb. 9. Gleiten bei Rollreibung.

bezeichnet; beide haben die Dimensionen von Längen.

Einen qualitativen Einblick in die Vorgänge bei der **Rollreibung** und gleichzeitig dessen experimentelle Bestätigung verdankt man REYNOLDS[4]); er zeigte, daß mit dem Rollen stets eine gewisse Gleitung verbunden ist. Nimmt man zur Vereinfachung an, daß die Unterlage wesentlich nachgiebiger ist (Kautschuk) als die Rolle (Eisen), so wird nur eine Deformation der Unterlage eintreten, bestehend aus einer muldenförmigen Einsenkung mit Aufstauchung an den Rändern. Die Berührung findet dann längs der ganzen Oberfläche der Mulde statt; O sei der „mittlere Berührungspunkt". Die in der Abb. 9 längs der Rolle bezeichneten Punkte 0, 1, 2, ... sind äquidistant, die auf der Unterlage waren es vor der Deformation und zeigen in ihrem wechselnden Abstand den Sinn der eintretenden Formänderung an. Die Punkte mit gleichen Ziffern fallen beim fortschreitenden Abrollungsvorgang zusammen, was durch die mit dem Abrollen verbundene Dehnung der Unterlage ermöglicht wird. Der Punkt 4 muß z. B. von der gezeichneten Lage bis zu dem Augenblicke, wo er zum mittleren Berührungspunkt geworden ist, um das Stück $\overline{44'}$ längs der Unterlage gleiten. Der

[1]) R. STRIBECK, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 46, S. 1341, 1432, 1463. 1902; Mitt. üb. Forschungsarb. Heft 7. 1903.

[2]) O. LASCHE, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 46, S. 1881, 1932, 1961. 1902; Mitt. üb. Forschungsarb. Heft 9. 1903.

[3]) S. weiter H. HEIMANN, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 49, S. 1161. 1905; G. DETTMAR, Dinglers Journ. Bd. 315, S. 86. 1900; Elektrot. ZS. Bd. 20, S. 380. 1899; Bd. 23, S. 741. 1902.

[4]) O. REYNOLDS, Phil. Trans. Bd. 166, I. 1876; Papers Bd. I, S. 110; man vgl. den Bericht in KLEIN-SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, S. 537ff.

gesamte Energieverlust wird dann zum Teil durch dieses Gleiten verursacht, zum anderen Teil durch die Arbeit, die zur plastischen, nicht mehr zur Rückbildung gelangenden Formänderung der Unterlage aufzuwenden ist.

Bezüglich der Größe der Rollreibungszahl mögen die folgenden Zahlenwerte Anhaltspunkte bieten:

Eisenbahnräder auf Schienen oder Pockholz auf Pockholz . . $f_1 \approx 0{,}05$ cm,
Ulmenholz auf Pockholz . . . . $f_1 \approx 0{,}08$ cm.

Neuere Untersuchungen über die Rollreibung unter Berücksichtigung der Verformungen sind JAHN[1]), SACHS[2]) und FROMM[3]) zu verdanken.

JAHN untersucht den längs einer schiefen Ebene rollenden Zylinder, und sucht insbes. die dabei entstehende Schlüpfung zu bestimmen. Es zeigt sich, daß bei einem Verhältnis von

$$\frac{\text{Umfangskraft}}{\text{Schienendruck}} = 0{,}28$$

eine wirkliche Schlüpfung des Zylinders an den Schienen eintritt — ein für den Eisenbahnbetrieb wichtiges Ergebnis. Neben dieser „wirklichen" tritt eine „scheinbare" Schlüpfung dadurch ein, daß die Schienenteilchen unter dem Einfluß der Umfangskraft ausweichen, wodurch der tatsächlich zurückgelegte Weg kleiner wird als bei reinem Rollen. Um diese scheinbare Schlüpfung zu berücksichtigen, empfiehlt es sich, für das obige Verhältnis die Zahl 0,15 bis 0,165 anzunehmen.

SACHS verwendet als Versuchsanordnung Reibungsräder, die die Untersuchung eines Beharrungszustandes ermöglichen. Er fand als Ursache der Schlüpfung ebenfalls tangentiale Formänderungen der Scheiben an den Berührungsstellen. Zur Verfolgung dieser Formänderungen, die den Reibungsvorgang entscheidend beeinflussen, werden die Oberflächen dauernd mit Hilfe eines Mikroskops betrachtet und im Bilde festgehalten. Es ergab sich, daß bei Konstanthalten der maßgebenden mechanischen Größen (Umfangskraft, Normalkraft, Drehzahl usw.) die Oberfläche selbst eine Art Beharrungszustand annimmt, und weiter, daß der Reibungsbeiwert mit zunehmender Normalkraft abnahm. Der größte Wert — 0,61 — wurde für Räder aus Messing und Gußeisen beobachtet. Entsprechend den verschiedenen kennzeichnenden Vorgängen wird zwischen Gleitschlupf und Formänderungsschlupf unterschieden. Die exakte analytische Formulierung dieser Erscheinungen gab FROMM.

Die tangentialen Formänderungen sind auch als die Ursachen der an Eisenbahnschienen oft beobachteten Riffelbildung anzusehen (vgl. Ziff. 48).

Über die Größe der **Bohrreibung** haben schon COULOMB und in neuerer Zeit WARBURG und v. BABO Versuche angestellt[4]).

Als konstruktive Hilfsmittel zur wirkungsvollen Verkleinerung der Reibung sind die Kugellager, Walzenlager u. dgl. zu nennen.

6. Physikalische Theorien der Reibung. COULOMB hat bereits auf den möglichen Einfluß der Luftfeuchtigkeit auf die Reibung hingewiesen, der schon bei kleinsten Mengen (Hauch) feststellbar ist, so daß es sich bei der Reibung möglicherweise auch um eine Kapillaritätserscheinung handeln dürfte. Auch LANDSBERG hat die Reibung durch kondensierte Feuchtigkeitsschichten wesentlich beeinflußt gefunden, die sich schwer völlig entfernen lassen. WARBURG

[1]) J. JAHN, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 62, S. 121, 145, 160. 1918.
[2]) G. SACHS, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 4, S. 1. 1924.
[3]) H. FROMM, ebenda Bd. 7, S. 27. 1927.
[4]) Siehe die Zitate auf S. 497.

und v. Babo[1]) haben Versuche (mit optischen Methoden an polierten Gläsern) angestellt, die entscheiden sollten, ob die Reibung von Molekularanziehungen oder von Ungleichheiten der reibenden Flächen herrührt, und neigen der Ansicht zu, daß die kleinen Unebenheiten an den Oberflächen bei der Bewegung fortgesetzt, und zwar teilweise plastisch, deformiert werden, so daß die Reibungskraft in bleibenden Formänderungen der Körper begründet wäre[2]).

Ansätze zu rein mechanischen Theorien der Reibung sind von verschiedenen Seiten gegeben worden. Brillouin[3]) versuchte, die Erscheinungen auf die Einwirkung zentraler Kräfte zurückzuführen, die nur von den Entfernungen der kleinsten Teilchen abhängen; beim Gleiten soll sich dann ein Teil der Energie in die Energie der oszillatorischen Bewegung dieser kleinsten Teilchen verwandeln. Korn[4]) nimmt die Theorie der „pulsierenden Kugeln" von Bjerknes zum Ausgangspunkt und gelangt zu einer Theorie der Reibung, indem er die Schwingungen schwach kompressibler Teilchen untersucht, die sich in einem nahezu inkompressiblen „Zwischenmedium" bewegen. Das Studium der Oktave der Grundschwingung des Zwischenmediums „führt zu einer Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen, indem die Abstoßung umgekehrt proportional der fünften Potenz der Entfernung als eine Folge dieses ersten Obertones dargestellt werden kann". Ein Anschluß dieser Theorie an die sonst üblichen Vorstellungen über die Reibung ist nicht erzielt worden.

II. Kinetostatik der Körperketten.

7. Vorbemerkungen; Voraussetzungen. In diesem Abschnitte handelt es sich um die Anwendung der Methoden und Ansätze der Systemmechanik, die in Kapitel 8 dieses Bandes entwickelt wurden, auf starre Körper, die durch Gelenke miteinander zu einer Kette verbunden sind. Wenn im besonderen die Verbindung der Körper miteinander und mit der festen Bezugsebene so beschaffen ist, daß die Beweglichkeit der aus ihnen gebildeten Kette bis auf einen Freiheitsgrad eingeschränkt ist, so nennt man die Kette zwangläufig. Solche Körperketten gelangen in der Maschinenlehre unter dem Namen Getriebe zur Verwendung; als deren wichtigstes Beispiel ist das sog. Kurbelviereck[5]) und von dessen Ausartungen das Schubkurbelgetriebe zu nennen, das bei jeder Maschine mit hin und her gehenden Teilen die Übertragung der Energie von den Kolben der Arbeitszylinder auf die Hauptwelle der Maschine vermittelt. Außer den Gelenkverbindungen (durch zylindrische Zapfen) kommen dabei insbesondere die geraden (seltener die kreisförmigen) Führungen zur Verwendung.

In diesem Zusammenhang kommt es auf die Lösung der folgenden Fragen an:

a) Bestimmung der Bewegung bei gegebenen Kräften und Massen,

b) Bestimmung der Auflager- und Führungskräfte (Gelenkdrücke),

c) Bestimmung der inneren Spannungen (Beanspruchungen) an jeder Stelle (für jeden Querschnitt) der bewegten Körper.

Unter Kinetostatik versteht man die Methoden zur Lösung der unter b) und c) genannten Probleme, die auf die Zurückführung der dynamischen auf statische Probleme mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips hinauslaufen;

---

[1]) E. Warburg u. A. v. Babo, Ann. d. Phys. Bd. 121, S. 283. 1864.

[2]) Hierfür sprechen auch die Versuche von F. T. Trouton, Proc. Roy. Soc. London Bd. 59, S. 25. 1896; und H. Chaumat, C. R. Bd. 136, S. 1634. 1903.

[3]) M. Brillouin, C. R. Bd. 128, S. 354. 1899; Ann. chim. phys. (7) Bd. 16, S. 133. 1899.

[4]) A. Korn, Eine mechanische Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. Berlin 1901.

[5]) S. Kap. 5, Ziff. 21 ds. Bd. des Handb.

ausgeschlossen bleibt die Betrachtung der Formänderungen, die durch die inneren Spannungen entstehen. Demgemäß werden die betrachteten Körper als vollkommen starr vorausgesetzt. Die Formänderung der in Wirklichkeit elastischen (oder plastischen) festen Körper, die infolge der eingeprägten und Trägheitskräfte verursacht werden, und die sich der Hauptbewegung überlagern, sowie auch deren zeitlicher Verlauf, der in der Regel in Form von Schwingungen in die Erscheinung treten wird, sind bisher nur in besonderen Fällen behandelt worden. Ein einfaches, hierhergehöriges Beispiel wäre das folgende: die Formänderungen des Stabpendels bei freien Schwingungen um einen Aufhängepunkt. Noch einfachere Fälle, wie z. B. das elastisch aufgehängte Punktpendel und der bewegte, nichtsteife Faden (Seil) sind dagegen in der Literatur mehrfach herangezogen worden. Derartige Betrachtungen sind nicht so sehr wegen der unmittelbar auftretenden Spannungen und Formänderungen selbst von Bedeutung, als vielmehr wegen des Hinzutretens von Resonanzerscheinungen, die damit verbunden sein können.

8. Ermittlung der Elementarreaktionen in einem Punkte eines starren Körpers nach dem d'Alembertschen Prinzip[1]**).** Wenn eine bewegliche Punktmasse m (oder ein Massenelement) durch Beschränkungen irgendwelcher Art verhindert wird, der auf sie wirkenden eingeprägten Kraft frei zu folgen und die freie Bahn einzuschlagen, so ist das Newtonsche dynamische Grundgesetz für die Beschleunigungskomponenten w_i

$$m w_i = k_i \qquad (\text{im Raum } i = 1, 2, 3;\ \text{in der Ebene } i = 1, 2)$$

durch Hinzufügung der „Elementarreaktion" r_i ($i = 1, 2, 3$ bzw. $= 1, 2$) zu erweitern, die von der Verbindung des betrachteten Punktes mit einer Führung oder mit dem Körper, dem er angehört, herrührt:

$$m w_i = k_i + r_i. \tag{1}$$

Nach dem d'Alembertschen Prinzip bilden nun die sämtlichen Elementarreaktionen r_i aller Punkte des materiell verbundenen Systems für sich eine Gleichgewichtsgruppe, erfüllen also für das ebene System (für eine „Scheibe") die drei, für das räumliche System die bekannten sechs Gleichgewichtsbedingungen. Die Beschleunigungen w_i werden vermöge der obwaltenden geometrischen Bedingungen durch so viele verallgemeinerte Koordinaten (oder Parameter) q_i ausgedrückt, als die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt, und die diesen Koordinaten entsprechenden Bewegungsgleichungen angeschrieben. Diese Bewegungsgleichungen werden sodann nach den zweiten Ableitungen $\ddot{q}_j$ aufgelöst und alle Beschleunigungen w_i durch diese $\ddot{q}_j$ ausgedrückt; die entstehenden Gleichungen enthalten dabei im allgemeinen auch die $\dot{q}_j$ und die q_j. Durch die Gleichung (1) sind sodann die Elementarreaktionen aller einzelnen Systempunkte gegeben.

Die Ausführung dieses Vorganges verlangt:

1. die Aufstellung der Gleichungen, welche die Elementarbeschleunigungen w_i der einzelnen Punkte eindeutig durch die zweiten Ableitungen $\ddot{q}_j$ geeigneter verallgemeinerter Koordinaten q_j ausdrücken (sie ergeben sich durch zweimalige Differentiation der geometrischen Gleichung des Systems);

2. die Aufstellung der Bewegungsgleichungen der Körperkette durch Einführung der diesen Koordinaten q_j entsprechenden dynamischen Systemgrößen, das sind die diesen Koordinaten zugehörigen Impulse und Kräfte;

---

[1]) Siehe K. Heun, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 56, S. 38. 1908; Arch. d. Math. u. Phys. Bd. II, 2, S. 57–77, 298–326. 1902; ferner dessen Bericht: Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Jahresber. d. D. Math.-Ver. Bd. 9. 1900; Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik. Leipzig 1902; Lehrbuch der Mechanik Bd. I, Samml. Schubert 37. Leipzig 1906; Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, S. 11.

3. die Reduktion dieser Elementarreaktionen an irgendeinen durch die Kette gelegten (und diese vollständig zertrennenden) Schnitt (Schnittreaktion), im besonderen an einen durch ein Gelenk geführten Schnitt (Gelenkreaktion). Diese Reduktion gehört speziell der Kinetostatik an.

HEUN unterscheidet zwischen den spezifischen (relativen) und den absoluten Schnittreaktionen. Die ersteren geben nur jene Komponenten an, die dem „Lagrangeschen Bewegungsraum" des Systems entsprechen, welche also nur von der Veränderung der eingeführten Lagrangeschen Koordinaten herrühren; sie sind also nicht nur an den betrachteten Schnitt, sondern gewissermaßen auch auf die gewählten Koordinaten „bezogen". Die absoluten sind die auf den Schnitt bezogenen Reaktionen der von den Auflagerungen und sonstigen Verbindungen vollständig befreiten Systemteile (vgl. das Beispiel Ziff. 12).

9. Aufstellung der Bewegungsgleichungen in der Lagrangeschen Form. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten drückt sich das d'Alembertsche Prinzip in folgender Form aus[1]):

$$\mathrm{S}\, r_i\, \delta x^i = 0, \tag{1}$$

wobei sich das Summenzeichen S auf alle Punkte des betrachteten Systems bezieht und außerdem auch über gemeinsam unten und oben vorkommende Zeiger zu summieren ist. Die δx^i ($i = 1, 2, 3$ bzw. $1, 2$) bedeuten die Komponenten der virtuellen Verschiebungen der Systempunkte. Nach Gleichung (1) von Ziff. 8 ist diese Gleichung gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\mathrm{S}\, m\, w_i\, \delta x^i = \mathrm{S}\, k_i\, \delta x^i. \tag{2}$$

Wenn nun alle x^i Funktionen einer endlichen Anzahl (n) von allgemeinen (voneinander unabhängigen) Koordinaten q^j ($j = 1, 2, \ldots n$) sind, welche die Lage des gebundenen Systems eindeutig festlegen, also $x^i = x^i(q_1, \ldots q_n)$, so zerfällt wegen der Beziehung

$$\delta x^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\, \delta q^j = \sum_j \xi_j^i\, \delta q^j, \qquad \xi_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \tag{3}$$

(worin sich das Summenzeichen $\sum$ über die Zahl n der Freiheitsgrade erstreckt), die Gleichung (2) in die folgenden:

$$\mathrm{S}\, m\, \xi_j^i\, w_i = \mathrm{S}\, \xi_j^i\, k_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{4}$$

die man als die kinetischen Gleichungen des gebundenen Systems von n Freiheitsgraden bezeichnet. Führt man nach LAGRANGE in diese Gleichung die skalare Funktion ein

$$\left.\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\, m v^2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\, m \frac{dx^i}{dt}\frac{dx_i}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\, m \Big(\sum_j \xi_j^i \frac{dq^j}{dt}\Big)\Big(\sum_k \xi_{ik} \frac{dq^k}{dt}\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum a_{jk}\dot q^j \dot q^k, \qquad a_{jk} = a_{kj} = \mathrm{S}\, m\, \xi_j^i \xi_{ik}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

die man die kinetische Energie T des Systems nennt, so ist[2])

$$\mathrm{S}\, m\, \xi_j^i\, w_i \equiv \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot q^j}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q^j}. \qquad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{6}$$

Die Ausdrücke

$$\mathrm{S}\, \xi_j^i\, k_i = Q_j \tag{7}$$

[1]) An Stelle der (von HEUN u. a. benutzten) Vektordarstellung wird hier die Bezeichnungsweise des „Riccikalküls" verwendet, der heute in allen Zweigen der Physik volles Bürgerrecht erworben hat.

[2]) S. Kap. 2, Ziff. 9 ds. Bd. des Handb.

heißen die **verallgemeinerten Kräfte**. Sie sind durch folgende Festsetzung definiert: Unterwirft man das System einer Lagenänderung, bei der alle q bis auf das eine q^j ungeändert bleiben, so daß nur diesem die virtuelle Änderung δq^j erteilt wird, und mißt die Arbeit, die dabei geleistet wird, so ist diese $Q_j \delta q^j$. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen des Systems lauten dann:

$$W_j \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{8}$$

wo W_j eine Abkürzung für die linke Seite sein soll. Weiter nennen wir die Größen

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} = \sum_k a_{jk} \dot{q}^k = p_j \tag{9}$$

die **verallgemeinerten Impulse**.

10. Bestimmung der Beschleunigungen und der Elementarreaktionen. Nach Gleichung (3) von Ziff. 9 ist die Geschwindigkeit eines beliebigen Körperpunktes gegeben durch

$$\dot{x}^i = v^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \dot{q}^j = \sum_j \xi_j^i \dot{q}^j, \tag{1}$$

und daher die Beschleunigung

$$w^i = \frac{dv^i}{dt} = \dot{v}^i = \sum_j (\xi_j^i \ddot{q}^j + \dot{\xi}_j^i \dot{q}^j); \tag{2}$$

darin ist

$$\dot{\xi}_j^i = \sum_l \frac{\partial \xi_j^i}{\partial q^l} \dot{q}^l,$$

und die $\ddot{q}^j$ folgen durch Auflösung der Lagrangeschen Gleichungen (8) von Ziff. 9. Da

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^s} = \sum_r a_{rs} \dot{q}^r,$$

so können deren linke Seiten in der Form geschrieben werden

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_r a_{rs} \dot{q}^r\right) - \frac{1}{2} \sum_{hl} \frac{\partial a_{hl}}{\partial q^s} \dot{q}^h \dot{q}^l = Q_s$$

oder

$$\sum_r a_{rs} \ddot{q}^r + \sum_{hl} \begin{bmatrix} hl \\ s \end{bmatrix} \dot{q}^h \dot{q}^l = Q_s, \tag{3}$$

worin

$$\begin{bmatrix} hl \\ s \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{hs}}{\partial q^l} + \frac{\partial a_{ls}}{\partial q^h} - \frac{\partial a_{hl}}{\partial q^s}\right) = a_{hl,s}$$

das Christoffelsche Drei-Indizes-Symbol erster Art bedeutet.

Bezeichnet ferner $|a| = |a_{rs}|$ die aus den Größen a_{rs} gebildete Determinante und a^{rs} das Komplement von a_{rs} in dieser, durch a selbst dividiert, so folgt durch Multiplikation der vorhergehenden Gleichungen mit a^{rs} und Addition über s:

$$\ddot{q}^r = \sum_s a^{rs} Q_s - \sum_{hls} a^{rs} \begin{bmatrix} hl \\ s \end{bmatrix} \dot{q}^h \dot{q}^l. \tag{4}$$

Wenn

$$\sum_s a^{rs} \begin{bmatrix} hl \\ s \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} hl \\ r \end{Bmatrix} = a^r_{hl}$$

das Christoffelsche Drei-Indizes-Symbol zweiter Art bedeutet, so folgt auch

$$\ddot{q}^r = \sum_s a^{rs} Q_s - \sum_{kl} \begin{Bmatrix} kl \\ r \end{Bmatrix} \dot{q}^k \dot{q}^l. \tag{5}$$

In diese Gleichungen können auch statt der Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$ die Impulsgrößen p_k mittels der Gleichungen (9) von Ziff. 9 eingeführt werden.

Mit den $\ddot{q}^r$ sind vermöge der Gleichungen (2) auch die w^i für alle Punkte der Körperkette und damit auch die sämtlichen Elementarreaktionen r_i gefunden nach der Gleichung

$$r_i = m w_i - k_i. \tag{6}$$

11. Spezifische Schnittreaktionen und absolute Reaktionen. Legt man durch irgendeinen Körper der Kette einen Schnitt s (Abb. 10), so zerfällt die Kette in zwei Teile k' und k'', denen nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten die folgenden statischen Reduktionen entsprechen:

$$S' r_i \delta x^i = \sum_j R'_j \delta q^j, \qquad S'' r_i \delta x^i = \sum_j R''_j \delta q^j, \tag{1}$$

wobei sich die Striche auf die beiden durch den Schnitt entstehenden Systemteile k' und k'' beziehen; dabei gilt nach der Grundgleichung des d'Alembertschen Prinzips

$$R'_j + R''_j = 0. \qquad (j = 1, 2 \ldots n) \tag{2}$$

Durch Ausführung der Addition der virtuellen Arbeiten der Elementarreaktionen über k' erhält man

$$Q'_j + R'_j = W'_j, \qquad (j = 1, 2 \ldots n) \tag{3}$$

worin die Q'_j die am ersten Systemteil k' angreifenden eingeprägten Kräfte bedeuten und die Systemgrößen W'_j durch die Gleichung

$$S' m w_i \delta x^i = \sum W'_j \delta q^j \tag{4}$$

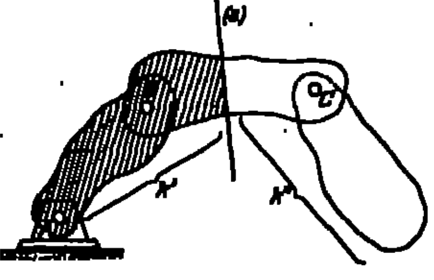


Abb. 10. Schnittreaktionen.

bestimmt sind, in der jedoch zu beachten ist, daß die in den W'_j vorkommenden Beschleunigungen $\ddot{q}^j$ aus den Differentialgleichungen der Bewegung des ganzen Systems

$$W_j = Q_j \qquad (j = 1, 2 \ldots n) \tag{5}$$

zu entnehmen sind, sofern nicht die Beschleunigungen unmittelbar nach den Gleichungen (5) von Ziff. 10 und die δx^i mittels der Gleichungen (3) von Ziff. 9 durch die δq^j ausgedrückt werden. Die Größen W'_j treten demnach als die Lagrangeschen Komponenten der Beschleunigung für den Teil k' der Körperkette auf. Zu den eingeprägten Kraftgrößen, die durch die Gleichung

$$S' k_i \delta x^i = \sum Q'_j \delta q^j$$

bestimmt sind, müssen noch die Reaktionskomponenten R'_j einzeln hinzutreten, damit sich der von k'' losgelöste Teil k' gerade so bewege, wie er sich als Teil der Gesamtkette bewegen würde. Damit ist die mechanische Bedeutung dieser spezifischen Schnittreaktionen R'_j festgelegt. Trennt der Schnitt s im besonderen zwei aufeinanderfolgende Glieder der Kette, die durch ein Gelenk miteinander verbunden sind, so nennt man die an den Schnitt reduzierte Reaktion die spezifische Gelenkreaktion.

12. Das Stabpendel. Unter teilweiser Erweiterung des vorher angegebenen Verfahrens möge hier als Beispiel die direkte Ausrechnung der Elementar-

reaktionen und des Gelenkdruckes für das Stabpendel von der Länge l, der Masse m und der Dichte ϱ eingeschaltet werden (Abb. 11).

Die Komponenten der Beschleunigung des Stabteilchens in P nach den Achsen x, y sind, wenn $OP = s$ gesetzt wird,

$$\ddot{x} = -s\dot{\varphi}^2, \qquad \ddot{y} = s\ddot{\varphi}.$$

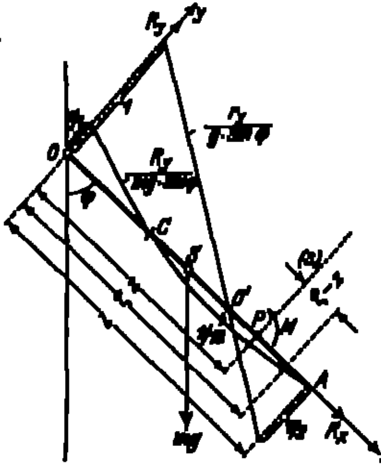


Abb. 11. Reaktionen beim Stabpendel.

Die Bewegungsgleichung lautet

$$J\ddot{\varphi} = -mg\frac{l}{2}\sin\varphi,$$

und da das Trägheitsmoment $J = ml^2/3$ ist,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2l}\sin\varphi.$$

Durch Integration folgt hieraus, wenn $\dot{\varphi} = 0$ für $\varphi = \alpha$ sein soll,

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{2l}(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Seien ferner r_x, r_y die Komponenten der Elementarreaktion an der Stelle P, auf die Masseneinheit bezogen; dann folgt nach Gleichung (6) von Ziff. 10 nach Streichung des dortigen Faktors m

$$r_x = -s\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi = -\frac{3g}{2l}(\cos\varphi - \cos\alpha)\,s - g\cos\varphi,$$

$$r_y = s\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = g\left(1 - \frac{3s}{2l}\right)\sin\varphi.$$

Der Verlauf von $r_y/g\sin\varphi$ ist in Abb. 11 durch die Gerade gegeben; für das Teilchen O' in der Entfernung $2l/3$ von O ist $r_y = 0$, — die bekannte Eigenschaft des Schwingungsmittelpunktes[1]).

Legt man an der Stelle P durch den Stab den Schnitt s, so hat die Gesamtreaktion, das ist die Summe der Elementarreaktionen des Teiles PA, die Komponenten

$$R_x = -\varrho\int_s^l r_x\,d\zeta = -mg\left[\frac{3}{4}\left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right)(\cos\varphi - \cos\alpha) + \left(1 - \frac{s}{l}\right)\cos\varphi\right],$$

$$R_y = \varrho\int_s^l r_y\,d\zeta = mg\left[\frac{1}{4} - \frac{s}{l} + \frac{3s^2}{4l^2}\right]\sin\varphi.$$

$R_y/mg\sin\varphi$ ist durch die Parabel in Abb. 11 eingezeichnet; endlich ist das Moment der Elementarreaktionen für den Stabteil PA in bezug auf den Punkt P

$$M_P = \varrho\int_s^l r_y(\zeta - s)\,d\zeta = mgl\left[-\frac{s}{4l} + \frac{s^2}{2l^2} - \frac{s^3}{4l^3}\right]\sin\varphi$$

und in bezug auf O

$$M_O = M_P + R_y s = -\frac{1}{2}mgl\left[\frac{s^2}{l^2} - \frac{s^3}{l^3}\right]\sin\varphi.$$

---

[1]) Vgl. Kap. 8, Ziff. 8 ds. Bd. des Handb.

Legt man den Schnitt in das Gelenk O ($s = 0$), so erhält man für den Gelenkdruck des festen Punktes die Komponenten

$$R_x = -mg[\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos\alpha],$$
$$R_y = \frac{1}{2} mg\sin\varphi,$$
$$M_O = 0.$$

r_y ist eine spezifische, R_x und R_y sind die absoluten Gelenkreaktionen.

13. Bestimmung der Gelenkdrücke von zwangläufigen Getrieben; dynamische Kräftepläne. Für die praktische Durchführung dieser Methoden zur Bestimmung der Gelenkdrücke sind einige Annahmen erforderlich, die eine vereinfachte Behandlung ermöglichen. Die wichtigste dieser Annahmen besteht darin, das Problem als ein ebenes aufzufassen[1]; es wird also davon abgesehen, daß die einzelnen Getriebeglieder in Wirklichkeit nebeneinander liegen müssen, um eine umlaufende Bewegung zu ermöglichen. Die erwähnte Annahme kommt darauf hinaus, daß für jeden Gelenkdruck nur zwei Unbekannte eingeführt werden müssen an Stelle der fünf ($= 6 - 1$), die notwendig wären, wenn es sich um eine räumliche Drehzapfenverbindung handeln würde. Ferner nehmen wir an, daß die eingeprägten Kräfte (z. B. als Triebkraft P und Widerstand W) nur an den Gelenken angreifen, genauer gesagt, an einem der beiden durch das Gelenk verbundenen Körper (oder an einer „Seite" des Gelenks), während auf den anderen nur der Gelenkdruck wirkt. Reibungen bleiben außer Betracht. Von Beispielen werden hier nur das Schubkurbelgetriebe und das Kurbelviereck herangezogen; aus diesem lassen sich die meisten anderen Getriebe (auch das Schubkurbelgetriebe selbst) ableiten. Die Getriebe werden durch Festhalten eines Gliedes („Steg") mit der festen Ebene so in Verbindung gebracht, daß nur die Zwanglaufkoordinate (φ) frei bleibt.

Durch irgendein rechnerisches oder zeichnerisches Verfahren (worüber in Abschnitt VII noch Näheres folgt) wird also zunächst die Bewegung der Kette selbst ermittelt, also $\varphi = \varphi(t)$, so daß der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der Kette in jeder Stellung als bekannt angesehen werden kann (bezüglich der Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne der Körperketten s. Kap. 5 ds. Bandes). Jedes Glied wird durch Einführung der Gelenkdrücke (durch Anbringung von Gelenkschnitten) von seinen Nachbargliedern losgelöst, und an jedem Gliede

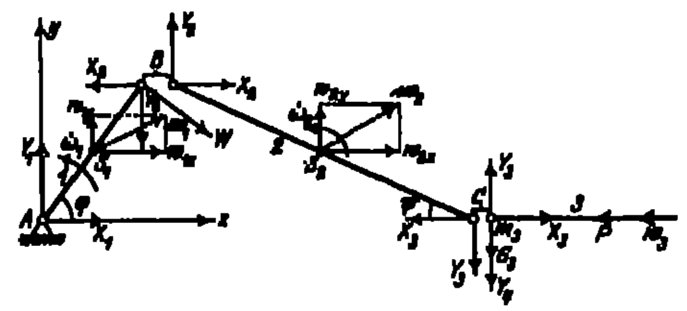


Abb. 12. Zeichnerische Ermittlung der Gelenkdrücke des Schubkurbelgetriebes.

werden außer diesen Gelenkdrücken die eingeprägten und die Trägheitskräfte angebracht. Das d'Alembertsche Prinzip besagt sodann, daß die so ergänzten Kräftegruppen für jedes Glied im Gleichgewichte stehen, also drei (bzw. bei Abwesenheit von Drehungen zwei) Bedingungen genügen. Diese Gleichungen reichen jedesmal zur Bestimmung der Gelenkdrücke aus: beim Schubkurbelgetriebe (Abb. 12) hat man drei Gelenke A, B, C und eine Geradführung, also

[1]) Bezüglich der Auffassung des Schubkurbelgetriebes als räumliches System siehe M. Hirth, Die spezifischen Schaltreaktionen des Schubkurbelgetriebes, behandelt nach dem Verfahren von Lagrange. Dissert. Jena 1915.

$3 \cdot 2 + 1 = 7$ unbekannte Reaktionen und zusammen $2 \cdot 3 + 2 = 8$ Gleichungen, unter denen die Bewegungsgleichung selbst enthalten ist, so daß gerade sieben Gleichungen zur Verfügung bleiben. Beim Kurbelviereck mit einem festgehaltenen Gliede hat man ebenso $4 \cdot 2 = 8$ unbekannte Teile der vier Gelenkdrücke und $3 \cdot 3 = 9$ Gleichungen zur Bestimmung der Bewegung und jener acht Unbekannten.

a) Der rechnerische Ansatz geht unmittelbar von den Bewegungsgleichungen in gewöhnlichen Koordinaten aus, die für das Schubkurbelgetriebe nach Abb. 12 so lauten ($p_1 = BS_2$, $p_2 = S_2C$):

$$\text{Glied 1:} \begin{cases} X_1 - X_2 - m_1 w_{1x} = 0, \\ Y_1 - Y_2 - m_1 w_{1y} = 0, \\ X_2 r \sin\varphi - Y_2 r \cos\varphi - m_1 (k_1^2 + s^2)\ddot{\varphi} = 0; \end{cases}$$

$$\text{Glied 2:} \begin{cases} X_2 - X_3 - m_2 w_{2x} = 0, \\ Y_2 - Y_3 - m_2 w_{2y} = 0, \\ (X_2 p_1 + X_3 p_2)\sin\psi + (Y_2 p_1 + Y_3 p_2)\cos\psi - m_2 k_2^2 \ddot{\psi} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Glied 3:} \begin{cases} X_3 = P - m_3 w_3, \\ Y_3 = G_3 + Y_4. \end{cases}$$

Zufolge der geometrischen Gleichungen sind $w_{1x}, w_{1y}, w_{2x}, w_{2y}, w_3$ und $\ddot{\psi}$ durch φ und dessen Ableitungen ausdrückbar, diese Größen also für jeden Wert der Zeit bekannt. Durch Auflösung dieser acht Gleichungen folgen außer der Bewegungsgleichung noch die sieben Unbekannten $X_1, Y_1, X_2, Y_2; X_3, Y_3; Y_4$.

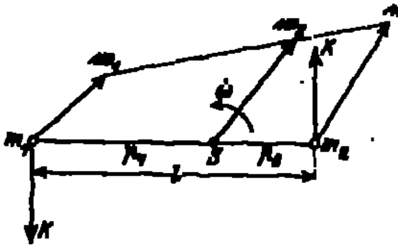


Abb. 13. Ersatz der Trägheitskräfte für den stabförmigen Körper.

b) Übersichtlicher ist das zeichnerische Verfahren, das für die bei der Bewegung auftretenden Kräftegruppen die aus der Theorie der Kräftepläne bekannten Darstellungsweisen verwertet[1]). Dabei ist es vor allem notwendig, die Trägheitskräfte der einzelnen Scheiben geeignet einzuführen, was (nach Wittenbauer) durch Anbringung von Ersatzmassen (oder Ersatzpunkten) geschieht. Da die Glieder eines Getriebes (einer Körperkette) meist aus Stangen bestehen, deren Enden Gelenke (zylindrische Zapfen und Lager) tragen, so werden die Ersatzmassen passend in die Gelenke gelegt, wobei ihre Größen durch statische Zerlegung der Stangenmasse gefunden werden (Abb. 13):

$$m_1 = m\frac{p_2}{l}, \qquad m_2 = m\frac{p_1}{l}. \quad (2)$$

Sind nun $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ die Beschleunigungen von B, C, so wird[2]) die Beschleunigung $\mathfrak{w}_s$ des Schwerpunktes S durch ähnliche Teilung der zwischen den Endpunkten von $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ gelegenen Strecke gefunden (Satz von Burmester). Es ist also

$$\mathfrak{w}_s = \frac{p_2}{l}\mathfrak{w}_1 + \frac{p_1}{l}\mathfrak{w}_2 \quad (3)$$

oder

$$m\mathfrak{w}_s = m_1\mathfrak{w}_1 + m_2\mathfrak{w}_2, \quad (4)$$

[1]) Siehe K. Heun, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 56, S. 38. 1908; F. Wittenbauer, ebenda Bd. 50, S. 57. 1904; Bd. 53, S. 274. 1906; Graphische Dynamik. Berlin: Julius Springer 1923; ferner H. Meuth, Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes. Dissert. Karlsruhe 1905.

[2]) Siehe Kap. 5, Ziff. 12 ds. Bd. des Handb.

d. h. die Massenkräfte von m_1, m_2 ersetzen die Massenkraft der in S vereinigten Stangenmasse vollständig. Die Momente der Massenkräfte von m_1, m_2 um S würden wegen $p_1 + p_2 = l$ weiterhin ergeben

$$(m_1 p_1^2 + m_2 p_2^2)\,\dot{\omega} = m\,p_1\,p_2\,\dot{\omega}\,.$$

Da das Moment der Massenkräfte für eine ebene Scheibe jedoch $m k^2 \dot{\omega}$ beträgt, so hat man außer diesem Momente der Ersatzmassen noch ein zusätzliches Moment von der Größe $m(k^2 - p_1 p_2)\dot{\omega}$ im Sinn von $\dot{\omega}$ hinzuzufügen, oder zu dem Moment der von m_1, m_2 herrührenden Trägheitskräfte noch ein Moment von der Größe $m(p_1 p_2 - k^2)\dot{\omega}$ im Sinn von $\dot{\omega}$, um das Moment $-m k^2 \dot{\omega}$ der Trägheitskräfte

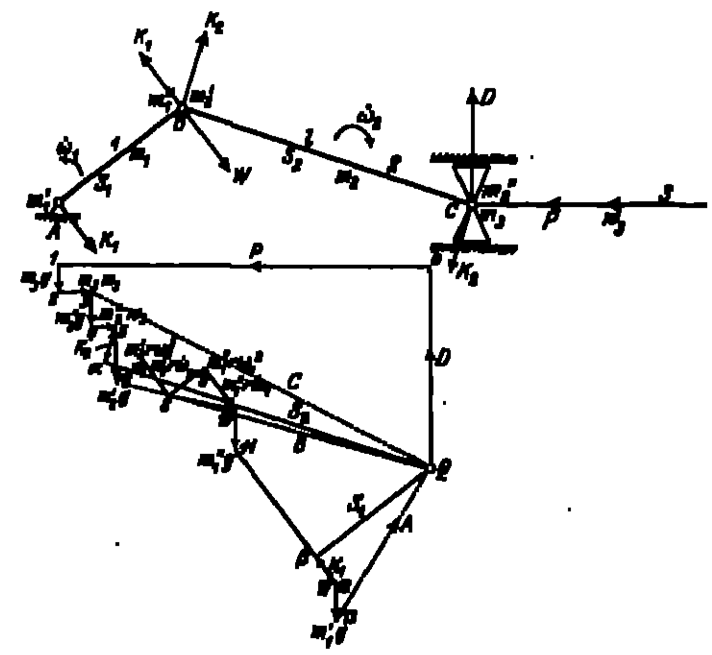


Abb. 14. Dynamischer Kräfteplan des Schubkurbelgetriebes.

der ganzen Scheibe um S zu erhalten. Dieses Moment wird nun für jede Scheibe durch zwei Kräfte K, K ersetzt, so daß

$$K l = m(p_1 p_2 - k^2)\,\dot{\omega}\,. \tag{5}$$

In Abb. 14 ist der dynamische Kräfteplan für das Schubkurbelgetriebe gezeichnet; die eingeprägten Kräfte sind die Triebkraft P an der Kolbenstange 3, der Widerstand W in H an der Kurbel 1; außerdem sind die Eigengewichte der Ersatzmassen berücksichtigt. Ausgehend vom Punkte 0 sind in 0—1—2—···—13 nacheinander die Kräfte aufgetragen P, $m_3 g$, $-m_3 w_3$, $m_2'' g$, $-m_2'' w_3$, $m_2' g$, $-m_2' r \omega_1^2$, $-m_2' r \dot{\omega}_1$, $-m_1'' r \omega_1^2$, $-m_1'' r \dot{\omega}_1$, $m_1'' g$, W, $m_1' g$. Ferner ist $\overline{5\alpha} = K_2$. Zieht man durch α eine Parallele zur Schubstange l und bringt diese zum Schnitt mit der Lotrechten durch O, das ist des Führungsdruckes $D (= -Y_4$ in Abb. 13), so ist Q der Pol des Kräfteplans, und es ist $\overline{Q0} = D$, $\overline{Q\alpha} = S_2$. Das geschlossene Krafteck $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \alpha, Q, 0)$ drückt das dynamische Gleichgewicht der Scheibe 3 (Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben) aus, $\overline{Q3}$ gibt den Gelenkdruck C, da im Punkte C die Kräfte Q—0—1—2—3 an der Scheibe 3 mit den Kräften 3—4—5—α—Q an der Scheibe 2 im Gleichgewichte stehen. Ebenso

ist $\overline{Q8}$ der Gelenkdruck B, $\overline{Q13}$ der Gelenkdruck A und, wenn $\overline{12\beta} = K_1$, so ist $\overline{Q\beta} = S_1$ die Kraft in der Kurbel 1.

Ganz ebenso ist in Abb. 15 der dynamische Kräfteplan des Kurbelvierecks unter den eingeprägten Kräften P, W angegeben (ohne Berücksichtigung des Eigengewichts). Die Teile $-m r \omega^2$, $-m r \dot{\omega}$ sind hier für jeden Ersatzpunkt zu den bezüglichen Trägheitskräften T_B, T_C zusammengesetzt; jede von ihnen besteht aus zwei Teilen, die von den Massen m_1'', m_2' in B und m_2'', m_3' in C herrühren. Der Kräftezug 0—1—2—3—4 enthält nacheinander die Kräfte P, T_B, T_C, W, ferner ist $\overline{0\alpha} = K_1$, $\overline{2\beta} = K_2$, $\overline{4\gamma} = K_3$ gemacht worden. Sodann sind $\overline{Q\alpha}$, $\overline{Q\beta}$, $\overline{Q\gamma}$ die Stangenkräfte (parallel zu den Stäben 1, 2, 3) und $\overline{Q0} = A$, $\overline{Qb} = B$, $\overline{Qc} = C$, $\overline{Q4} = D$ die Gelenkdrücke in A, B, C, D.

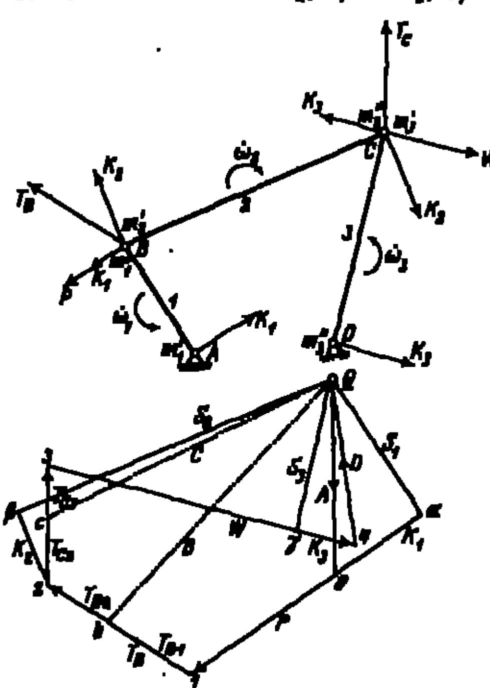


Abb. 15. Dynamischer Kräfteplan des Kurbelvierecks.

14. Bestimmung der Stabspannungen. Durch das oben dargelegte Schnittverfahren ist die Frage nach der Bestimmung der Spannung an jeder Stelle eines bewegten Getriebes grundsätzlich gelöst. Bezüglich der wirklichen Ausführung nach der in Ziff. 13 an der Hand von Beispielen für Körperketten mit stabförmigen Gliedern erläuterten Methode ist jedoch zu beachten, daß die mit Hilfe der Ersatzmassen in den Gelenken erhaltenen Stabspannungen nicht deren tatsächlich auftretende Größen sein können; es müssen vielmehr die Stabspannungen wegen der verteilten Massen der Stäbe von einem Ende zum anderen veränderlich sein, weil doch (was in der Schnittmethode exakt zum Ausdruck kommt) auch die Trägheitskräfte in Wirklichkeit über die Stange hin verteilt sind.

Durch eine einfache Umordnung des Kräfteplans, die ebenfalls von Wittenbauer herrührt, können jedoch (bei stabförmigen Gliedern) die Werte der Stangenkräfte in den Gelenken unmittelbar angegeben werden; diese Umordnung läuft darauf hinaus, daß die auf ein Glied wirkenden Trägheitskräfte T im Kräfteplan aufeinanderfolgend angeordnet werden. Für das Kurbelviereck ist diese Umordnung in Abb. 16 ausgeführt. Die Werte der Spannungen in den Gelenken sind mit den Zeigern des betreffenden Gliedes und des betreffenden Knotenpunktes versehen; so gibt z. B. S_{1B} den Wert von S_1 in B, und dies ist jene Komponente von B, die in die Stangenrichtung von 1 fällt, weil am Ende B tatsächlich noch keine Trägheitskräfte des stangenförmigen Gliedes 2 hinzutreten. Bis zum anderen Endpunkte kommen die Trägheitskräfte T_{B2}, T_{C2} dazu, und die Projektion des Endpunktes gibt jetzt S_{2C}, gleich der Projektion von C auf die Richtung der Kurbel 1. Ebenso erhält man auch die Endwerte der senkrecht zur Stabrichtung liegenden Werte der Stangenkräfte, der „dynamischen Querkräfte", in

den bezüglichen zu den Stangenrichtungen senkrechten Komponenten. Da sich die Trägheitskräfte linear mit dem Abstande von den Gelenken verändern, so wird der Verlauf der Stangenkräfte (und zwar der Normal- und der Querkräfte) durch Parabeln gegeben sein.

Zur Verdeutlichung sei auf das Beispiel des Stabpendels verwiesen, das in Abb. 11 behandelt wurde, in dem die Stangenkräfte durch die Reaktionen R_x, R_y gegeben sind. Überdies ist noch in Abb. 17 der dynamische Kräfteplan für

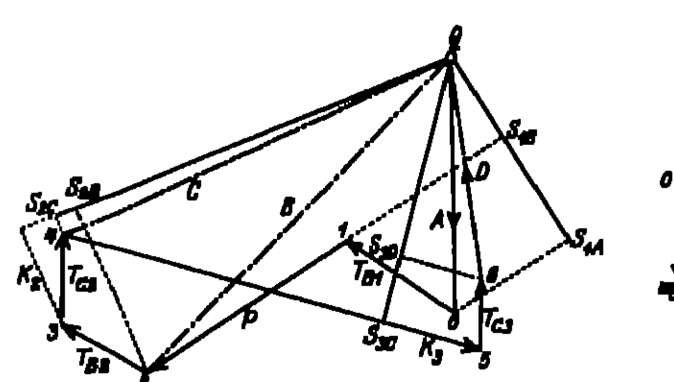


Abb. 16. Ermittlung der Stabspannungen beim Kurbeltrieb.

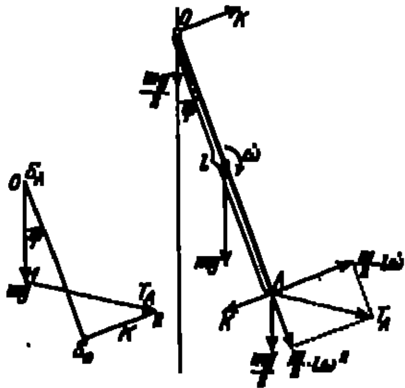


Abb. 17. Dynamischer Kräfteplan des Stabpendels.

diesen Fall eingezeichnet, wobei die Werte der Stangenkräfte (normal und quer) im freien Endpunkt A verschwinden und im Gelenke O gleich R_x und $R_y - \frac{1}{2} mg \sin\varphi$ sind.

Eine in der Ausführung von dieser verschiedene Methode zur Bestimmung der Gelenkdrücke hat ALT[1]) angegeben.

15. Beanspruchung durch Schwingungen[2]). Die Gelenkdrücke und Stabkräfte, für jeden Zeitpunkt der Bewegung nach den im vorhergehenden entwickelten Methoden bestimmt, würden, einmalig und dauernd auftretend, an den Lagern und Ständern nur die „statischen" Durchbiegungen z_{stat} hervorrufen, die praktisch immer sehr klein ausfallen. Durch periodische Wiederholungen im Rhythmus der Drehung der Maschine können jedoch die Durchbiegungen wesentlich verstärkt werden, und zwar insbesondere dann, wenn die Drehzahl der Maschine mit der Eigenschwingungszahl (oder einer der Eigenschwingungszahlen) eines Maschinenteils oder des Ständers in Resonanz tritt; in diesen Fällen können die auftretenden „dynamischen" Durchbiegungen z_{dyn} das 25 fache (und mehr) der statischen betragen, womit eine in gleichem Maße erhöhte Beanspruchung Hand in Hand geht. In diesem Zustand bleibt übrigens die Drehzahl des Motors auch bei weiterer Energiezuführung konstant, die demnach nicht zur weiteren Beschleunigung der Motormassen, sondern zur Aufrechterhaltung und weiteren Anfachung der entstandenen Schwingungen verwendet wird. Es kommt daher in allen Fällen darauf an, die Eigenschwingungszahlen zu bestimmen und sie mit der Betriebsdrehzahl der Maschine zu vergleichen, sowie die durch das Zusammenwirken der betreffenden Maschinenteile auftretenden kritischen Geschwindigkeiten zu ermitteln.

---

[1]) H. ALT, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 6, S. 58. 1926.
[2]) Über die elastizitätstheoretischen Grundlagen der folgenden Darlegungen vgl. Bd. VI ds. Handb.

a) Drehschwingungen von Wellen[1]). Von den Maschinenteilen, welche Schwingungserscheinungen dieser Art aufweisen, sind vor allem die Wellen zu nennen, und zwar insbesondere bei größerer Länge, wie sie bei Schiffsmaschinen auftreten; die Wellen tragen dann auf der einen Seite die hin und her gehenden oder drehenden Massen der Maschine, auf der anderen die Schraube (Propeller). Die Erscheinungen, die dabei auftreten, sind zuerst von Frahm, Gümbel und Lorenz untersucht worden. Gelegentlich sind jedoch ähnliche Erscheinungen auch bei kürzeren Wellen stationärer Maschinen beobachtet worden.

Für eine einzige, am Ende einer masselos gedachten Welle von der Länge l aufgesetzte Schwungmasse mit dem Trägheitsmoment J läßt sich die Eigen-

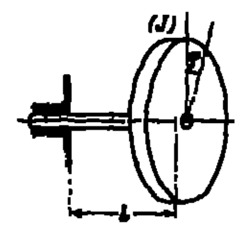


Abb. 18. Eigenschwingung einer Scheibe am Ende einer Welle.

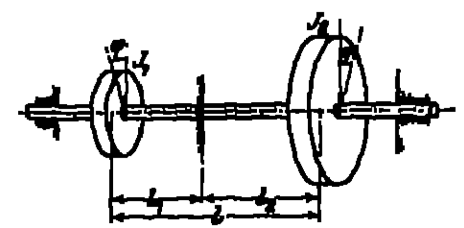


Abb. 19. Zwei Scheiben auf einer Welle.

schwingungsdauer unmittelbar aus der dynamischen Grundgleichung ableiten, die (nach Abb. 18) so lautet

$$J\ddot{\varphi} = -\frac{GJ_p}{l}\varphi,$$

worin J_p das (geometrische) polare Trägheitsmoment des Querschnittes der Welle und G die Schubzahl (den Schubmodul) bedeutet; die gesuchte Eigenschwingungsdauer ist

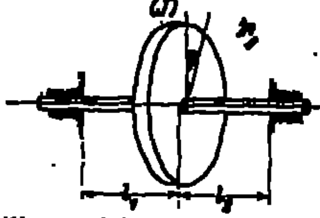


Abb. 20. Scheibe zwischen zwei festen Einspannstellen.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{lJ}{GJ_p}} \tag{1}$$

oder die Kreisfrequenz (Anzahl der Schwingungen in 2π Sekunden)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GJ_p}{lJ}}. \tag{2}$$

Für zwei Scheiben (J_1, J_2) auf einer Welle (Abb. 19) beachte man, daß der durch die Gleichung $l_1J_1 = l_2J_2$ bestimmte Querschnitt bei auftretenden Schwingungen in Ruhe bleiben muß (abgesehen von einer Drehung beider Scheiben und der Welle als starrer Körper); da $l_1 + l_2 = l$ ist, so folgt für die Kreisfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_p}{l_1J_1}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{l_2J_2}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{l}\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)}. \tag{3}$$

Ähnlich würde die Differentialgleichung einer Schwungmasse zwischen zwei festen Einspannstellen nach Abb. 20 lauten

$$J\ddot{\varphi} = -GJ_p\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\varphi$$

[1]) Über diesen Gegenstand s. insbes. H. Holzer, Die Berechnung von Drehschwingungen. Berlin: Julius Springer 1921; H. Wydler, Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen. Ebenda 1922; und die in diesen Werken enthaltenen ausführlichen Literaturnachweise; insbes. vgl. auch A. Sommerfeld, Phys. ZS. Bd. 3, S. 266, 268. 1902, L. Gümbel, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 66, S. 252. 1922 u. a.

und daher die Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_p}{J}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)}. \tag{4}$$

Für n Scheiben auf einer Welle erhält man $n - 1$ Eigenschwingungen, die entweder durch Rechnung oder durch Zeichnung gefunden werden können.

Da die strenge Lösung der Gleichungen für die Eigenschwingungszahlen von Wellen mit mehr als drei Schwungmassen auf sehr verwickelte Ausdrücke führt, die für die praktische Auswertung nicht mehr verwendbar sind, wurden insbesondere von Föppl, Geiger, Gümbel, Holzer, Wydler u. a. Näherungsverfahren angegeben, die den Bedürfnissen der Praxis angepaßt sind und ohne allzu umfangreiche Rechnungen die gewünschte Eigenschwingungszahl mit ausreichender Genauigkeit liefern sollen.

Föppl[1]) zerlegt die „reduzierten Schwungmassen und Knotenabstände" so, daß die dadurch gebildeten Systeme alle mit gleicher Schwingungszahl schwingen,

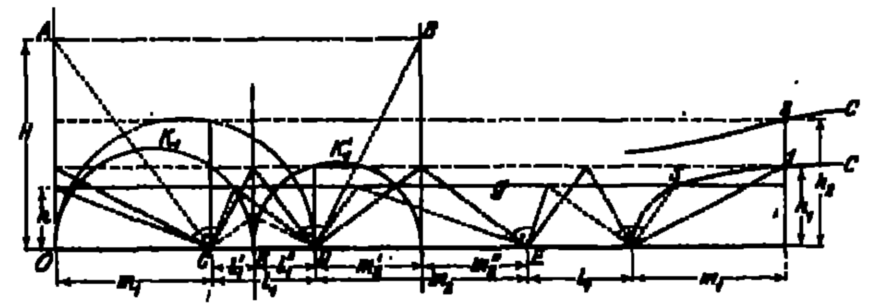


Abb. 21. Zeichnerische Ermittlung der Eigenschwingungszahlen von Wellen mit mehreren Scheiben.

und gibt für die Auflösung der bestehenden drei Gleichungsgruppen ein rechnerisches Näherungsverfahren an.

Nach Gleichung (1) ist die Bedingung dafür, daß alle Massen mit den gleichen Schwingungsdauer schwingen, die der Gleichheit der Produkte aus den reduzierten Massen (oder dem Trägheitsmomente) mit den Längen (Abb. 21)

$$m_1 l_1' = l_1'' m_2' = m_2'' l_2' = \cdots = l_{n-1}'' m_n = h^2, \tag{5}$$

wobei gemäß der Gleichung (1)

$$h = \sqrt{ml} = \frac{\sqrt{GJ_p}}{2\pi r}\,T \tag{6}$$

ist und r den „Reduktionshalbmesser", J_p das polare Trägheitsmoment der Welle und G die Schubzahl bedeutet.

Ferner müssen dabei die Bedingungen erfüllt sein

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= m_2' + m_2'', & m_3 &= m_3' + m_3'', \ \ldots, & m_{n-1} &= m_{n-1}' + m_{n-1}'', \\ l_1 &= l_1' + l_1'', & l_2 &= l_2' + l_2'', \ \ldots, & l_{n-1} &= l_{n-1}' + l_{n-1}''. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Durch Verwertung dieser Gleichungen hat Kohn[2]) das folgende einfache zeichnerische Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenschwingungszahlen angegeben.

Trägt man (Abb. 21) m_1, l_1, m_2, l_2 usw. fortlaufend in beliebigen Maßstäben für die Massen und Längen auf, so kann h als die gemeinsame Höhe in den recht-

[1]) O. Föppl, ZS. f. angew. Math. u. Phys. Bd. 1, S. 367. 1921 und Maschinenbau, Bd. 1, S. 20. 1922.

[2]) P. Kohn, Maschinenbau Jg. 5, S. 220, 1926.

winkligen Dreiecken mit den Hypothenusenabschnitten m_1, l_1', l_1'', m_2' usf. angesehen werden.

Die den Gleichungen (5) bis (7) entsprechenden $n - 1$ Wurzeln für k^2 findet man nach Abb. 21, indem man zunächst eine Wagrechte g willkürlich wählt, den punktierten Linienzug mit rechten Winkeln in $C, D, E \ldots$ zeichnet und den Ort der Schnittpunkte S der letzten Dreiecksseite mit der gewählten Wagrechten markiert; die Schnittpunkte $1, 2, \ldots$ der so entstandenen Kurve C mit der Senkrechten durch den Endpunkt der Strecke, die der letzten Masse entspricht, bestimmen auf dieser Senkrechten die Strecken $h_1, h_2 \ldots$, die nach Gleichung (1) und (6) unmittelbar den gesuchten Eigenschwingungsdauern proportional sind. Ist μ der Maßstab der reduzierten Massen, λ der der Längen und h_g die gemessene Länge, so ist

$$h = \sqrt{\mu \lambda} \cdot h_g. \tag{8}$$

Für symmetrische Anordnungen der Massen und Längen lassen sich die Wurzeln der Gleichungsgruppen (5) bzw. (7) zeichnerisch unmittelbar angeben. Abb. 21 zeigt dies für drei symmetrisch angeordnete Massen $m_1, m_2, m_3 = m_1$, $l_1 = l_2$. Schwingen die beiden äußeren Massen gegen die mittlere, so verläuft die Schwingung so, als ob diese gleich ∞ wäre, und man erhält h_2 als Höhe in einem rechtwinkligen Dreiecke mit der Hypothenuse $m_1 + l_1$ und den Hypothenusenabschnitten m_1 und l_1. Die zweite Wurzel h_1 erhält man als die gemeinsame Höhe zweier rechtwinkliger Dreiecke mit der Hypothenusensumme $m_1 + l_1 + m_2/2$ und den Gegenpunkten der Hypothenusen in C und D. Um die gesuchte Höhe h_1 dieser Dreiecke zu erhalten, zieht man in beliebigem Abstande H eine Parallele zur Wagrechten, verbindet die Schnittpunkte A und B mit C und D und errichtet auf diese Verbindungslinien die Senkrechten; fällt man durch deren Schnittpunkt eine Lotrechte, und legt durch ihren Schnittpunkt R zwei Kreise K_1 und K_2, so schneiden die Lote durch C und D in beiden die gesuchte Höhe h_1 ab.

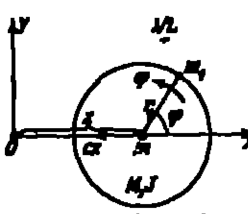


Abb. 22. Modell zur Erklärung der Fundamentschwingungen.

b) Fundamentschwingungen. Zur Erforschung der durch das Zusammenwirken einer Maschine und ihres elastisch gebetteten Fundamentes erzeugten Schwingungen hat RADAKOVIC[1]) im Anschluß an die von SOMMERFELD herrührenden Anregungen das folgende einfache Modell untersucht (Abb. 22): Eine Masse m (Fundament) sei mit einem festen Punkte O (feste Erde) elastisch verbunden, so daß sie in jeder Lage x mit einer Kraft $-cx$ zu O hingezogen wird. Mit m ist eine Kreisscheibe von der Masse M und dem Trägheitsmomente J verbunden, und fest auf dieser sitzt eine exzentrische Punktmasse m_1, welche beim Umlauf die durch die hin und her gehenden Massen der Maschine verursachten Störungen darstellen soll. Das System hat zwei Freiheitsgrade x und φ, seine lebendige Kraft ist

$$T = \tfrac{1}{2}(m + M + m_1)\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}(J + m_1 r_1^2)\dot{\varphi}^2 - m_1 r_1 \sin\varphi \cdot \dot{x}\dot{\varphi}.$$

Auf die Koordinate x wirke außer der elastischen Kraft $-cx$ noch ein Widerstand $-k\dot{x}$, so daß

$$X = -cx - k\dot{x}$$

ist, während die auf φ wirkenden Momente in der Form $\Phi = D - D_1$ dargestellt

[1]) M. RADAKOVIC, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 48, S. 28. 1900; eine ähnliche Anordnung ist von W. HORT, Techn. Schwingungslehre 2. Aufl., S. 186. Berlin: Julius Springer 1922 gewählt worden.

werden, wobei D das Drehmoment der zugeführten Triebkraft, D_1 das der Widerstände bedeutet. Mithin lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$(m + M + m_1)\ddot{x} - m_1 r_1 \sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} - m_1 r_1 \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = -cx - k\dot{x},$$
$$(J + m_1 r_1^2)\ddot{\varphi} - m_1 r_1 \sin\varphi \cdot \ddot{x} = D - D_1.$$

Für eine konstante Drehgeschwindigkeit ω der Scheibe ergibt sich demnach $\varphi = \omega t$, $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = 0$, und diese Gleichungen werden:

$$(m + M + m_1)\ddot{x} - m_1 r_1 \omega^2 \cos\omega t = -cx - k\dot{x},$$
$$- m_1 r_1 \sin\varphi \cdot \ddot{x} = D - D_1.$$

Mit den Bezeichnungen

$$\frac{c}{m + M + m_1} = n^2, \qquad \frac{k}{m + M + m_1} = 2\lambda, \qquad \frac{m_1 r_1 \omega^2}{m + M + m_1} = R$$

erhält die erste Gleichung die Form

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + n^2 x = R\cos\omega t$$

und stellt die Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung[1]) dar, deren Lösung (außer der hinzutretenden freien Schwingung) lautet

$$x = A\cos(\omega t - \alpha),$$

worin

$$A = \frac{R}{\sqrt{(n^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\lambda\omega}{n^2 - \omega^2}.$$

Führt man nunmehr die Größen

$$E = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} D\,d\varphi, \qquad E_1 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_1\,d\varphi$$

ein, die die Mittelwerte der in der Zeiteinheit dem Motor zugeführten und entnommenen Energien (also die „Leistungen") darstellen, so erhält man aus der zweiten der Bewegungsgleichungen durch Multiplikation mit $\omega\,d\varphi/2\pi$ und Integration von 0 bis 2π

Abb. 23. Verlauf der Energie bei Fundamentschwingungen.

$$E = E_1 + \frac{m_1 r_1 \omega^2 A}{2}\sin\alpha,$$

oder nach Einführung der Werte von A und $\sin\alpha$

$$E = E_1 + \frac{m_1^2 r_1^2 \lambda}{m + M + m_1} \cdot \frac{\omega^4}{(n^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} = E_1 + a \cdot f(\omega).$$

Bei fehlender Fundamentbewegung wäre $E = E_1$; das zusätzliche Glied gibt die zur Aufrechterhaltung der Fundamentschwingungen notwendige Energie an. Für $m_1 = 0$ (keine exzentrische Masse) und $\lambda = 0$ (keine Dämpfung) wäre in der Tat $E = E_1$, es würde also die ganze zugeführte Energie gleich der dem Motor an der Welle entnommenen sein; in allen anderen Fällen ist stets $E > E_1$. Der Verlauf der Funktion $f(\omega)$ ist aus Abb. 23 zu ersehen. Durch Differentiation zeigt sich, daß die Gleichung $f'(\omega) = 0$ für $\lambda < \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,n = 0{,}26\,n$ im Gebiete $n < \omega < \sqrt{3}\,n$ zwei reelle Wurzeln hat. Damit kann dann auch der Verlauf von $\frac{1}{a}E = \frac{1}{a}E(\omega)$ konstruiert werden, sobald $\frac{1}{a}E_1 = \frac{1}{a}E_1(\omega)$ gegeben ist.

[1]) Vgl. Kap. 7, Ziff. 11 ds. Bd. des Handb.

Nimmt man hierfür eine zunehmende Funktion an (was im allgemeinen zutreffen wird), so ist der charakteristische Knick in $f(\omega)$ auch in $E_1(\omega)$ erkennbar. Kurven dieser Art sind tatsächlich beobachtet worden. Für das Verhältnis der Durchbiegungen erhält man (wenn für die dynamische die Amplitude genommen wird)

$$\frac{x_{dyn}}{x_{stat}} = \frac{A}{m_1 r_1 \omega^2/c} = \frac{c}{m + M + m_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\varkappa^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}},$$

und dieses Verhältnis nimmt für $\omega = \sqrt{\varkappa^2 - 2\lambda^2}$ seinen größten Wert an.

Eine neuere Untersuchung der Fundamentschwingungen rührt von SCHMIDT her[1]).

Bezüglich der Geräte zur messenden Untersuchung von Fundamentschwingungen u. a. sei auf Abschnitt XI dieses Kapitels verwiesen.

III. Massenausgleich und Schwungradberechnung.

16. Vorbemerkungen. Die hier behandelten Probleme beziehen sich ihrem Wesen nach auf die Kolbenmaschinen und haben ihren Ursprung einerseits in der Beschaffenheit des Kraftfeldes, das im allgemeinen längs des Kolbenweges (bei Dampfmaschinen nach wärmetechnischen Gesichtspunkten) veränderlich angenommen wird; andererseits in der besonderen Art und Weise, wie bei solchen Maschinen die Übertragung der Energie vom Kolben auf die Welle (bei Pumpen umgekehrt) erfolgt. Für Turbomaschinen, die im wesentlichen nur drehende Teile enthalten, haben diese Fragen in der hier behandelten Form keine Bedeutung.

Bei Kolbenmaschinen wird die Übertragung der Energie durch das Schubkurbelgetriebe (oder ähnliche Mechanismen) vermittelt, dessen hin und her gehende Teile bei der Bewegung in periodischer Folge beschleunigt und verzögert werden müssen; damit ist das Auftreten von Beschleunigungskräften verbunden, deren Gegenwart am Fundamente der Maschinen und weiter an den Gebäuden oder Fahrzeugen (Lokomotiven, Automobilen, Schiffen, Flugzeugen), in welche die Maschine eingebaut ist, merklich wird.

Das Problem des Massenausgleichs besteht dann darin, die bewegten Teile der Maschine derart anzuordnen, daß der Einfluß dieser Beschleunigungskräfte über die Lager auf das Fundament entweder ganz verschwindet oder soweit als möglich herabgesetzt wird. Es ist klar, daß für Einzylindermaschinen ein solcher Ausgleich nur durch Hinzufügen von Gegenmassen möglich ist, die sonst überflüssig wären, und nur eine Vermehrung des Gewichtes und der Anlage- und Betriebskosten verursachen. Das Problem ist daher so zu verstehen, die Herabsetzung des Einflusses der Beschleunigungskräfte durch zweckmäßige Anordnung der Getriebeteile selbst herbeizuführen; das naturgemäße Hilfsmittel hierfür besteht in der Verwendung von Mehrzylindermaschinen, also von Maschinen mit mehreren Getrieben. Werden die Zylinder gleich groß ausgeführt, wie bei Auto- und Flugmotoren, so kann der Massenausgleich (angenähert) durch symmetrische Kurbelanordnung erreicht werden, die gleichzeitig auch die notwendige dynamische Symmetrie besitzt. Bei großen Maschinen, wo aus Gründen der Wärmeausnutzung verschieden große Zylinder und Getriebe verwendet werden (wie z. B. bei Schiffsmaschinen) wird der Ausgleich dadurch herbeigeführt,

---

[1]) E. SCHMIDT, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 3, S. 161. 1923; Vgl. auch D. THOMA, Maschinenbau Bd. 3, S. 52. 1923.

daß die Kurbelwinkel der einzelnen Getriebe gegeneinander und die Entfernungen der Zylindermittel voneinander den Ausgleichsbedingungen gemäß festgelegt wurden, die die notwendige dynamische Symmetrie gewährleisteten.

Die **Schwungradberechnung** kommt darauf hinaus, die Ungleichförmigkeit im Gang der Maschine, die eine Folge der Ungleichförmigkeit des Kraftfeldes und des Einflusses der hin und her bewegten Massen ist, durch Hinzufügung drehender Massen (Schwungräder) soweit herabzudrücken, daß die Schwankungen unter eine bestimmte Grenze fallen, die durch besondere Betriebsbedingungen vorgeschrieben ist.

17. Ausgleich bei Maschinen mit Kurbelgetrieben[1]). Die Masse eines einzelnen starren Körpers wird bezüglich einer Achse als **ausgeglichen** bezeichnet, wenn diese Achse für den Körper eine „freie Drehachse", also eine Hauptträgheitsachse durch den Schwerpunkt ist. So gilt z. B. die Welle eines Vier- bzw. Sechszylindermotors mit gleichen Getrieben für sich allein als ausgeglichen, wenn ihre Kurbeln, die in Abb. 24 und 25 schematisch gegebene Anordnung zeigen. Den technischen Arbeitsvorgang, der diesen Sachverhalt herbeiführen soll, nennt man das **Auswuchten**[2]) rotierender Massen.

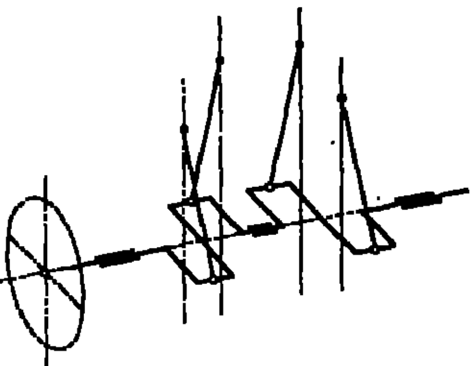


Abb. 24. Kurbelwelle der Vierzylindermaschine.

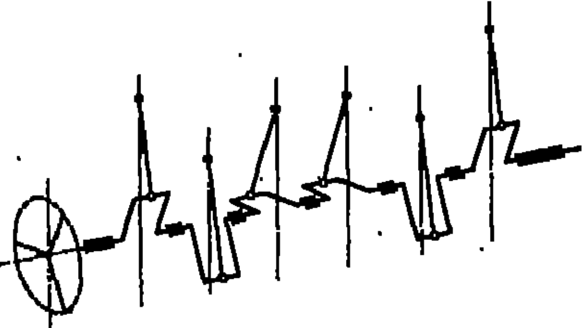


Abb. 25. Kurbelwelle der Sechszylindermaschine.

Das Auswuchten besteht aus einem statischen und einem dynamischen Vorgange. Für das statische Auswuchten sind in neuerer Zeit eigene **Schwerpunktswagen** gebaut worden; es hat den Zweck, den Massenmittelpunkt des umlaufenden Maschinenteils möglichst genau in die Drehachse zu bringen. Durch das dynamische Auswuchten soll die Drehachse zu einer Hauptträgheitsachse gemacht werden.

Für die Anwendungen in der Technik handelt es sich vor allem um den Ausgleich der an den Kurbeln zwangläufig angeschlossenen Getriebeteile: Schub-

[1]) Außer den gebräuchlichen Lehrbüchern s. insbes. H. Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffsmaschinen, Leipzig 1901; H. Schubert, Theorie des Schlickschen Massenausgleichs bei mehrkurbeligen Dampfmaschinen, Leipzig 1901.

[2]) Aus der reichhaltigen Literatur seien nur die folgenden Arbeiten genannt: P. Lawaczek, ZS. f. d. ges. Turbinenw. Bd. 8, S. 433. 1911; E. Heidebroek, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 60, S. 11, 32. 1916; H. Heymann, Diss. Darmstadt 1916; H. Hort, ZS. f. Feinmech. Bd. 30, S. 403. 1922; Kruppsche Monatsh. Bd. 3, S. 70, 1922; Bd. 5, S. 21. 1924; Elektrot. ZS. Bd. 46, S. 1073. 1925; Jahrb. d. Schiffbaut. Ges. Bd. 27, S. 158. 1926; V. Blaess, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 6, S. 429. 1926.

stange, Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben. Der Ausgleich eines solchen „veränderlichen Systems" verlangt die Erfüllung der folgenden Bedingungen, von denen die eben für den einzelnen starren Körper angegebenen einen Sonderfall darstellen: **die Summe der Projektionen der Impulse der bewegten Teile nach drei Richtungen des Raumes und die Summe ihrer Momente um irgend drei Achsen des Raumes müssen verschwinden.**

Für mehrkurbelige Schiffsmaschinen hat insbesondere SCHLICK praktisch brauchbare Anordnungen angegeben, die aus diesen Sätzen folgen, und die durch passende Wahl der Phasenverschiebungen der Kolben und der Entfernungen der Zylinder voneinander erzielt werden. Sein Verfahren ist als der „Schlicksche Massenausgleich" bekannt[1]).

Zur Darstellung der Impulse einer ebenen Scheibe, unter welchem Bilde die einzelnen Getriebeteile (vor allem die Schubstangen) eingeführt werden können, verwendet man auch hier je zwei Ersatzmassen, die ganz so wie in Ziff. 15 b definiert sind; sie ergeben sich einfach durch statische Zerlegung der Stangenmasse M (Abb. 26) in die Endpunkte A, B der Schubstange, die mit deren Schwerpunkt auf derselben Geraden liegen soll. Man erhält

$$m = \frac{a}{l} M, \qquad m' = \frac{b}{l} M. \tag{1}$$

Abb. 26. Ersatzmassen eines Stabes.

Der Impuls der Scheibenmasse wird durch die Impulse der beiden Punktmassen vollständig ersetzt, da die Geschwindigkeit von S durch die Gleichung bestimmt ist

$$\mathfrak{v}_S = \frac{b}{l} \mathfrak{v}_A + \frac{a}{l} \mathfrak{v}_B, \tag{2}$$

die durch Multiplikation mit M unmittelbar die folgende liefert:

$$M \mathfrak{v}_S = m' \mathfrak{v}_A + m \mathfrak{v}_B. \tag{3}$$

Diese Gleichung bestätigt die Gleichheit der Impulse.

Das Impulsmoment der Scheibe für eine senkrecht zu ihr liegende Achse wird durch das dieser beiden Punktmassen nicht ersetzt; es müßte vielmehr (ähnlich wie bei den Beschleunigungsdrücken in Ziff. 15 b) noch ein Moment von leicht angebbarer Größe hinzugefügt werden. Da aber für die folgenden Betrachtungen nur die Impulsmomente um Achsen, die zur Scheibe parallel sind, benutzt werden, so kann dieses zusätzliche Moment vollständig außer acht gelassen werden.

In dieser Weise werden die Massen M_i der Schubstangen der einzelnen Getriebe durch je zwei Punktmassen m_i, m_i' ersetzt. Die Massen m_i' werden in die Kurbelzapfen gelegt und dort mit der Wellenmasse vereinigt, ebenso werden die Massen der Kreuzköpfe, Kolbenstangen und Kolben mit der Ersatzmasse m_i der betreffenden Schubstange zusammengenommen; weiterhin wird für jede Kurbel diese vereinigte Masse mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet.

Zur Bildung der genannten Summen sind endlich noch die Ausdrücke für die Kolbengeschwindigkeiten notwendig. Nach Abb. 27 ist z. B. für das Getriebe 1 der Kolbenweg

$$x_1 = r_1(1 - \cos\varphi) + l_1(1 - \cos\psi), \tag{4}$$

und da $r_1 \sin\varphi = l_1 \sin\psi$, so folgt bis auf Glieder zweiter Ordnung in $r_1/l_1 = \varepsilon_1$

$$x_1 = r_1\left[1 + \frac{\varepsilon_1}{4} - \cos\varphi - \frac{\varepsilon_1}{4}\cos 2\varphi - \dots\right];$$

[1]) Vgl. O. SCHLICK, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 42, S. 907 u. 1313. 1898; Bd. 43, S. 234. 1899.

damit folgt für die Geschwindigkeit (mit derselben Annäherung)

$$v_1 = \dot{x}_1 = r_1\omega\left[\sin\varphi + \frac{\lambda_1}{2}\sin 2\varphi\right]. \tag{5}$$

Die Summe der Projektionen der Impulse nach der x- und y-Achse und ihrer Momente um diese Achsen liefert nun zunächst die Bedingung, daß die x-Achse für die um die Ersatzmassen m_i' (der Schubstangen in den Kurbelzapfen) ergänzte Wellenmasse der Maschine für sich ausgeglichen, d. h. die x-Achse für sie eine freie Achse durch den Schwerpunkt sei. (Dies läßt sich praktisch immer durch das Auswuchten, und zwar durch Anbringung einer zusätzlichen Masse erreichen.) Sodann erhält man für die Massen m_i (von Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben ergänzt durch die übrigbleibende Masse der Schubstange) die Kurbel-

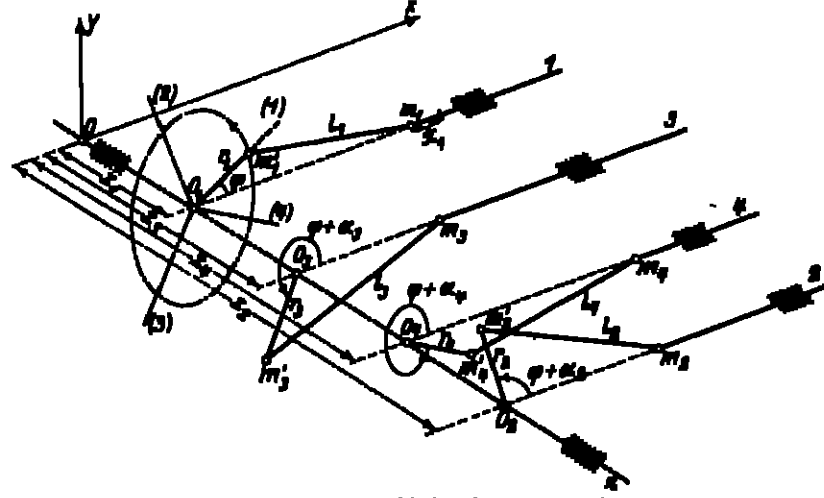


Abb. 27. Massenausgleich der Vierzylindermaschine.

winkel α_i und die Abstände der Zylindermittel x_i, wenn zuerst nur die von λ_i unabhängigen Glieder berücksichtigt werden, die Gleichungen (wobei $\alpha_1 = 0$ ist):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum m_i r_i \sin\alpha_i = 0,\\
&\sum m_i r_i \cos\alpha_i = 0,\\
&\sum x_i m_i r_i \sin\alpha_i = 0,\\
&\sum x_i m_i r_i \cos\alpha_i = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Werden ferner alle λ_i als gleich groß und gleich λ angenommen, und die Glieder in λ Null gesetzt, so erhält man die weiteren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum m_i r_i \sin 2\alpha_i = 0,\\
&\sum m_i r_i \cos 2\alpha_i = 0,\\
&\sum x_i m_i r_i \sin 2\alpha_i = 0,\\
&\sum x_i m_i r_i \cos 2\alpha_i = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Je nachdem ob nur die erste Gruppe dieser Gleichungen oder beide erfüllt sind, spricht man von Massenausgleich erster oder zweiter Ordnung.

Für die **Vierzylindermaschine**, auf die wir uns hier beschränken wollen, erhält man durch Elimination der Größen $m_i r_i$ aus dem ersten und dritten

Gleichungspaar, oder der Größen $s_i m_i r_i$ aus dem zweiten und vierten Gleichungspaar mit $\alpha_1 = 0$ dieselbe Bedingungsgleichung:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 & \sin\alpha_4 \\ 1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & \cos\alpha_4 \\ 0 & \sin 2\alpha_2 & \sin 2\alpha_3 & \sin 2\alpha_4 \\ 1 & \cos 2\alpha_2 & \cos 2\alpha_3 & \cos 2\alpha_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Setzt man überdies

$$\alpha_2 = \alpha, \qquad \alpha_3 = \alpha + \beta, \qquad \alpha_4 = \alpha + \beta + \gamma = 2\pi - \delta,$$

so läßt sich diese Determinantengleichung in der einfachen Form schreiben:

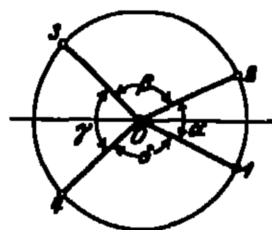


Abb. 28. Kurbelfolge für die ausgeglichene Vierzylindermaschine.

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\beta-\delta}{2}, \tag{9}$$

welche für den Ausgleich bei den Vierzylindermaschinen die Bedingung darstellt, die die Kurbelwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu erfüllen haben. Es sind also im allgemeinen zwei Winkel willkürlich, durch welche dann die beiden anderen bestimmt sind.

Da sich die Determinantengleichung sowohl aus der ersten wie aus der zweiten Gruppe der Ansatzgleichungen folgern läßt, so liegt der Schluß nahe, daß bei der Vierzylindermaschine ein vollständiger Ausgleich zweiter Ordnung möglich wäre. Indessen erhält man, wie SCHUBERT gezeigt hat, aus den beiden Gruppen von Gleichungen für die Doppelverhältnisse

$$\frac{s_3-s_2}{s_3-s_1} : \frac{s_4-s_2}{s_4-s_1} = \frac{\sin(\alpha_3-\alpha_2)}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)} : \frac{\sin(\alpha_4-\alpha_2)}{\sin(\alpha_4-\alpha_1)} = \frac{\sin 2(\alpha_3-\alpha_2)}{\sin 2(\alpha_3-\alpha_1)} : \frac{\sin 2(\alpha_4-\alpha_2)}{\sin 2(\alpha_4-\alpha_1)}$$

nur übereinstimmende Werte, sobald die Kurbeln 1, 2 oder 3, 4 zu einander parallel sind, was offenbar unmöglich ist. Überdies würde aus den beiden Gruppen von Gleichungen die Bedingung $s_1 = s_2 = s_3 = s_4$ folgen, die ebenfalls praktisch nicht zu erfüllen ist. Es ist daher ausgeschlossen, eine Vierzylindermaschine mit vollständigem Ausgleich zweiter Ordnung auszuführen.

Praktisch wird, wo es angeht, die symmetrische Kurbelanordnung $\beta = \delta$ gewählt, für die sich $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$ und die in Abb. 27 und 28 gezeichnete Kurbelfolge ergibt. Von den Ausgleichsbedingungen können nicht alle gleichzeitig und sinnvoll erfüllt sein; gewöhnlich werden nur die drei ersten Paare berücksichtigt, während das letzte Paar (das den Ausgleich der Momente in zweiter Ordnung sichern würde) beiseite gelassen wird. In diesem Falle $\beta = \delta$ ist

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 1, \tag{10}$$

und für die Verhältnisse der Massen und der Abstände folgt

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{m_1}{m_2} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\cos^2\frac{\gamma}{2}, \\ \lambda &= \frac{s_2-s_1}{s_4-s_3} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

so daß zwischen diesen die Beziehung besteht

$$\lambda = \sqrt{\frac{2-\mu}{\mu(2\mu-1)}}. \tag{12}$$

Umgekehrt lassen sich die Kurbelwinkel aus dem Verhältnis der Massen oder dem der Abstände berechnen. Es ergibt sich, was auch das mechanische Gefühl bestätigt, daß die beiden Zylinder mit den (gleichen) großen Massen innen, die mit den kleinen Massen außen angeordnet werden müssen.

Schubert hat auch die allgemeinste Lösung für die Fünfzylinder- und auch die symmetrischen Lösungen für die Sechszylindermaschine angegeben.

18. Das Problem der Schwungradberechnung. Seit langem ist bekannt, daß die Ungleichförmigkeiten, die im Gang der Kolbenmaschinen durch das veränderliche Kraftfeld einerseits und durch den Einfluß der bewegten Massen

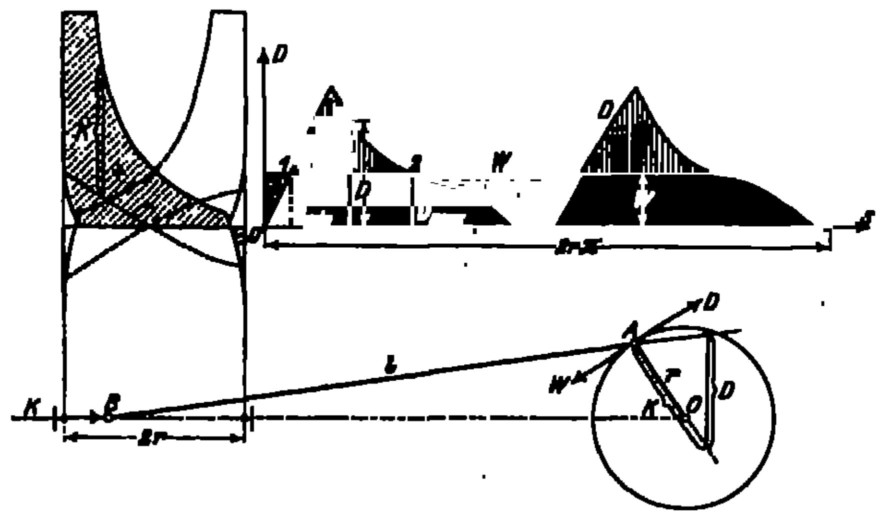


Abb. 29. Schwungradberechnung für die Einzylindermaschine.

andererseits auftreten, durch Anbringung eines Schwungrades herabgedrückt werden können; es kommt nun darauf an, die Größe, genauer gesagt, das Trägheitsmoment des Schwungrades zu ermitteln. Diese Frage ist insbesondere für Maschinen mit einem, zwei oder drei ungleichen Zylindern (und Getrieben) von Interesse, während bei Maschinen mit vier oder mehreren gleichen Zylindern neben dem Ausgleich der Massen auch ohne besondere Zutaten ein gleichförmigeres Kraftfeld erzielt werden kann[1]).

Das mechanische Problem, um das es sich hier handelt, kann unter Weglassung der Bewegungswiderstände (Reibungen und Luftwiderstand) für den Fall der Einzylindermaschine (und ähnlich auch für Mehrzylindermaschinen) in folgender Form ausgesprochen werden: Bei einem Schubkurbelgetriebe ist für jede Kurbelstellung die Größe der am Kreuzkopf (oder Kolben) wirkenden Triebkraft und die Größe der tangentiell zum Kurbelkreis gedachten, an der Kurbel angreifenden Widerstandskraft und endlich die Drehzahl n der Maschine gegeben. Die Bewegung sei stationär in dem Sinne, daß sie sich nach jeder vollen Umdrehung wiederholt (quasistationär). Man untersuche den Zusammenhang

[1]) O. Kölsch, Gleichgang und Massenkräfte bei Fahr- und Flugzeugmotoren. Berlin, Julius Springer 1911.

zwischen den während einer Umdrehung auftretenden Geschwindigkeitsschwankungen mit dem Verlauf des Kraftfeldes und den bewegten Massen und ermittle die Größe des Trägheitsmomentes des Schwungrades für einen vorgegebenen Ungleichförmigkeitsgrad, wenn alle anderen bewegten Massen des Getriebes bekannt sind.

Die Aufstellung der Bewegungsgleichung für das zwangläufig bewegte Getriebe erfolgt am einfachsten nach der Methode von LAGRANGE. Wenn der Kurbelwinkel φ als Zwanglaufkoordinate gewählt wird, so erhält man für die kinetische Energie oder Wucht des bewegten Getriebes einen Ausdruck von der Form[1])

$$T = \tfrac{1}{2} a(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 = \tfrac{1}{2} \mathfrak{M}(\varphi) \cdot v^2, \qquad (1)$$

worin $v = r\dot{\varphi}$ die Kurbelgeschwindigkeit und die periodische Funktion $\mathfrak{M}(\varphi)$ die „auf den Kurbelhalbmesser r reduzierte veränderliche Masse des Getriebes" bedeutet[2]). Die Arbeitsfunktion (das ist die negative potentielle Energie) ist

$$A(\varphi) = \int_0^{\varphi} (K\,ds - W r\,d\varphi) = \int_0^{\varphi} (D - W)\, r\, d\varphi,$$

und diese Funktion ist durch die Größe der Fläche zwischen der Druckkraftlinie $D = D(\varphi)$ und der Widerstandslinie $W = W(\varphi)$ gegeben (Abb. 29). Für jede Kurbelstellung ist nämlich die Drehkraft D durch die Gleichung bestimmt

$$D = K \frac{ds}{r\,d\varphi} = K \frac{v_s}{v_d}.$$

Die Bedingung, welcher W für stationären Gang der Maschine zu genügen hat, lautet

$$\int_0^{2\pi} (D - W)\, r\, d\varphi = 0. \qquad (2)$$

Zur Darstellung der Bewegung verwenden wir unmittelbar die Energiegleichung in der Form

$$T - T_0 = A,$$

oder, wenn für $\varphi = 0$ noch $\tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_0 v_0^2 = h$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{M}(\varphi) \cdot v^2 = 2(A(\varphi) + h); \qquad (3)$$

daraus folgt für die Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens in Abhängigkeit von der Kurbelstellung φ

$$v = v(\varphi) = \sqrt{\frac{2(h + A(\varphi))}{\mathfrak{M}(\varphi)}} = r \frac{d\varphi}{dt} \qquad (4)$$

und schließlich die Bewegungsgleichung in endlicher Form

$$t - t_0 = r \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{\mathfrak{M}(\varphi)}{2(h + A(\varphi))}}\, d\varphi. \qquad (5)$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten h verlangt nun irgendeine besondere Festsetzung, die sich entweder auf einen bestimmten Zeitpunkt der Bewegung oder auf deren ganzen Verlauf beziehen kann. Für die oben

[1]) R. v. MISES, ZS. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. Bd. 58, S. 577–582. 1906, 589–594. 606–610; M. TOLLE, Die Regelung der Kraftmaschinen, 3. Aufl., Berlin: Julius Springer 1922.

[2]) F. WITTENBAUER, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 50, S. 38. 1904 u. ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 49, S. 471. 1905, auch in desselben Verfassers Graphische Dynamik, Berlin: Julius Springer 1923.

formulierte Aufgabe ist die minutliche Drehzahl n oder die mittlere Geschwindigkeit v_m als gegeben zu betrachten. Es ist demnach mit der Umlaufzeit τ aus der Gleichung

$$v_m = \frac{r\pi n}{30} = \frac{2r\pi}{\tau} = \frac{2r\pi}{\int\limits_0^{2\pi} \frac{r\,d\varphi}{v(\varphi)}}$$

oder

$$\frac{2\pi}{v_m} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{v(\varphi)} = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\mathfrak{M}(\varphi)}{2(h + A(\varphi))}}\,d\varphi \tag{6}$$

die Konstante h in Abhängigkeit von v_m (und den anderen auftretenden Größen) zu berechnen und in die Gleichung für v einzusetzen.

Tatsächlich ist nun $\mathfrak{M}$ nicht als vollständig bekannt anzusehen, da darin außer den bekannten und veränderlichen Massen des Getriebes $\mathfrak{M}_1(\varphi)$ auch die konstante, unbekannte Masse $\mathfrak{M}_2$ des Schwungrades (einschließlich der sonstigen drehenden Teile: Welle, Kurbel, Kurbelzapfen usw.) enthalten ist, so daß

$$\mathfrak{M}(\varphi) = \mathfrak{M}_1(\varphi) + \mathfrak{M}_2 .$$

Setzt man dies in die Gleichung (3) und (4) ein, so sieht man unmittelbar, daß bei gleichem v durch Vergrößerung von $\mathfrak{M}_2$ auch h zunimmt[1]), so daß dadurch der Einfluß der veränderlichen, von φ abhängigen Glieder abnimmt, die Bewegung also merklich gleichförmiger wird. Zur Bestimmung von $\mathfrak{M}_2$ selbst ist eine weitere Festsetzung notwendig, und zwar besteht diese am einfachsten darin, die Schwankung vorzuschreiben, die v während einer Umdrehung der Maschine erfährt. Als Ungleichförmigkeitsgrad wird die Größe bezeichnet

$$\varepsilon = \frac{v_{max} - v_{min}}{v_m}, \tag{7}$$

und überdies wird einfach gesetzt

$$v_m = \frac{v_{max} + v_{min}}{2}. \tag{8}$$

19. Ältere Methoden. Die erste angenäherte Lösung dieses dynamischen Problems rührt von RADINGER[2]) her, dessen Methode auch heute in der technischen Praxis noch vielfach in Verwendung steht. Sie beruht auf folgenden Voraussetzungen:

1. Es werden nur die drehenden und die hin und her gehenden Massen des Getriebes berücksichtigt, die besondere Bewegungsform der Schubstange jedoch außer acht gelassen.

2. Die Massenkräfte der hin und her gehenden Massen werden unter Voraussetzung einer konstanten (mittleren) Drehgeschwindigkeit v_m der Kurbel berechnet und dem treibenden Kraftfeld überlagert; dabei wird wieder einfach nach Gleichung (8) $v_m = \frac{1}{2}(v_{max} + v_{min})$ gesetzt.

3. Es wird der „größte auftretende Arbeitsüberschuß" A als jene größte Fläche der Drehkraftlinie ermittelt, die zwischen zwei Nullwerten der Drehkraftlinie auftritt; diese Nullwerte geben die Stellen der kleinsten und größten Drehgeschwindigkeit (v_{min} und v_{max}) an.

---

[1]) Daß die Drehschwingungen, die bei elastisch vorausgesetzter Welle auftreten, dieses Ergebnis abändern und sogar in sein Gegenteil verkehren können, hat A. SOMMERFELD gezeigt (Fußnote 1 von Ziff. 15a S. 506).

[2]) J. RADINGER, Über Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit, 3. Aufl., Wien 1892.

4. Das Trägheitsmoment $J_s = \mathfrak{M}_s r^2$ des Schwungrades wird aus dem Energiesatz für jenes Intervall der Bewegung bestimmt, das durch die beiden Geschwindigkeitswerte v_{min} und v_{max} begrenzt ist und den größten auftretenden Arbeitsüberschuß A enthält; dieser Satz führt in Verbindung mit den anderen Annahmen auf die Gleichung

$$A = \tfrac{1}{2}\mathfrak{M}_s(v_{max}^2 - v_{min}^2) = \mathfrak{M}_s \delta v_m^2, \tag{1}$$

woraus das Trägheitsmoment des Schwungrades in der Form folgt

$$\mathfrak{M}_s = \frac{J_s}{r^2} = \frac{A}{\delta v_m^2}. \tag{2}$$

Die Ausführung dieses Verfahrens für die Einzylindermaschine (woraus auch seine Erweiterung für Mehrzylindermaschinen unmittelbar entnommen werden kann) ist in Abb. 29 enthalten. Durch Überlagerung der Massendrucklinie mit der aus dem „Indikatordiagramm" ablesbaren Triebkraftlinie erhält man die verfügbaren Kolbenkräfte und daraus durch Reduktion an den Kurbelzapfen die Drehkraftlinie D. Um die Massenkräfte bei verschiedenen Drehzahlen zu berücksichtigen, ist es praktisch, die Reduktion der Triebkräfte und der Massendrücke getrennt vorzunehmen und erst die Drehkraftlinien zu überlagern. Durch Verwandlung in ein flächengleiches Rechteck erhält man (bei konstantem Widerstande) die „Widerstandslinie" W, deren Schnittpunkte 1 und 2 zwischen sich den größten Arbeitsüberschuß A enthalten.

Eine Kritik dieser Methode, insbesondere mit Rücksicht auf die Berechtigung der eingeführten Annahmen wurde von Heun[1]) und v. Mises[2]) gegeben; dabei zeigte sich, daß die Methode für normale Kraftmaschinen praktisch von genügender Genauigkeit ist.

Im Anschlusse an Radinger sind zahlreiche Arbeiten erschienen, die auf eine Befreiung von jenen Annahmen hinzielen. So hat Pröll[3]) die Annahme (2) auszuschalten versucht, indem er die Massendrücke nicht mehr unter der Annahme einer konstanten, sondern zwischen den Grenzen $v_m(1 \pm \delta/2)$ veränderlichen Drehgeschwindigkeit der Kurbel berechnete. Es ist auch die Bemerkung verwertet worden, daß der größte Arbeitüberschuß A praktisch nicht viel abweichen kann von dem aus der harmonischen Grundwelle gerechneten, die aus der Auflösung der Drehkraftlinie in Sinuswellen entsteht, wodurch der Radingersche Rechnungsgang nicht unwesentlich abgekürzt werden kann.

20. Neuere, dynamische Methoden. Ein wesentlicher Fortschritt in der Behandlung des Schwungradproblems ist Wittenbauer[4]) zu verdanken; seine Methode hat mit der von Radinger nur die Definition der mittleren Geschwindigkeit durch $v_m = \frac{1}{2}(v_{max} + v_{min})$ gemeinsam, ist aber im übrigen rein dynamischer Natur. Setzt man in der Energiegleichung (5) von Ziff. 18 $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}/g$, wo $\mathfrak{G}$ das „reduzierte Massengewicht" ist, und $v^2/2g = H$, wo H die „Geschwindigkeitshöhe" ist, so kann diese Gleichung in der Form geschrieben werden

$$\mathfrak{G}H - \mathfrak{G}_0 H_0 = A. \tag{1}$$

Für das Getriebe wird nun zunächst, wie in Ziff. 19, die D-φ-Linie und daraus die A-φ-Linie gezeichnet (Abb. 30); ferner unter Berücksichtigung der sämtlichen Massen $\mathfrak{M}_1$ des Getriebes (mit Ausnahme der drehenden) die $\mathfrak{G}_1$-φ-Linie (c)

[1]) K. Heun, Kinetische Probleme der wissenschaftlichen Technik, Jahresber. d. D. Math.-Ver. Bd. 9. 1900.

[2]) R. v. Mises, Fußnote 1 von S. 518.

[3]) R. Pröll, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 49. S. 1713. 1905.

[4]) F. Wittenbauer, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 50. S. 38. 1905; ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 49. S. 471. 1905; Graphische Dynamik, 1923.

(oder $\mathfrak{M}_1 g$-φ-Linie). Diese beiden Kurven können als die Parameterdarstellung einer A-$\mathfrak{G}_1$-Linie angesehen werden, die aus ihnen punktweise nach der aus Abb. 30 ersichtlichen Art erhalten werden kann. Die Neigung α der Verbindungslinie eines Zustandspunktes P mit dem Koordinatenanfangspunkte O gegen die $\mathfrak{G}$-Achse ist zufolge der Gleichung

$$H = \frac{A + \mathfrak{G}_2 H_2}{\mathfrak{G}} = \operatorname{tg}\alpha \qquad (\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2) \quad (2)$$

ein Maß für die Geschwindigkeitshöhe H an dieser Stelle.

Werden zunächst die Konstanten als bekannt angesehen und $O'\gamma = \mathfrak{G}_2 H_2$, $\overline{O\gamma} = \mathfrak{G}_2$ aufgetragen, so geben die äußersten Tangenten an die A-$\mathfrak{G}_1$-Linie in ihren Neigungswinkeln α_{max} und α_{min} gegen die $\mathfrak{G}$-Achse den größten und kleinsten Wert der auftretenden Geschwindigkeiten

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_{max} &= H_{max} = \frac{v_{max}^2}{2g}, \\ \operatorname{tg}\alpha_{min} &= H_{min} = \frac{v_{min}^2}{2g}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Abb. 30. Dynamische Schwungradberechnung.

Sind dagegen die größte und kleinste zulässige Geschwindigkeit durch die Gleichungen

$$v_{max} = v_m\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad v_{min} = v_m\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (4)$$

vorgeschrieben, so daß (wenn $v_m^2/2g = H_m$)

$$\operatorname{tg}\alpha_{max} = H_{max} = H_m\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2, \qquad \operatorname{tg}\alpha_{min} = H_{min} = H_m\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2, \quad (5)$$

so liefert der Schnittpunkt O der unter diesen Winkeln gezogenen Tangenten an die A-$\mathfrak{G}_1$-Linie in $\overline{O\gamma} = \mathfrak{G}_2$ das hierzu notwendige „reduzierte Schwungradgewicht" und in $O'\gamma = \mathfrak{G}_2 H_2$ gerade die Integrationskonstante k in der Energiegleichung, deren Ermittlung aus den in Ziff. 18 angegebenen allgemeinen Gleichungen als recht umständlich erkannt wurde.

Da die Winkel α_{max} und α_{min} in praktischen Fällen sehr wenig voneinander verschieden sind, der Schnittpunkt der Tangenten daher sehr weit hinausfallen würde, so ist die Bemerkung von Wichtigkeit, daß dieses $\mathfrak{G}_2$ auch aus der Strecke A' (im Arbeitsmaßstabe) entnommen werden kann, die die äußersten Tangenten auf der A-Achse abschneiden (Abb. 30). Denn es ist

$$A' = \mathfrak{G}_2(\operatorname{tg}\alpha_{max} - \operatorname{tg}\alpha_{min}) = \mathfrak{G}_2 \frac{v_{max}^2 - v_{min}^2}{2g} = \frac{\mathfrak{G}_2}{g}\,\varepsilon\, v_m^2 \quad (6)$$

und daraus

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{\mathfrak{G}_2}{g} = \frac{A'}{\varepsilon v_m^2}. \quad (7)$$

v. Mises[1]) hat gezeigt, wie man dieses Verfahren zur Gewinnung einer von jener Annahme bezüglich der mittleren Geschwindigkeit freien Lösung erweitern kann.

[1]) Siehe Fußnote 1 von S. 518.

Bemerkung über die Reduktion der Masse der Schubstange. Zur Bestimmung der reduzierten Masse der Schubstange wird diese durch drei Ersatzpunkte ersetzt, die in den Endpunkten A, B und im Schwerpunkte S angebracht werden, der mit A, B auf derselben Geraden angenommen wird. Diese Ersatzpunkte sind anders definiert als die in Ziff. 13b) verwendeten. Soll die Gesamtmasse, der Schwerpunkt und das Trägheitsmoment erhalten bleiben, so gelten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m + m' + m'' &= M, \\ m a - m' b &= 0, \\ m a^2 + m' b^2 &= M k^2, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und daraus rechnet man die Ersatzmassen ($l = a + b$)

$$m = \frac{M k^2}{a l}, \qquad m' = \frac{M k^2}{b l}, \qquad m'' = M\left(1 - \frac{k^2}{a b}\right). \tag{9}$$

Daß diese Zerlegung auch die richtigen Beschleunigungskräfte gibt, folgt sofort aus der Gleichung für die Beschleunigungen

$$m \mathfrak{w}_A + m' \mathfrak{w}_B + m'' \mathfrak{w}_S = M \mathfrak{w}_S, \tag{10}$$

die nach Einsetzung der eben gerechneten Ersatzmassen wegen der Beziehung

$$\frac{b}{l} \mathfrak{w}_A + \frac{a}{l} \mathfrak{w}_B = \mathfrak{w}_S$$

tatsächlich identisch erfüllt ist. Die Gleichheit der Momente ist durch die dritte der Ersatzgleichungen gesichert.

21. Dynamik veränderlicher Massen. Die zwangläufige Bewegung einer Körperkette kann, wie im vorhergehenden gezeigt wurde, durch die Bewegung eines idealen Punktes von veränderlicher Masse dargestellt werden, der mit dem Kurbelzapfen umläuft. Der veränderliche Einfluß der Massen des Getriebes kommt in dem von φ abhängigen Koeffizienten von $\dot{\varphi}^2$ in T zum Ausdruck. Von dieser Deutung zu unterscheiden sind die Bewegungen mit wirklicher Veränderung der Massen, die in der physikalischen und technischen Literatur, wie auch in der Astronomie, gelegentlich behandelt wurden. Es handelt sich dabei z. B. um die Bewegung eines Wagens, aus dem Wasser oder Sand abfließt, die Bewegung von Ketten, von denen Teile noch in Ruhe sind oder wieder zur Ruhe gelangen, die Bewegung eines Planeten, dessen Masse durch Meteorfall beständig zunimmt u. dgl.

Sei m die mit der Geschwindigkeit v bewegte Masse und P die Kraft in der Bewegungsrichtung; wenn im Zeitelemente dt eine Masse dm mit der Geschwindigkeit v' hinzutritt (oder abgeht), so ist die gesamte Änderung der Bewegungsgröße

$$d(mv) = X\,dt + v'\,dm. \tag{1}$$

Ist im besonderen $v' = v$, so folgt

$$m \frac{dv}{dt} = X \tag{2}$$

wie bei konstanter Masse[1]).

FRIEDERHOFER[2]) hat die Gleichungen für die allgemeine Bewegung eines Systems aufgestellt, das aus diskreten, unter sich fest zusammenhängenden

[1]) E. J. ROUTH, Die Dynamik der Systeme starrer Körper Bd. I, S. 273; F. WITTENBAUER, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 52, S. 150. 1905; u. Graphische Dynamik, S. 650ff. Berlin 1923.

[2]) K. FRIEDERHOFER, Mitt. d. d. Ing.-Ver. Brünn Bd. 11, S. 83, 115. 1922.

Punktmassen m besteht, die unter dem Einflusse von bekannten eingeprägten Kräften stehen, und während dt die Massenänderungen dm mit den Geschwindigkeiten v' erfahren; er hat gezeigt, daß für Systeme dieser Art der Energiesatz gültig bleibt, daß aber die Bewegungsgleichung für die Bewegung um den Massenmittelpunkt S nicht mehr unabhängig ist von der von S selbst, wie das für Systeme mit unveränderlicher Masse der Fall ist.

Zur Verdeutlichung diene folgendes Beispiel. Über eine Rolle mit wagrechter Achse läuft ein Faden, dessen eines Ende das Gewicht $G = mg$ trägt, während das andere an einer schweren Kette befestigt ist, die zum Teil auf der wagrechten Ebene liegt. Ist s (Abb. 31) die Länge der gehobenen Kette zur Zeit t, μ deren Masse für die Längeneinheit, so lautet, wenn die Masse der Rolle vernachlässigt wird, die Bewegungsgleichung (1) (da $v' = 0$)

$$d[(m + \mu s)v] = (m - \mu s)g\,dt$$

oder mit $\dot s = v$

$$\frac{dv^2}{ds} + \frac{2\mu}{m + \mu s}v^2 = \frac{m - \mu s}{m + \mu s}2g.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist, wenn $v = 0$ für $s = 0$ sein soll,

$$v^2 = \frac{2g}{3}\frac{3m^2 - \mu^2 s^2}{(m + \mu s)^2}s.$$

Abb. 31. [illegible]

Die Bewegung eines Planeten mit veränderlicher Masse ist in der Astronomie durch GYLDÉN[1]), MESTSCHERSKY[2]), STRÖMGREN[3]) u. a. behandelt worden. MESTSCHERSKY hat gefunden, daß die Bewegungsgleichungen des Planeten bei gewissen Voraussetzungen über das Gesetz dieser Veränderlichkeit exakt integrierbar sind.

IV. Regelung der Maschinen.

22. Vorbemerkungen. Die Kraftmaschinen der Technik haben die Aufgabe, eine bestimmte Leistung im Dauerbetriebe abzugeben, und außerdem die Bedingung zu erfüllen, sich (innerhalb gewisser Grenzen) jeder anderen kleineren (oder wenig größeren) auftretenden Belastung selbsttätig anzupassen; in der Regel wird dabei verlangt, daß die Maschine bei den verschiedenen Belastungen stets nahe mit derselben Drehzahl laufen soll. Zur Erfüllung dieser Bedingung muß die Kraftmaschine mit einem Organ ausgestattet sein, das als Geschwindigkeitsanzeiger dienen kann und das imstande ist, bei auftretenden Belastungsänderungen die Antriebskraft der Maschine — den Kraftzufluß — in entsprechendem Sinne zu verändern. Die Gesamtheit der diesem Zwecke dienenden Einrichtungen und Vorgänge wird als die Regelung der Maschine bezeichnet. Der Geschwindigkeitsanzeiger — Regler genannt — wird gewöhnlich als Fliehkraftpendel ausgebildet und zwangläufig von der Maschinenwelle angetrieben; seine Stellung wird (bei direkter Regelung) bei verschiedenen Geschwindigkeiten ebenso zwangläufig auf das Regelorgan für den Kraftzufluß (Schieber oder Ventil) übertragen.

Vom Standpunkte der Mechanik stellt daher diese Verbindung zwischen Maschine und Regler in der einfachsten Form ein System mit zwei Freiheitsgraden dar, von denen einer (φ, $\dot\varphi = \omega$) der Drehwinkel der Maschine ist, während

---

1) H. GYLDÉN, Astron. Nachr. Bd. 109. 1884.
2) I. MESTSCHERSKY, Astron. Nachr. Bd. 132. 1893; u. Bd. 159. 1902.
3) E. STRÖMGREN, Astron. Nachr. Bd. 163. 1903.

der andere (x) die Stellung des Reglers angibt, die mit der Maschinenwelle unmittelbar nicht in zwangläufiger Verbindung steht.

Der mechanische Vorgang bei der Regelung einer Kraftmaschine verläuft nun in der Weise, daß eine Änderung der Belastung der Maschine zunächst eine gegensinnige Änderung der Drehzahl hervorbringt, und erst als Folge dieses kinetischen Vorganges wird eine die Geschwindigkeitsänderung aufhebende Änderung des Kraftzuflusses eingeleitet.

Für die Behandlung des Regelungsproblems liegen zwei Aufgaben vor: 1. die statische (ältere) Behandlung, die den Regler bei stationärer Bewegung der Maschine betrachtet und die Beschaffenheit dieses Gleichgewichtszustandes nach statischen Methoden beurteilt; 2. die dynamische (neuere) Behandlung, die das System Maschine und Regler als ein dynamisches System mit zwei (bei Hilfsmotoren noch mehr) Freiheitsgraden auffaßt und die für die Untersuchung der Beschaffenheit der stationären Bewegungen hinsichtlich ihrer Stabilität und auf den Übergang aus einem Zustand stationärer Bewegung in einen anderen (einer anderen Belastung entsprechenden) die aus der Dynamik bekannten Methoden, insbesondere die Methode der kleinen Schwingungen, anwendet.

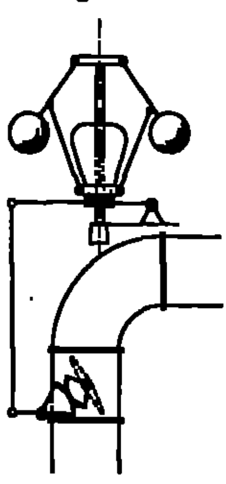


Abb. 32. Muffenregler.

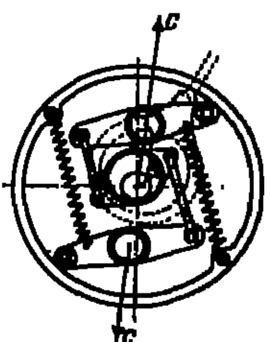


Abb. 33. Achsenregler.

23. Die Arten der Regler und der Regelungen. Die Regler und Regelungen werden nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeteilt:

a) Wenn die notwendige Kraft zur Verstellung des Kraftzuflusses — der Steuerung — der Maschine unmittelbar vom Regler ausgeübt wird, so spricht man von direkter (oder unmittelbarer) Regelung; wirkt jedoch der Regler auf die Steuerung eines Hilfsmotors ein, der seinerseits die Verstellung des Kraftzuflusses der Maschine besorgt, so nennt man die Regelung eine indirekte (mittelbare).

b) Je nachdem die Änderung der Massenkräfte der sich drehenden Reglermassen in normaler oder tangentialer Richtung ihrer Bewegung zur Verstellung der Steuerung der Maschine verwertet wird, spricht man von Fliehkraft- oder Beharrungsreglern. Dabei ist zu bemerken, daß reine Beharrungsregler unbrauchbar sind, vielmehr nur durch gleichzeitige Verwendung als Fliehkraftregler technisch brauchbar gemacht werden können.

c) Bezüglich der Bauart unterscheidet man Muffenregler (Abb. 32) und Achsen- oder Flachregler (Abb. 33). Bei jenen wird die Lagenänderung der Reglermassen auf eine längs der Antriebsdrehachse des Reglers verschiebbare Muffe übertragen, die durch ein Gestänge (Stellzeug) mit der Steuerung in Verbindung steht; bei den Flachreglern wird die Steuerung gewöhnlich durch ein Exzenter angetrieben, das durch die Lagenänderungen der Reglermassen eine Verstellung im gewünschten Sinne erfährt.

d) Je nachdem als eingeprägte Kräfte zur Herstellung der Gleichgewichtslagen Gewichte oder Federn verwendet werden, unterscheidet man Gewichts- und Federregler.

e) Nach den verwendeten Getrieben unterscheidet man Regler mit Schubkurbelgetriebe, mit Kreuzschieber usw.

f) Je nachdem für den neuen Gleichgewichtszustand gefordert wird, daß die Geschwindigkeit oder das Drehmoment der Maschine nahe den früheren Wert behalten soll, spricht man von Geschwindigkeits- oder Leistungsreglern.

g) Wird der Kraftzufluß der Maschine unausgesetzt durch den Regler beeinflußt, so nennt man die Regelung stetig, sonst unstetig oder intermittierend. Dieser Fall liegt z. B. bei Kolbenmaschinen mit veränderlicher Füllung vor; hier wirkt der Regler auf die Zeitdauer der Öffnung des Einlaßventils (des Füllungsgrades) oder auf die Größe der Einlaßöffnung ein. Während desjenigen Teils der Drehung der Welle, in welchem das Einlaßventil des Kraftmittels geschlossen ist, hängt die Leistung der Maschine nicht von der augenblicklichen Stellung des Reglers ab.

h) Bei indirekter Regelung ist zur Vermeidung fortgesetzter Schwankungen des Reglers ein Organ notwendig, das die Steuerung des Hilfsmotors während des Regelungsvorgangs in seine (wirkungslose) Mittelstellung zurückbringt: die Rückführung. Je nachdem die Verbindung des Reglers mit der Steuerung der Maschine durch starre Glieder oder durch Zwischenschaltung nachgiebiger Mittel (Kupplung durch rotierende Scheiben mit senkrechten Achsen oder sog. „Katarakte") erfolgt, unterscheidet man Regler mit starrer oder nachgiebiger Rückführung und bezeichnet die Regelung in den beiden Fällen als einfache und Isodromregelung; dieser Name soll ausdrücken, daß die Verwendung nachgiebiger Rückführung es ermöglicht, nach beendetem Regelungsvorgang Maschine und Regler stets genau auf die gleiche Drehzahl zu bringen, die vorher vorhanden war.

i) Wenn die Regelungseinrichtung nicht, wie es gewöhnlich der Fall ist, auf den Kraftzufluß, sondern auf die Belastung (die Widerstände) einwirkt, so spricht man von Bremsregelung.

24. Grundbegriffe der Reglertheorie. a) Als allgemeine Forderung wird von jedem Regler verlangt werden müssen, daß er die zur Veränderung des Kraftzuflusses notwendige Stellkraft (entweder direkt oder durch Einwirkung auf die Steuerung eines Hilfsmotors) aufzubringen imstande ist.

Unter der Muffenkraft oder dem Muffendruck Y (manchmal auch fälschlich „Energie" genannt) eines Kegelreglers versteht man die auf den Muffenweg y bezogene — reduzierte — Systemkomponente der eingeprägten Kräfte, oder besser die negative dieser Größe. Es ist dies also die an der Muffe nach unten wirkende Kraft, die den Reglerbelastungen ($G, Q, F, \ldots$; s. Ziff. 25) statisch gleichwertig ist; sie wird beim umlaufenden Regler durch die Fliehkraft C im Gleichgewichte gehalten, während sie sich beim ruhenden Regler als Druck der Muffe nach unten äußert.

Bezeichnet $C = m x \omega^2$ die Zentrifugalkraft (Fliehkraft) für die Entfernung x der Pendelmassen von der Drehachse, so ist Y als Systemgröße durch die Arbeitsgleichheit gegeben

$$Y dy = C dx, \qquad \text{also} \qquad Y = C\frac{dx}{dy} = m x \omega^2 \frac{dx}{dy}. \tag{1}$$

Analog bezeichnet man als Reglermoment M eines Flachreglers das auf die Relativverdrehung $d\varphi$ des Exzenterringes bezogene, einer Zunahme dx der Entfernung der Reglermassen von der Drehachse entsprechende Drehmoment; die Reduktion erfolgt also nach der Gleichung

$$M d\varphi = C dx, \qquad \text{so daß} \qquad M = C\frac{dx}{d\varphi} = m x \omega^2 \frac{dx}{d\varphi}. \tag{2}$$

b) Als **Arbeitsvermögen** eines Reglers definiert man für den Muffenregler den Ausdruck

$$A = \int Y\,dy = \int C\,dx \tag{3}$$

und analog für den Flachregler

$$A = \int M\,d\varphi = \int C\,dx, \tag{4}$$

wobei die Integrale über den ganzen Muffenhub bzw. Exzenterweg (oder die zugehörigen Wege der Schwungmassenmittelpunkte) genommen sind.

c) Unter dem **Ungleichförmigkeitsgrad** eines Reglers versteht man das Verhältnis

$$\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_m}, \qquad \text{wobei} \qquad \omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \tag{5}$$

wenn $\omega_1, \omega_2, \omega_m$ die Werte der Winkelgeschwindigkeit für die höchste (x_1), tiefste (x_2) und die „Mittelstellung" (x_m) der Reglermuffe bedeuten; dabei ist vorausgesetzt, daß x mit wachsendem ω beständig zunimmt oder beständig abnimmt. Je nachdem $\delta \gtreqless 0$, nennt man (nach Reuleaux) den Regler **statisch**, **astatisch** oder **labil** und bezeichnet ihn als **pseudoastatisch**, wenn δ nur wenig größer als 0 ist. Während Reuleaux noch die Ansicht von der alleinigen Brauchbarkeit der astatischen Regler vertreten hat, ist schon Kargl[1]) dieser Ansicht mit theoretischen und praktischen Gründen entgegengetreten und hat gezeigt, daß die Bedingung $\delta > 0$, und zwar kleiner Ungleichförmigkeitsgrad bei relativ großem Muffenhub die maßgebende Bedingung für die technische Brauchbarkeit eines direkten Reglers ist.

d) Die an den Gelenken und Führungen des Reglermechanismus auftretenden Reibungen sind die Veranlassung dafür, daß jeder Regler (in jeder Stellung) einen bestimmten **Unempfindlichkeitsgrad** besitzt. Seien ω_{max} und ω_{min} diejenigen Winkelgeschwindigkeiten, die an einer bestimmten Lage x des Reglers vorhanden sein müssen, um eine Verstellung des Reglers eintreten zu lassen, so definiert man als Ungleichförmigkeitsgrad das Verhältnis

$$\varepsilon = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega}. \tag{6}$$

Das Vorhandensein der Reibung und damit eines endlichen Wertes von ε ist für den Betrieb sehr wichtig, sonst würde der Regler bei beliebig kleinen Drehzahländerungen, also praktisch unausgesetzt, auf die Steuerung der Maschine einwirken.

e) Unter **statischer Stabilität** eines Reglers versteht man die Eigenschaft, daß bei kleinen Änderungen (Störungen) der Belastung oder des Antriebsdrehmomentes solche Kräfte entstehen, die den ursprünglichen Gleichgewichtszustand (besser gesagt: Zustand stationärer Bewegung bei gleicher Drehgeschwindigkeit) wiederherzustellen trachten; oder, daß diese Kräfte bei endlichen Belastungsänderungen der Erreichung einer neuen Gleichgewichtsgeschwindigkeit zustreben. Für die Untersuchung der **dynamischen Stabilität** ist der Verlauf dieser Bewegungsvorgänge selbst das Entscheidende, für die der Einfluß der bewegten Massen der Maschine und des Reglers selbst in Rechnung zu ziehen ist. Wenn die in den beiden obengenannten Fällen auftretenden Bewegungen durch Schwingungen mit nicht zunehmender Weite dargestellt werden können oder einen asymptotischen Verlauf aufweisen, so bezeichnet man den Regler als **dynamisch stabil**.

[1]) Kargl, Zivilingenieur Bd. 19, S. 421. 1873.

25. Statische Behandlung der Regler. Diese wurde insbesondere von den älteren Autoren[1]) ausgebildet und fand durch Tolle[2]) eine ausführliche Darstellung. Sie besteht vor allem in der Ermittlung der sog. „C-Kurven" (Zentrifugalkraft- oder Fliehkraftkurven), aus denen die statischen Eigenschaften der Regler abgelesen werden können. Dabei ist es vorteilhaft (wie dies in ähnlicher Weise bei anderen derartigen Betrachtungen geschieht), die erforderliche (C) und verfügbare Fliehkraft (C_1) voneinander zu unterscheiden. Unter der erforderlichen Fliehkraft $C = C(x)$ für eine beliebige Reglerstellung versteht man jene im Mittelpunkte der Schwungmassen angreifende, senkrecht zur Achse gerichtete Kraft, die der Muffenbelastung Q, dem Gewichte G, der Federbelastung F usw. das Gleichgewicht zu halten vermag. Es ist also

$$C_1 = C_q + C_g + C_f + \cdots \qquad (1)$$

Die C-Kurve wird entweder durch statische Zerlegung der Kräfte $Q, G, F, \ldots$ oder mit Hilfe der Arbeitsgleichung (1) von Ziff. 24, bezogen auf eine Elementarbewegung des Reglers, gefunden. Ihre Ermittlung ist in Abb. 34 angedeutet; sie ist nur von den Kräften Q, G, F und der kinematischen Ausführung des Reglers abhängig, gänzlich unabhängig aber von der Lage der Spindel und der Größe der Winkelgeschwindigkeit. Die verfügbare Fliehkraft $C_1 = C_1(x, \omega^2) = m x \omega^2$ (sofern die Reglermassen als Punktmassen betrachtet werden können) ist dagegen jene, die der Regler bei einer bestimmten Stellung x und einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit ω aufzubringen imstande ist. Für konstante Werte von ω sind die Kurven $C_1 = C_1(x, \omega^2)$ die Schar der Geraden durch den Anfangspunkt O.

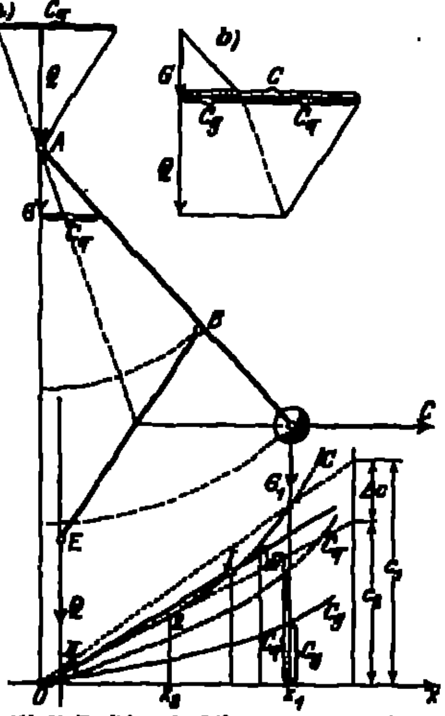


Abb. 34. Ermittlung der C-Kurven beim Muffenregler.

Die Gleichgewichtsstellung des Reglers ist durch die Bedingung $C = C_1$ gegeben; aus dem Verlauf der Kurven ist unmittelbar zu ersehen, daß z. B. ihr Schnittpunkt I als statisch stabil zu bezeichnen ist, weil die Kräfte C, C_1, die in den Nachbarlagen zu beiden Seiten auftreten, die Tendenz haben, den Regler in die Lage I wieder zurückzuführen; dagegen wäre II eine labile Gleichgewichtslage. Diese Überlegung gestattet in ähnlicher Weise in den in Abb. 35 dargestellten Formen, in denen eine Tangente von O an die C-Kurve oder ein „astatischer Punkt" P existiert, die Beschaffenheit der Gleichgewichtslage zu erkennen; in den Fällen a) ist sie bei Störungen nach oben und nach unten verschieden geartet.

[1]) Vgl. auch für Ziff. 25 und 26 die Lehrbücher und Sonderschriften von J. V. Poncelet, 1874; H. Résal, 1875; H. Lanzus u. H. Lang, 1882; G. Herrmann, 1886; W. Lynen, 1895; J. Isaachsen, 1899; J. Bartl, 1900; K. Heun, 1900; B. Rülf, 1902; A. Koch, Diss. Berlin 1903; F. Thümmler, 1903; W. Bauersfeld, 1905; A. Budau, 1906—1909; H. Kröner, 1912. Außerdem sei hier insbes. auf die grundlegenden Arbeiten von A. Stodola, Schweiz. Bauztg. Bd. 22. 1893; Bd. 23. 1894; u. Z. d. Ver. d. Ing. Bd. 43, S. 306. 1899; endlich auf A. Watzinger und L. J. Hanssen, Berlin 1923, hingewiesen.

[2]) M. Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen 3. Aufl. Berlin 1922.

Ein statisch stabiler direkter Regler muß daher eine C-Kurve von der in Abb. 34 (Umgebung von I) dargestellten Gestalt haben; ein Fliehkraftregler vermag demnach für verschiedene Belastungen (also verschiedene Reglerstellungen) die Drehzahl einer Maschine automatisch nicht absolut auf den gleichen Wert einzustellen. Für die Stabilität ist ein gewisser endlicher Ungleichförmigkeitsgrad unbedingt nötig. Damit dieser jedoch möglichst klein ausfällt, trachtet man, den Regler nahezu als astatisch (also pseudo-astatisch) auszubilden, die C-Kurve also nahezu als Gerade, die unterhalb O vorbeigeht, oder als schwach gekrümmte, in der Nähe dieser Geraden verlaufende Kurve zu erhalten. Diese Forderung sucht man durch entsprechende Ausbildung des Reglermechanismus (gekreuzte Arme, Kreuzschieber u. dgl.) zu erfüllen.

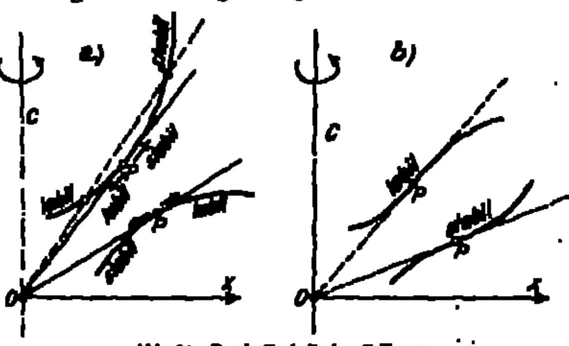


Abb. 34. Beschaffenheit der C-Kurve.

Aus der Gestalt der C-Kurve ist unmittelbar auch die Größe des entsprechenden Ungleichförmigkeitsgrades δ zu entnehmen. Da nämlich mit großer Annäherung

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{2}$$

gesetzt werden kann, so ist

$$\delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_m} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_m^2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{2\operatorname{tg}\varphi_m} = \frac{\Delta C}{2C_m}, \tag{3}$$

wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_m$ dem oberen, unteren und einem mittleren Punkt der C-Kurve entsprechen (Abb. 34).

Die Stellkraft δY des Reglers ist jene an die Muffe reduzierte Kraft, die der Regler bei einer gewissen Drehzahländerung $\delta\omega$ zu überwinden vermag; sie entspricht der Differenz zwischen der erforderlichen und verfügbaren Fliehkraft in der Umgebung der betrachteten Stellen, also der Größe

$$\delta K = (C + \delta C) - (x + \delta x)\operatorname{tg}\varphi;$$

da

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C}{x} = m\omega^2,$$

so folgt

$$\delta K = 2\omega m x \delta\omega = 2C\frac{\delta\omega}{\omega}, \tag{4}$$

und daher ist

$$\delta Y = \frac{dx}{dy}\delta K = 2C\frac{dx}{dy}\frac{\delta\omega}{\omega} = 2Y\frac{\delta\omega}{\omega}. \tag{5}$$

Die Stellkraft δY bei einer bestimmten Drehzahländerung ist mithin um so größer, je größer die Muffenkraft Y ist. Es empfiehlt sich daher, nur Regler mit großer Muffenkraft zu verwenden. C und Y sind im allgemeinen längs des Hubes veränderlich, doch ist diese Änderung nicht bedeutend, weshalb bei den Rechnungen meist beide als konstant und $= C_m$ bzw. Y_m angesehen werden.

26. Dynamische Theorie der Regelung. Vom Standpunkte der Dynamik ist das Regulierproblem bei direkter Regelung ein Problem mit 2, bei indirekter mit $2 + s$ Freiheitsgraden, wenn s die Anzahl der zusätzlichen Krafteinschaltungen

(Hilfsmotoren) bedeutet. Jedem Freiheitsgrad entspricht eine Bewegungsgleichung, und diese Gleichungen sind durch den Einfluß des Reglers miteinander gekoppelt. Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen erfolgt entweder synthetisch durch direkten Ansatz oder analytisch nach der Lagrangeschen Methode. Wir müssen uns hier auf einige kennzeichnende Bemerkungen beschränken, bezüglich der besonderen Ausführungen sei auf die vorhandene und oben teilweise angeführte Literatur verwiesen.

a) **Einfache und direkte Regelung.** Die beiden Gleichungen entsprechend der Änderung der Winkelgeschwindigkeit ω der Maschine und dem Reglerausschlage sollen kurz als „Maschinengleichung" und als „Reglergleichung" (die für die zusätzlichen Krafteinschaltungen als „erste" Hilfsmotorgleichung" usw.) bezeichnet werden. Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen ist die Einführung einer Anzahl von vereinfachenden Annahmen notwendig, von denen die wichtigsten die folgenden sind:

1. Die C-Kurve des Reglers wird als Stück einer Geraden angenommen, daher die Stellkraft sowie das zusätzliche Drehmoment der Maschine als lineare Funktion des Muffenweges y oder des Reglerausschlages, bei einer Störung von der neuen Gleichgewichtslage gerechnet: $-\alpha s$.

2. Zur Berechnung der durch dieses Drehmoment hervorgerufenen Winkelbeschleunigung $\partial\Omega/\partial t$ wird das Trägheitsmoment J der Maschine als konstant angenommen, ebenso werden die Schwankungen des Drehmoments der Triebkraft und des Widerstandes außer Betracht gelassen, so daß die Maschinengleichung die folgende Form annimmt:

$$J\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\alpha s = -J\frac{\omega_m}{T_a s}s, \tag{1}$$

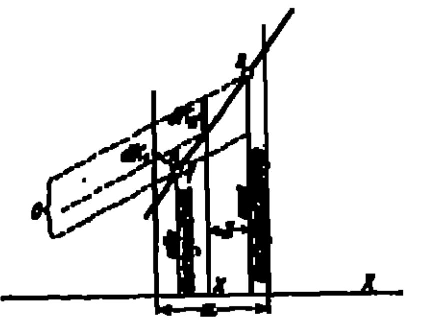
wenn T_a die „Anlaufzeit der Maschine", s den ganzen Weg des Reglers und ω_m den Mittelwert der Winkelgeschwindigkeit längs dieses Weges bedeuten. T_a folgt aus der Gleichung:

$$J\cdot\omega_m/T_a = \alpha\cdot s.$$

3. Die Massen des Reglers werden alle auf den Schwerpunkt der Schwungmasse reduziert und die mit dem Reglerausschlag veränderlichen Teile vernachlässigt, d. h. in den bezüglichen Ausdrücken nur Glieder erster Ordnung in den Veränderlichen beibehalten; die so erhaltene reduzierte Masse des Reglers sei m_0.

4. Die Kurvenschar $C =$ konst. für $\omega =$ konst. soll angenähert als Schar paralleler Geraden angesehen werden.

Zur Aufstellung der Reglergleichung braucht man dann einen Ansatz für die einwirkenden Kräfte, die für eine Zwischenlage angesetzt und **auf die neue Gleichgewichtslage** bezogen werden müssen (Abb. 36). Sie bestehen aus zwei Teilen: dem Teil ∂K_1, der von der Änderung der Winkelgeschwindigkeit herrührt und die Größe hat ($\partial\omega = \Omega$):


Abb. 36. Bestimmung der Reglerkräfte.

$$\partial K_1 = (\partial C)_{x=\text{konst.}} = 2\omega_m m\,\Omega x = \frac{2C_m}{\omega_m}\Omega,$$

und dem zweiten Teil ∂K_2, das ist der nach der neuen Gleichgewichtslage gerichtete Überschuß der erforderlichen über die verfügbare Fliehkraft für die

betrachtete Zwischenstellung; wenn ΔC die dem gesamten Reglerausschlag a entsprechende Differenz der Fliehkräfte ist, so entspricht der Entfernung z von der neuen Gleichgewichtslage:

$$\delta K_2 = -\Delta C \frac{z}{a} = -\frac{2\delta C_m}{a} z.$$

Daher lautet die Bewegungsgleichung

$$m_0 \frac{d^2 z}{dt^2} = \delta K_1 + \delta K_2 = \frac{2 C_m}{\omega_m} \Omega - \frac{2\delta C_m}{a} z, \tag{2}$$

und es folgt durch Differentiation nach t und Elimination von Ω mit Hilfe der Maschinengleichung, wenn noch $\frac{2C_m}{m_0 a} = A$ gesetzt wird,

$$\frac{d^3 z}{dt^3} + A\delta \frac{dz}{dt} + \frac{A}{T_a} z = 0. \tag{3}$$

Außer den vom Regler abhängigen Konstanten m_0, a, C_m sind somit auf das Verhalten des Reglers nur der Ungleichförmigkeitsgrad δ und die Anlaufzeit T_a der Kraftmaschine von Einfluß. Durch den Ansatz $z = e^{\lambda t}$ erhält man daraus die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 + A\delta \cdot \lambda + \frac{A}{T_a} = 0. \tag{4}$$

Die Bedingungen der Stabilität eines Bewegungsvorganges verlangen, daß die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung, die im allgemeinen von $n$ter Ordnung sein kann,

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{5}$$

nur negative (genauer: nicht positive) reelle Teile besitzen; sie lauten[1]):

$$a_1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{usw.} \tag{6}$$

Für die obige Gleichung (4) führen diese Bedingungen auf die einzige Ungleichung

$$-\frac{A}{T_a} > 0, \tag{7}$$

die offenbar **nicht** besteht. Der Regler ist also in der hier gegebenen Auffassung sicher instabil. Um ihn technisch brauchbar zu machen, ist die Anbringung einer **Dämpfung** erforderlich. Setzt man die Größe der Dämpfungskraft proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit

$$-\frac{B}{m_0} \frac{dz}{dt}, \qquad (B > 0)$$

so nimmt die Reglergleichung die Form an

$$\frac{d^3 z}{dt^3} + B \frac{d^2 z}{dt^2} + A\delta \frac{dz}{dt} + \frac{A}{T_a} z = 0, \tag{8}$$

und die Stabilitätsbedingungen lauten

$$B > 0, \qquad \delta > \frac{1}{B T_a},$$

d. h. nur ein statischer Regulator ($\delta > 0$), der überdies mit einer Dämpfung (Bremse, Katarakt) versehen ist, gibt abnehmende Schwingungen, also eine stabile Regelung.

[1]) Siehe Kap. 8, Ziff. 54 ds. Bd. ds. Handb.

b) Der Einfluß der Beharrungswirkung. Dieser kommt dadurch zum Ausdruck, daß die Winkelbeschleunigung $d\Omega/dt$ auch eine Beschleunigung des Reglers in seiner eigenen Ebene hervorbringt, die in der Form $e\frac{d\Omega}{dt}$ angesetzt werden kann. Die Reglergleichung lautet in diesem Falle

$$\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{e}{m_0}\frac{d\Omega}{dt}-\frac{2C_m}{m_0\omega_m}\Omega+\frac{2\delta C_m}{m_0 a}s+B\frac{ds}{dt}=0 \tag{9}$$

oder nach Entfernung von Ω

$$\frac{d^3s}{dt^3}+B\frac{d^2s}{dt^2}+(\vartheta+\delta)A\frac{ds}{dt}+\frac{A}{T_a}s=0, \tag{10}$$

worin

$$\vartheta=e\frac{\omega_m}{2T_aC_m} \tag{11}$$

als der „Grad der Beharrungswirkung" bezeichnet wird. Die Bedingungen für die Stabilität lauten jetzt ganz ähnlich wie früher

$$B>0,\qquad \vartheta+\delta>\frac{1}{BT_a}, \tag{12}$$

so daß für die Brauchbarkeit des Reglers auch jetzt noch eine Dämpfung erforderlich ist, wogegen der Ungleichförmigkeitsgrad δ bei entsprechend großem Einfluß der Beharrungswirkung (e und ϑ) beliebig klein und auch negativ werden kann. Gleichungen von derselben Art lassen sich durch ganz ähnliche Hilfsmittel auch für Flachregler (Achsenregler) aufstellen.

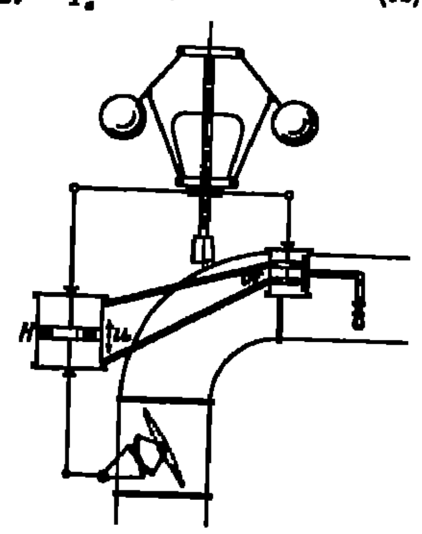


Abb. 37. Indirekte Regelung.

c) Indirekte Regelung. Hier tritt zu den bisher betrachteten Gleichungen für die Bewegung der Reglermuffe und der Maschine noch die Bewegung des Hilfsmotorkolbens K (Abb. 37) hinzu. Bei der Maschinengleichung ist zu berücksichtigen, daß das Drehmoment nicht von der Stellung s des Reglers, sondern von der des Hilfsmotorkolbens u abhängt; sie lautet also, wenn a' dessen Weg bezeichnet,

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\omega_m}{T_a}\frac{u}{a'}. \tag{13}$$

Für die Bewegung des Hilfsmotorkolbens wird angenommen, daß seine Geschwindigkeit proportional der Auswelchung des Steuerkolbens (St in Abb. 37) aus seiner Deckstellung ist, wobei sich die Bewegung zusammensetzt aus den beiden (gegensinnigen) Bewegungen der Reglermuffe und der Rückführung, so daß

$$\frac{du}{dt}=-\frac{1}{T_s}(u-s) \tag{14}$$

geschrieben werden kann, wenn T_s die „Schlußzeit des Hilfsmotors" bedeutet. Die Reglergleichung bleibt dieselbe wie zuvor, sie wird jedoch meist in der folgenden, für praktische Rechnungen geeigneteren Form geschrieben

$$T_r^2\frac{d^2(s/a)}{dt^2}+T_k\frac{d(s/a)}{dt}+\delta\frac{s}{a}-\frac{\Omega}{\omega_m}=0, \tag{15}$$

worin $T_r = \sqrt{ma/2C_m}$ die „Fallzeit des Reglers" und $T_b = Ba/2C_m$ die „Fallzeit der Ölbremse" bedeutet. Die Elimination von s und Ω liefert sodann (mit $a = a'$) die charakteristische Gleichung

$$T_a T_s T_r^2 \lambda^4 + T_a[T_s T_b + T_r^2]\lambda^3 + T_a[\delta T_s + T_b]\lambda^2 + \delta T_a \lambda + 1 = 0, \tag{16}$$

für welche die folgenden Stabilitätsbedingungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} T_b[\delta T_s^2 + T_s T_b + T_r^2] &> 0, \\ \delta T_a T_b &> \frac{[T_s T_b + T_r^2]^2}{\delta T_s^2 + T_b T_s + T_r^2}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die Stabilität verlangt daher das Vorhandensein einer Dämpfung ($T_b > 0$), statische Beschaffenheit des Reglers ($\delta > 0$) und, wie die Diskussion der zweiten dieser Gleichungen ergibt, die Bedingung, daß die Eigenschwingungsdauer des Reglers entsprechend kleiner ist als die Schlußzeit des Hilfsmotors. Für die kleinsten Werte dieses Verhältnisses erhält man sog. „Grenzkurven", die für die Regelung charakteristisch sind, und die für alle Verhältnisse zu gegebener Stellkraft das höchste zulässige Maß von C_m zu bestimmen gestatten; sie sind insbesondere von v. Mises[1]) eingehend studiert worden.

Graphische Methoden zur Darstellung und Verfolgung des Regelungsvorganges sind von Pröll[2]), Bauersfeld und Léauté[3]) angegeben worden; sie sind auch für indirekte Regelung brauchbar und gestatten auch, den Einfluß der Reibung, des toten Ganges und des Zeitverlustes, hervorgerufen durch die Trägheit der Massen, zu verfolgen[4]).

d) **Isodromregelung.** Bei einem statischen Regler entsprechen den verschiedenen Belastungsgraden im Beharrungszustande verschiedene Reglerstellungen und Winkelgeschwindigkeiten. Wenn es bei einem Betriebe auf **Konstanz der Drehzahl** ankommt, können diese Unterschiede dadurch ausgeschaltet werden, daß bei einer Änderung der Belastung durch eine Verstellung der Länge des Rückführungsgestänges „von Hand" der normale Wert der Drehzahl wieder hergestellt wird. Diese Handverstellung birgt aber bei plötzlichen Entlastungen für die Maschine eine Gefahr in sich, und deshalb hat man sie durch eine selbsttätig wirkende Isodromvorrichtung ersetzt, die die Aufgabe hat, diese Verstellung auf maschinellem Wege zu besorgen. Die frühere starre Rückführung wird jetzt durch eine „nachgiebige" ersetzt, wodurch der eindeutige Zusammenhang zwischen Regler und Hilfsmotorkolben aufgehoben und in solcher Weise umgestaltet ist, daß sämtlichen möglichen Stellungen des Hilfsmotorkolbens eine einzige Stellung des Reglers im Beharrungszustande zugeordnet ist. Eine solche Isodromvorrichtung besteht entweder aus einem Scheibenradgetriebe mit senkrechten Achsen, das bei jeder Belastungsänderung die gewünschte Verstellung des Rückführungsgestänges besorgt, oder aus einer zwischengeschalteten Ölbremse (Katarakt), die zusammen mit entsprechend angeordneten Federn die Erhaltung der Drehzahl der Maschine sichert. Die Untersuchung des Regelungsvorganges selbst verlangt die Aufstellung einer weiteren Gleichung für die Isodromvorrichtung, wodurch sich die Ordnung des Systems von Differentialgleichungen noch um eine erhöht. Eine ausführliche Untersuchung der hierhergehörigen Fragen ist Kröner[5]) zu verdanken. In

[1]) R. v. Mises, Elektrot. u. Maschinenb. Bd. 26, S. 783. 1908.
[2]) R. Pröll, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 28, S. 457, 473. 1884.
[3]) H. Léauté, Journ. Éc. polyt. Bd. 55, S. 1. 1885; Rev. gén. des sciences 1890.
[4]) Siehe auch L. Lecornu, Régularisation du mouvements dans les machines, Paris 1898 u. W. Hort, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 50, S. 233. 1904.
[5]) H. Kröner, Zur Kritik der Turbinen-Regulatoren, Diss. Karlsruhe 1910 und Geschwindigkeitsregler der Kraftmaschinen, Sammlung Göschen Nr. 609, 192.

Elektrizitätswerken, in denen mehrere Maschinen parallelgeschaltet werden, muß die Isodromregelung übrigens mit einer besonderen Einrichtung hierfür versehen werden, die man als „Doppelsteuerung" bezeichnet.

27. Bemerkungen über die Regulierung verschiedener Arten von Kraftmaschinen. a) Für das Verhalten der von ihrem Regler beeinflußten Kraftmaschinen ist außer den Stabilitätsbedingungen auch der zeitliche Verlauf der Drehzahlschwankungen von Bedeutung, die unter dem Einfluß der Maschinen- und Reglermassen (und der sonstigen Umstände, wie Reibung usw.) zustande kommen. Kolbendampfmaschinen haben die Eigentümlichkeit, daß während eines jeden Hubes eigentlich nur eine einzige Stellung des Reglers für die Größe des Kraftzuflusses von Bedeutung ist; sie gelangen aber erfahrungsgemäß bei Belastungsänderungen sehr schnell in den neuen Beharrungszustand, so daß bei guten Ausführungen der Regelung Schwankungen kaum wahrgenommen werden. Bei ungünstigen Verhältnissen können allerdings Schwankungen entstehen, die nur sehr langsam oder gar nicht abnehmen und einen dauernd unruhigen Gang der Maschine verursachen. Untersuchungen über den Verlauf dieser Schwankungen sind insbesondere in den genannten Arbeiten von Isaachsen, Rülf und Thümmler zu finden.

b) Bei Dampfturbinen erfolgt die Regelung in den meisten Fällen durch bloßes Dampfdrosseln, seltener durch Verstellung veränderlicher Düsen. Eine Übersicht über die vorkommenden Probleme und Konstruktionen verdanken wir Stodola[1]).

c) Bezüglich der Probleme, die in der „Dynamik der Leistungsregelung" von Kolbenkompressoren und Pumpen vorliegen, sei z. B. auf das Werk von Walther[2]) verwiesen.

d) Bei Verbrennungskraftmaschinen liegen besondere Probleme vor, wie z. B. die zwangläufige Regelung der Verbrennung selbst u. dgl. Hierüber ist auf eine Untersuchung von Weidmann[3]) und auf die Werke von Magg[4]), Körner[5]) u. a. zu verweisen.

e) Bei Wasserturbinen erfolgt die Regelung des Wasserzuflusses meist an der Turbine selbst durch Verstellung der Leitschaufeln in nahezu stetiger und die Turbine symmetrisch beeinflussender Weise; wegen der erforderlichen großen Verstellungskraft kommt nur indirekte Regelung in Betracht. Eine eingehende Darstellung des Regelungsvorgangs wurde von Pröll und Bauersfeld gegeben, außerdem sind Einzelheiten auch in den bekannten Werken über Wasserkraftmaschinen von Camerer, Thomann u. a. enthalten.

f) Ganz anders geartete Probleme und Einrichtungen liegen bei der automatischen Regulierung der verschiedenen Arten von elektrischen Maschinen vor; bei diesen erfolgt die Betätigung des Steuerapparates in der Regel durch ein Spannungsrelais, welches die Regulierwiderstände der Maschine in der gewünschten Weise verändert. Theoretische Untersuchung der auftretenden Vorgänge stammen u. a. von Schwaiger[6]).

---

[1]) A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 6. Aufl., S. 446 ff., Berlin 1924.

[2]) L. Walther, Dynamik der Leistungsregelung von Kolbenkompressoren und -Pumpen, Berlin 1921.

[3]) C. Weidmann, Zwangläufige Regelung der Verbrennung bei Verbrennungskraftmaschinen, Berlin 1905.

[4]) J. Magg, Die Steuerungen der Verbrennungskraftmaschinen, 2. Aufl., Berlin 1926.

[5]) K. Körner, Der Bau des Dieselmotors, 2. Auflage, Berlin, 1927.

[6]) A. Schwaiger, Das Regulierproblem der Elektrotechnik, Leipzig 1909. Ferner F. Natalis, Die selbsttätige Regulierung elektrischer Generatoren, Braunschweig 1908, zahlreiche Arbeiten in der Elektrot. ZS., endlich die Lehrbücher von Jahn, Rasch u. a.

28. Andere Regulierungsarten. Außer der oben ausführlicher behandelten Geschwindigkeitsregulierung werden von Grashof[1]) noch die folgenden Arten unterschieden:

a) Interferenzregler, bei denen (nach Art der stroboskopischen Schlüpfungsmesser) die relative Verdrehung zwischen einer gleichförmig rotierenden Scheibe und der Maschinenwelle die Verstellung eines Schaltorgans veranlaßt.

b) Pumpenregler. Eine von der Maschine getriebene Hilfspumpe fördert Wasser in ein Gefäß, dessen Abfluß auf die normale Drehzahl eingestellt ist. Durch die Spiegelschwankungen bei Belastungsänderungen wird das Schaltorgan verstellt.

c) Windflügelregler. Diese benutzen den von der Geschwindigkeit abhängigen Widerstand eines Flügelrades zur Verstellung eines Schaltorgans.

Diese Regelungsarten werden auch bei physikalischen und astronomischen Instrumenten verwendet, wenn es sich um die Herstellung eines gleichförmigen Ganges handelt, wie z. B. bei der Regelung der Triebwerke der Uhren, der Bewegungsvorrichtungen der Refraktoren u. dgl[2]).

V. Stabilität rotierender Wellen und kritische Drehzahlen.

29. Vorbemerkungen. Das hier zu behandelnde Problem[3]) hat seinen Ursprung in der 1883 durch den schwedischen Ingenieur de Laval gemachten Entdeckung, wonach eine mit einer Scheibe besetzte Welle, wenn sie mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit angetrieben wird, nicht (wie man annehmen würde) in immer stärkeres Schleudern gerät, sondern sich nach Überschreitung eines kritischen Bereiches, der sich allerdings durch vermehrte Unruhe des Laufes zu erkennen gibt, bald beruhigt und schließlich eine gegenüber allen vorkommenden Störungen außerordentliche Stabilität aufweist. Die zu diesem kritischen Bereich gehörige Drehzahl, bei der die Welle ihre Steifigkeit anscheinend verliert und mehr oder weniger unbeschränkt auszuschlagen beginnt, wird als kritische Drehzahl bezeichnet. Diese Entdeckung hat für die Dimensionierung der Dampfturbinenwellen grundsätzliche Bedeutung gewonnen, da sie es ermöglichte, die Wellen schlank zu bemessen und sie mit einer entsprechend hoch über der kritischen liegenden Drehzahl laufen zu lassen, und hat alsbald zu der folgenden allgemeinen Fragestellung geführt: Unter welchen Verhältnissen und in welchem Sinne treten bei der Drehung von Wellen, die mit Punktmassen und Scheiben beliebig besetzt sind, singuläre Verhältnisse ein, die die Bezeichnung „kritisch" rechtfertigen?

Nach der elementaren Theorie werden die kritischen Drehzahlen (oder kritischen Winkelgeschwindigkeiten ω) als diejenigen erklärt, mit denen die Welle stationär umlaufen könnte, wenn sie mit den dabei auftretenden Fliehkräften belastet wäre. Will man die Beschaffenheit einer besonderen, mit einer bestimmten Drehzahl erfolgenden Bewegung der Welle hinsichtlich ihrer Stabilität untersuchen, so hat man weiterhin jene Methoden heranzuziehen, welche auf die Betrachtung der gestörten oder der Nachbarbewegungen zu einer be-

[1]) F. Grashof, Theoretische Maschinenlehre, Bd. II, Leipzig, 1896.

[2]) C. Campani, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 2, H. 1, Art. 4.

[3]) Bezügl. der Literatur s. insbes. A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 6. Aufl. 1924. R. Grammel, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. Bd. 1, S. 92. 1922; Th. Pöschl, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 3, S. 297. 1923; ferner Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 2, Art. 10 (R. v. Mises) Nr. 19b, u. R. v. Mises, Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 22, S. 33. 1911. Ferner W. Müller, ZS. f. techn. Physik, Bd. 4, S. 88. 1923.

stimmten Bewegung hinauslaufen, dies sind die Methode der kleinen Schwingungen und das Energiekriterium der Stabilität.

Neben den auf diese Weise erhaltenen kritischen Drehzahlen, die als solche „erster Art" bezeichnet werden, gibt es aber noch andere als „kritische Drehzahlen zweiter Art" bezeichnete kritische Zustände, die sich ebenfalls durch auffallende Unruhe des Ganges kundgeben, deren Entstehung aber der Mitwirkung besonderer Umstände (wie Eigengewicht oder zusätzliche periodisch veränderliche Drehmomente) zuzuschreiben ist. Auch diese Bewegungsformen wurden in den letzten Jahren vielfach untersucht, ihr Stabilitätscharakter scheint aber bis jetzt noch nicht einwandfrei festgestellt zu sein.

Ein ähnliches Problem liegt auch der Theorie der rotierenden Hängespindeln zugrunde, die FÖPPL[1]) bearbeitet hat, es handelt sich dabei um die Stabilität einer in einem Kugelgelenk gelagerten Welle. FÖPPL findet, daß die gleichförmige Drehung labil wird, sobald die Drehzahl zwischen der Schwingungszahl der Welle als starres Pendel und der ihrer elastischen Querschwingungen liegt.

30. Die Gleichungen für eine beliebig besetzte Welle. Diese sind in allgemeiner Form von GRAMMEL angegeben worden. Es ist vor allem darauf hinzuweisen, daß es sich dabei nicht schlechthin um eine Resonanzerscheinung zwischen der Drehgeschwindigkeit der Welle und einer ihrer transversalen („zirkularpolarisierten") Eigenschwingungen handelt. Dies trifft vielmehr nur dann zu, wenn die Trägheitsmomente der Scheiben vernachlässigbar sind. Aus einer Drehung der Welle mit der Winkelgeschwindigkeit ω wird erst durch Hinzutreten einer ebenso raschen Eigendrehung der Scheiben um die Welle ein vollständiger Umlauf. Die Frage hat daher so zu lauten: Wie groß sind diejenigen Winkelgeschwindigkeiten λ, mit welchen die zu einer ebenen Kurve ausgebogene und selbst mit ω angetriebene Welle stationär um ihre Ruhelage (das ist die Verbindungslinie ihrer Achsen) umlaufen kann?

Die Welle habe kreisförmigen Querschnitt und trage n senkrecht auf sie aufgesetzte dreisymmetrische Scheiben, deren Schwerpunkte x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ auf der Wellenachse liegen mögen. Die Massen der Scheiben seien m_i, ihre Trägheitsmomente in bezug auf die Wellenachse C_i und in bezug auf die Querachsen A_i. Es seien ferner die Einflußzahlen für die Kräfte α_{ik} und für die Momente β_{ik} (das sind die Durchbiegungen im Punkte x_i, hervorgerufen durch eine im Punkte x_k angreifende Kraft bzw. ein dort angreifendes Moment); weiter seien $\alpha'_{ik}, \beta'_{ik}$ die entsprechenden Neigungen, so gilt

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \qquad \beta_{ik} = \beta_{ki}, \qquad \alpha'_{ki} = \alpha'_{ik}, \qquad \beta'_{ki} = \beta'_{ik}, \tag{1}$$

wobei

$$\alpha'_{ik} = \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_k}, \qquad \beta_{ik} = \alpha'_{ik} = \beta'_{ik} = \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \alpha_{ik}}{\partial x_i^2} = \alpha''_{ik}. \tag{2}$$

Ferner seien y_i und φ_i die Durchbiegung und Neigung der Wellenachse unter dem Einflusse sämtlicher auf diese wirkenden Belastungen; diese bestehen aus den Fliehkräften in den Punkten x_k:

$$F_k = m_k y_k \lambda^2, \tag{3}$$

und den Kreiselmomenten in diesen Punkten x_k[2]):

$$K_k = (C_k \omega - A_k \lambda) \lambda \varphi_k. \tag{4}$$

Wir erhalten demnach die folgenden $2n$ Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \sum_k \alpha_{ik} F_k - \sum_k \alpha'_{ik} K_k, \\ \varphi_i &= \sum_k \alpha'_{ik} F_k - \sum_k \alpha''_{ik} K_k. \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

[1]) A. FÖPPL, Zivilingen. Bd. 41, S. 601. 1895, u. Vorlesungen Bd. 6, S. 66.
[2]) Siehe Kap. 8, Ziff. 39 ds. Bd. des Handb.

Sei für alle Scheiben

$$\frac{C_k}{A_k} = q = \text{konst.}$$

und setzt man ferner zur Abkürzung

$$(q\omega - \lambda)\lambda = \mu^2,$$

so nehmen die vorhergehenden Gleichungen die Form an:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \lambda^2 \sum_k \alpha_{ik} m_k y_k - \mu^2 \cdot \sum_k \alpha'_{ik} B_k \varphi_k, \\ \varphi_i &= \lambda^2 \sum_k \alpha'_{ik} m_k y_k - \mu^2 \cdot \sum_k \alpha'_{ik} B_k \varphi_k. \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (6)$$

Diese Gleichungen gehen für kontinuierliche Massenverteilungen unmittelbar in Integralgleichungen über, wobei die Kreiselwirkung als sehr klein ganz vernachlässigt werden kann. Dieses Problem gehört daher zu jenen, deren Ansatz unmittelbar auf die Form von Integralgleichungen führt.

Sollen diese $2n$ homogenen Gleichungen von Null verschiedene Lösungen y_i haben, so muß ihre Determinante verschwinden:

$$\Delta(\lambda, \omega) = 0. \qquad (7)$$

Diese Gleichung ist in λ vom Grade $4n$ und ist nicht symmetrisch: Ihre Wurzeln geben die Beantwortung der oben gestellten Frage.

Die „kritischen Drehzahlen" erhält man sodann durch die Bedingung und Aufsuchung der positiven unter den $2n$ Wurzeln der Gleichung

$$\Delta(\omega, \omega) = 0. \qquad (8)$$

Wegen der erwähnten Unsymmetrie lassen sich die bekannten, auf den Eigenschaften definiter quadratischer Formen beruhenden Ergebnisse über die Eigenwerte von Schwingungsproblemen nicht unmittelbar verwerten. Die bisher bekannten Ergebnisse enthalten keineswegs eine vollständige Klärung dieser Frage. Sicher ist nur, daß für $n = 1$ immer eine und nur eine reelle kritische Drehzahl existiert, während deren Anzahl für große n wahrscheinlich kleiner als n ist.

Außer diesen kritischen Zuständen „gleichläufiger Präzession" ist von STODOLA[1]) zuerst durch Versuche und dann theoretisch begründet worden, daß unter gewissen Umständen auch „gegenläufige" Präzessionsbewegungen zur Ausbildung gelangen, die durch die positiven unter den $2n$ Wurzeln ω der Gleichung

$$\Delta(-\omega, \omega) = 0 \qquad (9)$$

gegeben sind. Auch für diesen Fall ist bisher nur soviel sicher, daß für $n = 1$ stets zwei solcher kritischer Zustände des Gegenablaufs existieren. Sie sind nach den vorliegenden Erfahrungen weit weniger gefährlich als die des Gleichlaufs.

31. Näherungsverfahren. Die Ermittlung der $\frac{1}{2}n(n+1)$ Einflußzahlen $\alpha, \alpha', \alpha''$ und die Auflösung der Determinantengleichung $\Delta = 0$ ist bei größeren Werten von n außerordentlich mühevoll. Man hat daher zur Bestimmung der kritischen Drehzahlen von Wellen Näherungsverfahren ausgebildet, die ebenfalls von GRAMMEL[2]) systematisch geordnet und auf ihre Genauigkeit geprüft worden sind. Sie beruhen alle darauf, daß die Form der durchgebogenen Welle, wie sie sich unter dem Einflusse der Fliehkräfte und Kreiselmomente als Belastungen ergeben mag, schätzungsweise angenommen und daraus durch verschiedene Ver-

[1]) A. STODOLA, ZS. f. d. ges. Turbinenw. Bd. 15, S. 253, 264, 269. 1918.
[2]) Siehe Fußnote 3 von S. 534.

feinerungen die wirkliche Gleichgewichtsform ermittelt wird; durch diese ist dann auch die kritische Drehgeschwindigkeit selbst gegeben. Wir beschränken uns hier darauf, das Wesentliche dieser Näherungsverfahren ohne Berücksichtigung der Kreiselwirkung darzulegen; die Gleichungen (6) von Ziff. 30 nehmen in diesem Falle die einfachere Form an

$$y_i = \omega^2 \sum_k \alpha_{ik} m_k y_k. \qquad (i = 1, 2, \dots n) \qquad (1)$$

a) Das Verfahren von STODOLA[1]). Die Gleichgewichtsform der durchgebogenen Welle wird nach guter Schätzung angenommen und ω beliebig gewählt (am besten $\omega = 1$); die mit den entsprechenden Durchsenkungen y_i unter den Lastpunkten gerechneten Fliehkräfte F_i werden als Belastungen auf die Welle aufgebracht, und es wird mit diesen eine neue Biegelinie mit den Durchsenkungen y_i' gezeichnet. Die erste Biegelinie wird ähnlich mit sich selbst so verändert, daß sie mit der zweiten in einem Punkte x_i (möglichst nahe der Mitte) zur Deckung gelangt, was darauf hinauskommt, als ob sie nicht mit ω, sondern mit

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{y_i}{y_i'}}$$

als Drehgeschwindigkeit gerechnet worden wäre. Der Vorgang wird solange wiederholt, bis die neue Biegelinie in ihrem ganzen Verlaufe mit der früheren hinreichend genau übereinstimmt, was erfahrungsgemäß (auch bei stark abweichender Ausgangskurve) in der Regel schon nach ein bis zwei Schritten der Fall ist.

Durch diesen Vorgang sind auch die in den Gleichungen (1) auftretenden Summen

$$a_i = \sum_k \alpha_{ik} m_k y_k = \frac{y_i'}{\omega^2} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

als bekannt anzusehen; sie bedeuten nichts anderes als die Durchsenkungen der Punkte x_i unter den „Belastungen" $m_k y_k$ (oder unter den F_k für $\omega = 1$) in allen Punkten x_k. Nach ihrer Ermittlung ist die gesuchte kritische Drehgeschwindigkeit durch die Gleichung gegeben

$$\omega' = \sqrt{\frac{y_i}{a_i}}.$$

Um die Willkür auszuschalten, die in der Wahl des Punktes x_i liegt, für den man die Konstruktion ausführte, bestimmt man die Durchbiegungen a_i in den Punkten x_i, die durch Einheitskräfte in allen Lastpunkten hervorgerufen werden; dann ist

$$a_i = \sum_k \alpha_{ik}; \qquad (2)$$

und ω^2 ist durch die Gleichung gegeben

$$\sum y_i = \omega^2 \sum a_k m_k y_k. \qquad (3)$$

Zur Festlegung der y_i wird wieder eine Biegelinie willkürlich angenommen und wie zuvor verbessert. Werden in erster Wahl alle y_k gleich groß angenommen, so findet man

$$\frac{1}{\omega^2} \approx \frac{1}{n} \sum a_k m_k,$$

1) A. STODOLA, Dampf- und Gasturbinen, S. 381 ff.

eine Gleichung, die (ungefähr) dasselbe bedeutet und auch (ungefähr) von derselben Genauigkeit ist wie die von DUNKERLEY[1]) ohne zureichende Begründung angegebene Formel

$$\frac{1}{\omega^2} = \sum_k \frac{1}{\omega_k^2}, \tag{4}$$

in der ω_k diejenige kritische Zahl bedeutet, die der Welle mit der Einzelmasse m_k in x_k zukommen würde.

b) Das Verfahren von BLAESS und KULL[2]). Dieses besteht darin, daß alle Gleichungen (1) mit den Scheibengewichten $m_i g$ multipliziert und addiert werden; es folgt die (von BLAESS angegebene) Gleichung

$$g\sum m_i y_i = \omega^2 \sum_k \Big(\sum_i \alpha_{ik} m_i g\Big) m_k y_k = \omega^2 \sum_k \eta_k m_k y_k, \tag{5}$$

in der die n Größen

$$\eta_k = \sum_i \alpha_{ik} m_i g \tag{6}$$

die statischen Durchbiegungen der wagrecht gedachten Welle durch die in allen Punkten x_i hängenden Eigengewichte $m_i g$ bedeuten. Diese Biegelinie muß bei Dampfturbinenwellen stets sorgfältig bestimmt werden. Für $y_k = \eta_k$ ergibt sich daraus insbesondere die Gleichung von KULL

$$g\sum_i m_i \eta_i = \omega^2 \sum_i m_i \eta_i^2, \tag{7}$$

die praktisch schon außerordentlich genaue Ergebnisse liefert.

c) Das Verfahren von Delaporte[3]) beruht darauf, daß die Gleichungen (1) mit $m_i y_i$ multipliziert und addiert werden:

$$\sum_i m_i y_i^2 = \omega^2 \sum_i \Big(\sum_k \alpha_{ik} m_k y_k\Big) m_i y_i = \omega^2 \sum_i e_i m_i y_i. \tag{8}$$

Darin bedeuten die Größen e_i wie in a) die Senkungen der Punkte x_i durch die in allen Punkten x_k wirkenden Belastungen $m_k y_k$.

Diese Verfahren können, wie insbesondere STODOLA gezeigt hat, auch für die Bestimmung der kritischen Drehzahlen höherer Ordnung und für mehrfach gelagerte Wellen nutzbar gemacht werden[4]).

32. Wellen mit ausgebreiteter Besetzung. a) Ohne Berücksichtigung der Kreiselmomente. Die Aufsuchung der kritischen Geschwindigkeiten erfolgt mit Hilfe desselben Gedankens wie bei Einzelmassen: Ermittlung der Gleichgewichtsform der durchgebogenen Welle unter dem Einflusse der Fliehkräfte als Belastungen. Zwischen dem Biegemoment M und der Querkraft Q der durchgebogenen Welle[5])

$$M = EJ\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad Q = \frac{dM}{dx}$$

und ihrer auf die Längeneinheit bezogenen Belastung q besteht die Beziehung

$$q = \mu y \omega^2 = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\Big(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\Big), \tag{1}$$

[1]) ST. DUNKERLEY, Phil. Trans. (A) Bd. 185, S. 279. 1894; Proc. Roy. Soc. London Bd. 54, S. 365. 1893.

[2]) V. BLAESS, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 58, S. 183. 1914; G. KULL, ebenda Bd. 62, S. 249, 270. 1918.

[3]) DELAPORTE, Rev. de mécan. Bd. 12, S. 517. 1903.

[4]) W. v. BOROWICZ, Diss. München 1915.

[5]) Vgl. die Biegungstheorie in Bd. VI ds. Handb.

in der μ die Masse der Längeneinheit der Welle, E die Elastizitätszahl, J das Flächenträgheitsmoment des Wellenquerschnitts bedeuten. Insbesondere erhält man für E = konst., J = konst. die Bestimmungsgleichung

$$y^{(IV)} - \frac{\mu\omega^2}{EJ}\,y = 0. \tag{2}$$

Es kommt darauf an, jene „Eigenwerte" $\varkappa^4 = \frac{\mu\omega^2}{EJ}$ zu finden, für welche diese Differentialgleichung von Null verschiedene Lösungen hat. Durch Benutzung des e-Ansatzes erhält man für $\varkappa$ gemäß den Randbedingungen für die verschiedenen Lagerungen der Welle je eine transzendente Gleichung, durch deren Wurzeln die kritischen Werte von ω (oder $\varkappa$) bestimmt sind.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (2) lautet

$$y = a\,\mathfrak{Cof}\,\varkappa l + a'\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa l + b\cos\varkappa l + b'\sin\varkappa l. \tag{3}$$

Für die beiderseits frei aufliegende Welle von der Länge l und der Masse $m_0 = \mu l$ führen die Randbedingungen

$$x = 0,\ x = l: \qquad y = 0,\ y'' = 0 \tag{4}$$

zu dem folgenden Wert für die kleinste kritische Zahl:

$$(\varkappa l = \pi) \qquad \omega = \pi^2\sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^3}} = 9{,}87\sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^3}}\,; \tag{5}$$

für die beiderseits eingespannte (feste Tangente) Welle von der Länge l gilt:

$$\left(\varkappa l = \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \omega = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^3}} = 22{,}2\sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^3}} \tag{6}$$

und für die einseitig eingespannte Welle von derselben Länge l:

$$\left(\varkappa l = 1{,}19\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad \omega = 3{,}494\sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^3}}. \tag{7}$$

b) **Mit Berücksichtigung der Kreiselmomente**[1]). Für eine gerade, masselose Welle von der Länge l, die gleichmäßig dicht mit gleich großen, dünnen, senkrecht aufgekeilten und einander nirgends berührenden Scheiben, deren auf die Längeneinheit entfallende Masse m und deren Durchmesser D ist, hat man als Belastung für die Längeneinheit zu setzen

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{dK}{dx} + my\omega^2 = \frac{d^2M}{dx^2}, \tag{8}$$

und da für Gleichläufigkeit das Kreiselmoment den Betrag[2])

$$K = (C - A)\,\omega^2 y' = \frac{mD^2}{16}\,y', \tag{9}$$

hat, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$y^{IV} - \frac{m\omega^2}{EJ}\left(\frac{D^2}{16}\,y'' + y\right) = 0. \tag{10}$$

Grammel zeigt zunächst, daß für $4l < \pi D$ überhaupt keine (endliche und reelle) kritische Geschwindigkeit vorhanden ist; die Kreiselwirkung der Scheiben kann

---

[1]) R. Grammel, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 64, S. 911. 1920.
[2]) Siehe Kap. 8, Ziff. 39 ds. Bd. des Handb.

demnach unter gewissen Bedingungen das Auftreten einer kritischen Geschwindigkeit vollständig verhindern. Für $n < \frac{4l}{\pi D} = \beta$ und freie Auflagerung der Welle sind die kritischen Drehzahlen durch die Gleichung gegeben

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ}{m l^4}} \cdot \frac{n^2 \pi^2}{\sqrt{1 - (n/\beta)^2}}, \tag{11}$$

sie sind daher nur in endlicher Anzahl ($n < \beta$) vorhanden. Für andere Auflagerungen lassen sich die kritischen Drehzahlen durch zeichnerische Auflösung der zugehörigen transzendenten Gleichung ermitteln. Die einseitig eingespannte Welle hat stets mindestens eine kritische Geschwindigkeit, und zwar nur eine, sobald $l \leq \pi D/4$, zwei wenn $l \leq 2\pi D/4$ usw. Bezüglich der kritischen Geschwindigkeiten bei Gegenlauf gilt, daß bei der beiderseits frei gelagerten Welle stets unendlich viele dieser Art möglich sind, bei der einseitig gelagerten gibt es solche nur in endlicher Anzahl und überhaupt keine, sobald $l < 0{,}225\,\pi D$. In Wirklichkeit kommt bei Bewegungen dieser Art noch die innere Reibung (Zähigkeit) des Wellenmaterials hinzu, die die Ausbildung solcher kritischer Zustände völlig zu verhindern imstande ist.

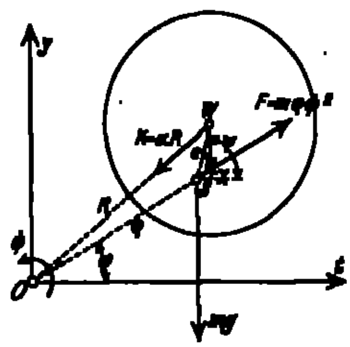


Abb. 38. Kritische Zustände für die schwere Scheibe.

33. Kritische Zustände zweiter Art. Bei den bisher betrachteten „kritischen Zuständen erster Art" liefert die elementare Theorie für die durchgebogene Welle nur eine Schar zueinander ähnlicher Gleichgewichtsformen; außer diesen Zuständen hat STODOLA[1]) auffallende Schwingungserscheinungen auch bei Drehzahlen beobachtet, die durch diese elementare Theorie nicht ausgezeichnet sind. Insbesondere traten diese Erscheinungen bei wagrecht liegenden Wellen auf, bei denen das Eigengewicht der Scheibe im Ruhezustande eine Durchbiegung der Welle veranlaßt, während bei der Bewegung sternförmige Bahnkurven des Wellenmittels entstehen, für deren Entstehung zunächst eine ausreichende Begründung fehlte.

Für die Bewegung einer mit einer schweren Scheibe belasteten Welle ist nur eine Sonderlösung der Bewegungsgleichungen bekannt, die der halben kritischen Drehzahl der Welle ($\omega_k = \alpha/m$) entspricht und die als Bahnkurve des Wellenmittels eine Pascalsche Schnecke ergibt. Mit den Bezeichnungen der Abb. 38 lauten die Bewegungsgleichungen bei Benutzung der Koordinaten ϱ, φ, χ:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2 &= -\frac{\alpha}{m}(\varrho + e\cos\chi) - g\sin\varphi, \\ \frac{d}{dt}\left[(\varrho^2 + k^2)\dot{\varphi} + k^2\dot{\chi}\right] &= -g\varrho\cos\varphi, \\ k^2(\ddot{\varphi} + \ddot{\chi}) &= \frac{\alpha}{m} e\varrho\sin\chi. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dabei ist angenommen, daß $e = \overline{SW}$, die Entfernung des Schwerpunktes der Scheibe vom Wellenmittel, k der Trägheitsarm der Scheibe und α die Feder-

[1]) A. STODOLA, Schweiz. Bauztg. Bd. 68, S. 197, 209. 1916; Bd. 69, S. 93. 1917; Bd. 70, S. 229, 241. 1917.

kraft der Welle ist. Die von STODOLA gefundene Sonderlösung dieses Systems ist durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned}
&\varrho = \varrho_0 - \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t = \frac{e}{1-(\omega/\omega_k)^2} - \frac{2g}{\omega_k^2}\sin\frac{\omega_k t}{2} = \frac{4e}{3} - \frac{2g}{\omega_k^2}\sin\frac{\omega_k t}{2},\\
&\vartheta = \frac{\omega_k}{2}t, \qquad \dot\varphi = \omega = \frac{\omega_k}{2} = \text{konst.},\\
&\chi = \pi, \qquad \dot\chi = \ddot\chi = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

während die Form der Bahnkurven von S und W in Abb. 39 zu ersehen sind.

Eine grundsätzliche Klärung der damit im Zusammenhang stehenden Fragen brachte die Dissertation von SCHRÖDER[1]), der erkannte, daß ein gleichförmiger Umlauf der Welle auch bei periodischen Schwankungen des Drehmomentes eintreten kann und sich demgemäß ganz allgemein die Frage vorlegte, welche Form das auf die Welle wirkende Drehmoment M haben muß, damit Wellenumläufe mit konstanter Drehgeschwindigkeit ω möglich sind. Das Ergebnis ist

$$M = A\sin[(\omega - \omega_k)t + \gamma] + A'[\sin(\omega + \omega_k)t + \gamma']. \tag{3}$$

Die Konstanz der Drehzahl bei veränderlichem Drehmoment wird durch entsprechende Änderungen der Momente der Bewegungsgrößen erkauft, und die dabei auftretenden Bewegungsformen sind gerade die von STODOLA beobachteten und bisher unaufgeklärt gebliebenen Erscheinungen.

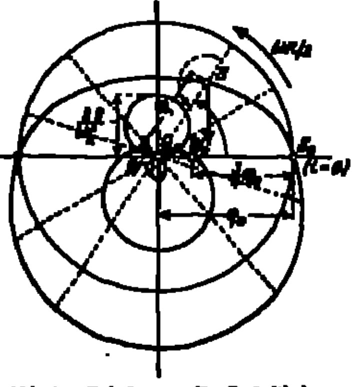


Abb. 39. Bahnkurven für die kritische Geschwindigkeit zweiter Art.

In jüngster Zeit hat STODOLA[2]) noch weitere kritische Zustände beobachtet, die in der Nachgiebigkeit der Ölschicht in den Lagern ihren Ursprung haben, und die von HUMMEL[3]) eingehend untersucht worden sind.

34. Stabilität. In dem Ergebnis, daß für gewisse kritische Geschwindigkeiten (erster Art) die Wellenausschläge unbestimmt (oder unendlich) werden, ist nicht enthalten, daß die Welle bei diesen Drehzahlen überhaupt ausschlagen müsse. Es sind vielmehr noch gewisse, diese Ausschlagen auslösende Bedingungen notwendig, welche die geschilderte Erscheinung veranlassen. Als solche Ursachen kommen vor allem natürliche Unsymmetrien in Betracht, kleine Abweichungen oder Exzentrizitäten der Schwerpunkte aus dem Wellenmittel. Die Behandlung der Erscheinung der kritischen Drehzahlen wird damit auch in dieser Hinsicht ganz ähnlich mit der der (Eulerschen) Knickung, bei der man auch das Ausknicken selbst durch eine geringe Exzentrizität des Kraftangriffes erklären zu können glaubt.

Unter dieser Voraussetzung ist es tatsächlich möglich, die Frage der Stabilität für eine der im vorhergehenden gefundenen stationären Bewegungen zu verfolgen, wobei es nicht allein auf das Verhalten bei der kritischen Geschwindigkeit selbst, sondern vor allem auf das bei Geschwindigkeiten über dieser kritischen (im „überkritischen Gebiet“) ankommt.

---

1) P. SCHRÖDER, Die kritischen Zustände zweiter Art rasch umlaufender Wellen, Diss. Stuttgart 1924.

2) A. STODOLA, Schweiz. Bauzeitung Bd. 78, S. 265. 1926.

3) CH. HUMMEL, Forschungsarbeiten auf d. Gebiete des Ing.-Wesens Heft 287. Berlin 1926.

Zunächst erkennt man, daß nach den Bezeichnungen des vorigen Abschnittes und der Abb. 38 die Gleichgewichtslagen der Welle durch die Gleichungen gegeben sind:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{a) für } \omega < \omega_k = \sqrt{\frac{a}{m}}: & \varrho_0 = \frac{e}{1-(\omega/\omega_k)^2}, & \chi = \pi, & \text{(Abb. 40a)} \\ \text{b) für } \omega > \omega_k: & \varrho_0 = \frac{e}{(\omega/\omega_k)^2 - 1}, & \chi = 0. & \text{(Abb. 40b)} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Insbesondere ist $\varrho_0 = 0$ für $\omega = \infty$, ein Ergebnis, das auch für beliebig viele Massen auf der Welle zutrifft, und das man als „Selbstzentrierung im überkritischen Gebiet" bezeichnet. Für $\omega/\omega_k = 1$ ist $\varrho_0 = \infty$, was nur bedeutet, daß die elementare Biegelehre in diesem Falle keine zutreffende Aussage ergibt.

Um die Stabilität im überkritischen Gebiet zu prüfen, untersucht man die Nachbarbewegungen entweder nach der Methode der kleinen Schwingungen

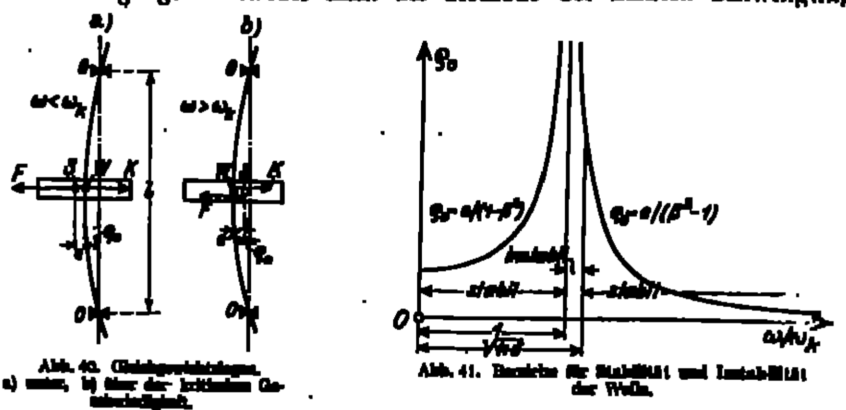


Abb. 40. Gleichgewichtslagen. a) unter, b) über der kritischen Geschwindigkeit.

Abb. 41. Bereiche für Stabilität und Instabilität der Welle.

(STODOLA) oder nach dem Energiekriterium (PÖSCHL) und erhält für Stabilität die Bedingung

$$\frac{e}{h} < \left\{\frac{[(\omega/\omega_k)^2 - 1]^2}{3(\omega/\omega_k)^2 + 1}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

Daraus ergibt sich bei gegebenen h und e jener Wert von ω/ω_k, bei dem die Stabilität beginnt:

$$\delta = \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 - 1 = \sqrt[3]{\frac{4e^2}{h^2}}, \qquad \text{wobei} \qquad \varrho_0 = \sqrt[3]{\frac{e\,h^2}{4}}.$$

Man erhält also Instabilität nur in dem kleinen, in Abb. 41 gekennzeichneten Bereiche, der besonders untersucht werden muß.

Benutzt man statt der angenäherten $\left(\frac{1}{\varrho} \infty y''\right)$ die genaue Gleichung der elastischen Linie, wie dies von v. MISES[1]) geschehen ist, so zeigt sich, daß weit unter und weit über der kritischen Geschwindigkeit die elementare Biegelehre sehr gute Annäherungen liefert; für die kritische Geschwindigkeit selbst bleiben die Durchbiegungen durchaus endlich und nehmen mit wachsendem e zu. Für $e = 0$ ergibt sich die Gerade als einzige Gleichgewichtsform, während der linearisierte Ansatz eine unbestimmte Aussage liefert. Daraus ist zu entnehmen, daß die elementare Theorie für die Bewegung bei der kritischen Geschwindigkeit selbst nur sehr ungenaue Aussagen liefert. Diese Verfeinerung stellt sich übrigens schon heraus[2]), wenn man für y' im Nenner des genauen Ausdruckes für $\frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^3}$ den aus der elementaren Theorie gewonnenen Näherungswert einführt.

[1]) R. v. MISES, Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 22, S. 33. 1911.
[2]) TH. PÖSCHL, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 3, S. 297. 1923.

Bezüglich der kritischen Zustände zweiter Art sei auch in der Stabilitätsfrage auf die Dissertation von SCHRÖDER verwiesen.

Eine allgemeine Untersuchung der Bahnkurven des hier vorliegenden dynamischen Problems nach den Methoden der Himmelsmechanik ist BEHRENS[1]) zu verdanken.

VI. Technische Anwendungen des Kreisels.

35. Vorbemerkungen. Im folgenden sind diejenigen Anwendungen der Kreiseltheorie zusammengestellt, bei denen der Kreisel[2]) als selbständiger Apparat auftritt und dabei einem besonderen technischen Zwecke dient. Nicht aufgezählt sind die schon früher[3]) behandelten physikalischen, geophysikalischen und ballistischen Anwendungen des Kreisels (Gyroskop, Barygyroskop, Gyrostat, Inklinations- und Deklinationskreisel, rotierendes Langgeschoß usw.). Daneben gibt es noch zahlreiche andere Erscheinungen, bei denen die Umlagerung der Achse eines sich drehenden Körpers bald erwünschte, bald unerwünschte Kreiselwirkungen hervorbringt; diese werden im folgenden nur gestreift (Ziff. 41). Hinsichtlich der Kreiselwirkung schiefgestellter Scheiben auf dünnen Wellen sehe man Ziff. 32. Die Bedeutung, die die Theorie des Kreisels in der älteren Atomistik für die Erklärung der Erscheinungen des Magnetismus, der Elektrizität und des Lichtes hatte, besitzt für die moderne Auffassung nur noch historischen Wert; die große Wichtigkeit der Kreiselgesetze für die neue Dynamik des Elektrons dagegen wird in anderen Kapiteln dieses Handbuches ausführlich erörtert.

Wir setzen für die folgenden Ziffern die im vorangehenden Kapitel 8 entwickelte Theorie des Kreisels voraus; dabei wird es sich allerdings zumeist nur um schnelle symmetrische Kreisel handeln, deren Figurenachse mit der Schwungachse und mit der Drehachse ohne nennenswerten Fehler verwechselt werden darf. Wird ein solcher Kreisel, der um seine Figurenachse (Trägheitsmoment C) mit der Winkelgeschwindigkeit ν umläuft und also einen Eigenschwung vom Betrag $S = C\nu$ besitzt, zu einer erzwungenen Drehung μ um eine Achse veranlaßt, die mit der Figurenachse den Winkel ϑ bildet, so wird ein Kreiselmoment (Deviationsmoment) geweckt[4]), dessen Betrag

$$D = C\mu\nu\sin\vartheta \tag{1}$$

ist, und dessen Achse so auf den Vektoren μ und ν senkrecht steht, daß es die Tendenz hat, die Eigendrehung ν mit der Zwangsdrehung μ auf kürzestem Wege in gleichstimmigen Parallelismus zu bringen. Derartige Kreiselmomente spielen als gyroskopische Glieder eine entscheidende Rolle bei der sog. gyroskopischen Stabilisierung, deren Theorie schon früher[5]) allgemein entwickelt worden ist und im folgenden noch durch Einzelbeispiele belegt werden wird[6]).

---

[1]) W. BEHRENS, Ein der Theorie der Laval-Turbine entnommenes mechanisches Problem, behandelt mit Methoden der Himmelsmechanik. Diss. Göttingen 1911.

[2]) Über die Begriffsbestimmung des Kreisels s. Kap. 8, Ziff. 11 ds. Bd. des Handb.

[3]) Kap. 8, Ziff. 32, 43, 44, 45, 55 ds. Bd. des Handb.

[4]) Siehe Kap. 8, Ziff. 39 ds. Bd. des Handb.

[5]) Siehe Kap. 8, Ziff. 55 ds. Bd. des Handb.

[6]) Als wichtigste Literatur kommen folgende Monographien in Betracht: F. KLEIN u. A. SOMMERFELD, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1897–1910, namentlich Heft 4; R. GRAMMEL, Der Kreisel und seine Anwendungen, Braunschweig 1920; E. W. BOGAERT, L'effet gyrostatique et ses applications, Brüssel 1912; H. CRABTREE, An elementary treatment of the theory of spinning tops and gyroscopic motion, London 1909; A. GRAY, A Treatise on gyrostatics and rotational motion, London 1918; H. LORENZ, Technische Anwendungen der Kreiselbewegung, Berlin 1919; H. USENER, Der Kreisel als Richtungsweiser, München 1917.

36. Geradlaufapparate für Torpedos. Zur Geradführung eines abgefeuerten Torpedos im Wasser sind zwei Kreiselmechanismen ersonnen worden, einer mit unmittelbarer und einer mit mittelbarer Stabilisationswirkung.

a) Der Howellapparat. Dieser besteht aus einem Schwungrad, dessen Achse wagerecht und quer zum Torpedokörper gestellt ist, beim Abschuß auf etwa 10000 minutliche Umdrehungen angetrieben wird und in seiner Drehung zugleich einen Energievorrat mitbekommt, aus welchem die Vortriebsmaschinen, zwei kleine Heckpropeller, gespeist werden. Die Theorie der gyroskopischen Stabilisation zeigt jedoch[1], daß eine völlige Richtungsstabilisierung des Torpedos durch den Howellkreisel gegenüber äußeren Störungen grundsätzlich nicht erreichbar ist, und tatsächlich sind inzwischen sämtliche Marinen zu der nun zu besprechenden indirekten Stabilisierung übergegangen.

b) Der Obryapparat[2]. Dieser in das Hinterteil des Torpedokörpers eingebaute Apparat besteht (Abb. 42) aus einem astatischen, mit seiner Figurenachse (s) in die Längsrichtung des Torpedos orientierten Kreisel k (in cardanischer Aufhängung r_1, r_2), der aber jetzt nur die Aufgabe hat, durch ein mit dem äußeren Ring (mit Stift s und Gabel g) verbundenes Stellzeug die Steuerung eines Hilfsmotors zu betätigen, der seinerseits erst die kompensierenden Steuerbewegungen ausführbarer Hilfsruder veranlaßt. Hier wirkt der Kreisel nur als Relais und kann daher als Präzisionsinstrument in sehr kleinen Abmessungen hergestellt werden. Der Schwungringdurchmesser beträgt 76 mm, das Gewicht 800 g, die Drehzahl 9000 Min. Der Kreisel wird im Momente des Abschusses durch einen sog. „Impulssektor" (z) mit Zahnrad in Drehung versetzt, der durch Auslösung einer Feder abgezogen wird.

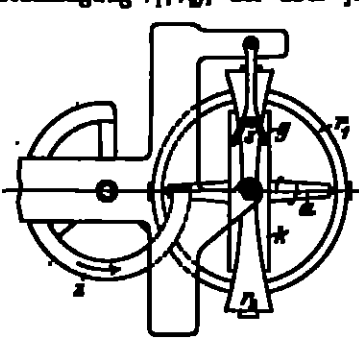


Abb. 42. Obryapparat.

Für die theoretische Behandlung erhebt sich einerseits die Frage, welche Größe des Eigenschwunges S des Kreisels erforderlich ist, damit die Relativbewegung der Schwungachse und weiterhin der Figurenachse gegen den Torpedokörper genügt, um die Steuerung des Hilfsmotors zu betätigen; andererseits ist es nötig, den Einfluß der Fehlerquellen abzuschätzen, von denen zu nennen sind: der Rückdruck der Steuerung, die Reibung in den Lagern, exzentrische Schwerpunktslage, Einfluß der Erddrehung.

Seien x, y die Koordinaten eines Punktes auf der Figurenachse, in der Entfernung Eins vom Schwerpunkt, A_1, A_2 die Trägheitsmomente der beiden Ringe r_1, r_2 der cardanischen Aufhängung, A das äquatoriale Trägheitsmoment des Kreisels, M das ablenkende Drehmoment, hervorgerufen durch das Stellzeug und durch die Reibung, so lauten die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen aus der Normallage ($x = 0$, $y = 0$):

$$\left.\begin{aligned}(A + A_1)\ddot{x} + S\dot{y} &= M,\\ (A + A_2)\ddot{y} - S\dot{x} &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

insofern nach Ziff. 35, Gleichung (1) $-S\dot{y}$ und $S\dot{x}$ die durch die Drehungen $\dot{y}$ und $\dot{x}$ geweckten Kreiselmomente vorstellen. Die Lösung lautet für M = konst.:

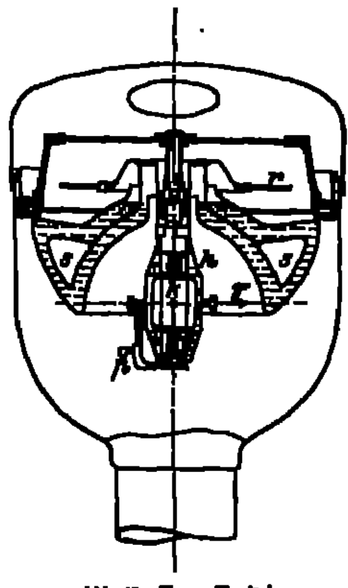
$$x = (A + A_2)\frac{M}{S^2}(1 - \cos\alpha t), \qquad y = \frac{M}{S}\left(t - \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t\right) \tag{2}$$

[1] Ausführlich entwickelt von R. Grammel, Der Kreisel, § 22.
[2] W. J. Sharp, Engineering Bd. 66, S. 89. 1898.

mit
$$\alpha^2 = \frac{S^2}{(A+A_1)(A+A_2)},$$
woraus hervorgeht, daß der Kreisel mit seiner Figurenachse zwar im Laufe der Zeit in der y-Richtung weiter und weiter ausweichen kann und dann schließlich seine Stabilisierfähigkeit verlieren muß, daß aber dieses Ausweichen um so langsamer erfolgt, je größer der Eigenschwung S des Kreisels ist; die Amplitude der überlagerten Schwingungen ist sogar mit $1/S^2$ proportional. Die Größe von S muß so bemessen werden, daß während der ganzen Schußdauer der Ausdruck Mt/S unter einem bestimmten, durch die Zielgröße bedingten Betrag bleibt.

Tatsächlich läßt es sich nie ganz erreichen, daß der Schwerpunkt des Kreisels mit dem Aufhängepunkt zusammenfällt, der Kreisel also streng astatisch ist. Dann aber tritt eine Zusatzbewegung hinzu, die beispielsweise in dem Falle, daß der Schwerpunkt auf der Figurenachse liegt, eine pseudoreguläre Präzession der wagerechten Figurenachse um die Lotlinie ist[1]) und also eine langsame Fälschung der Schußrichtung hervorruft, die in praktischen Fällen gerade an der Grenze des Zulässigen bleibt, aber auch absichtlich ausgenutzt werden kann, wenn der Torpedo eine gekrümmte Schußbahn beschreiben soll (sog. Winkeltorpedo).

Der Einfluß der Erddrehung besteht darin, daß der Obryapparat den Torpedo nicht relativ zur Erde, sondern im Fixsternsystem zu stabilisieren sucht, und muß bei großen Schußweiten ebenso berücksichtigt werden, wie dies in der Ballistik schon längst üblich ist.


Abb. 43. Kompaßkreisel.

37. Der Kompaßkreisel[2]). Seit der Vermehrung der Eisenmassen im Schiffbau (insbesondere bei Kriegsschiffen) und der Mitführung elektrischer Maschinen war die Herstellung eines von den magnetischen Eigenschaften der Erde unabhängigen Nordweisers ein dringendes Erfordernis geworden. Die Lösung dieses Problems brachte der von Anschütz-Kaempfe[3]) konstruierte Kompaßkreisel, der ein Wunderwerk moderner Präzisionsmechanik darstellt.

Die Hauptmerkmale und Unterschiede gegen die vorhergehenden Konstruktionen — zurück bis zum Foucaultschen Gyroskop — sind die folgenden: 1. Beständiger Antrieb des Kreisels durch einen in den Kreiselkörper selbst eingebauten Drehstrommotor, durch den die Drehzahl des Kreisels für beliebig lange Zeit innerhalb der erforderlichen Genauigkeit konstant erhalten werden kann; 2. schwimmende Lagerung des Kreisels in einem Gefäß mit Quecksilber (dadurch Herabsetzung der Reibung auf einen Mindestbetrag), derart, daß der Gesamtschwerpunkt des Kreiselkörpers unter dem Metazentrum liegt, so daß das Gleichgewicht auch bei ruhendem Kreisel stabil ist; 3. Anbringung einer Luftdämpfung für die Drehung um die Lotrechte, die der Erhebung χ über dem Horizont proportional ist.

[1]) Siehe Kap. 8, Ziff. 29 ds. Bd. des Handb.
[2]) Bezüglich der Entwicklungsgeschichte des Kompaßkreisels vgl. O. Martienssen, Phys. ZS. Bd. 20, S. 21. 1919; A. Keller, Prometheus, Bd. 31, S. 65, 75, 83. 1919; H. Beghin, C. R. Bd. 173, S. 288. 1921.
[3]) Jahrb. d. schiffbautechn. Ges. Bd. 10, S. 352, 561. 1909, sowie die Sonderschrift von Anschütz & Co., Der Kreiselkompaß, Kiel 1910.

Die technische Einrichtung ist in Abb. 43 schematisch dargestellt. An dem Schwimmer s, der das cardanische Gehänge ersetzt, hängt das Gehäuse, in dem die Achse des Kreisels k wagerecht gelagert ist. Das Verbindungsstück trägt oben die Kompaßrose r. Für die Lagenänderungen des Schwimmkörpers gegenüber dem Gehäuse ist genügend Spielraum gelassen.

Der Durchmesser des Kreisels beträgt 14,8 cm, sein Trägheitsmoment um die Figurenachse $C = 156000$ g/cm², die Drehzahl 20000/min, so daß der Eigenschwung $S = C\omega = 28{,}10^{6}$ g/cm sec⁻¹ ist.

Die Darstellung des Bewegungsverlaufes verlangt wieder die Aufstellung der Bewegungsgleichungen. Wenn χ die Erhebung des „Nordpols" der Figurenachse über den Horizont, ψ die Westabweichung dieses Nordpols von der Nordrichtung des Meridians, $sG\sin\chi \backsim sG\chi$ das Schweremoment für den Ausschlag χ um die wagerechte Knotenlinie, A und B die Trägheitsmomente des schwimmenden Systems um die Lotachse und um die Knotenlinie, ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde und Φ die geographische Breite bedeuten, dann lauten, wie schon früher[1]) abgeleitet, die Bewegungsgleichungen um diese beiden Achsen mit Berücksichtigung der Kreiselwirkung und bei Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung in χ und ψ:

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{\psi} + S(\dot{\chi} + \omega\psi\cos\Phi) &= 0,\\ B\ddot{\chi} - S(\dot{\psi} + \omega\sin\Phi) + sG\chi &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Diese Gleichungen stellen Schwingungen vor um eine Gleichgewichtslage ψ_0, χ_0, die durch Nullsetzen der punktierten Glieder entsteht:

$$\psi_0 = 0, \qquad \chi_0 = \frac{S\omega\sin\Phi}{sG}, \tag{2}$$

und mithin eine Erhebung oder Senkung des Nordpols des Kreisels über den Horizont bedeutet, je nachdem die geographische Breite positiv (nördlich) oder negativ (südlich) ist. Man sorgt durch geeignete Bemessung der Metazenterhöhe s dafür, daß χ_0 von der Größenordnung weniger Bogenminuten bleibt. Dann aber darf man unbedenklich die Trägheitswirkung des ersten Gliedes der zweiten Gleichung (1) außer acht lassen. Setzt man den so verbleibenden Wert von χ aus der zweiten Gleichung (1) in die erste ein, so wird diese zu

$$\left(A + \frac{S^2}{sG}\right)\ddot{\psi} + S\omega\cos\Phi\cdot\psi = 0, \tag{3}$$

und dies bedeutet eine Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{S^2 + AsG}{sGS\omega\cos\Phi}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{S}{sG\omega\cos\Phi}}. \tag{4}$$

Die unter der Quadratwurzel vorgenommene Vereinfachung ist deswegen unbedenklich, weil der Schwung S etwa 150mal so groß als $\sqrt{AsG}$ gewählt wird: die Trägheit des Systems gegen Drehungen um die Lotachse ist wesentlich dynamischer Natur. Neben dieser Hauptschwingung ist dann noch eine bedeutungslose Nebenschwingung (Nutation) von kurzer Schwingungsdauer vorhanden. Die Hauptschwingung ist von der Form

$$\psi = \psi_1\cos 2\pi\frac{t}{T_0}, \qquad \chi = \chi_0 + \psi_1\sqrt{\chi_0\operatorname{ctg}\Phi}\,\sin 2\pi\frac{t}{T_0}; \tag{5}$$

d. h. das Nordende der Figurenachse beschreibt eine ganz flache Ellipse, deren lange Hauptachse wagerecht liegt.

[1]) Siehe Kap. 8, Ziff. 45, Gleichung (11) ds. Bd. des Handb.

Um diese Schwingung abzudämpfen und also den Kompaß überhaupt brauchbar zu machen, versieht man die Kreiselkapsel k (Abb. 45) mit einer Öffnung nahe der Achse und einer zweiten im tiefsten Punkt, so daß der in der Kapsel rotierende Kreisel als Zentrifugalpumpe wirkt und einen Luftstrahl abwärts schleudert, der in der Stellung χ_0 durch zwei nach Westen umgebogene Düsen im Pendel p gerade symmetrisch gespalten wird. Ist eine Bewegung ψ und, mit ihr nach (5) gekoppelt, eine Elevation χ vorhanden, so streicht dieser Luftstrahl unsymmetrisch durch die Pendeldüsen und erzeugt so ein Drehmoment $-H\chi$ um die Lotachse, so daß die erste Gleichung (1) auf

$$A\ddot{\psi} + S(\dot{\chi} + \omega\psi\cos\Phi) + H\chi = 0$$

zu ergänzen ist. Führt man mit der so geänderten Gleichung die Rechnung aufs neue durch, so kommt statt (5):

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 e^{-\frac{Ht}{2S}} \cos 2\pi \frac{t}{T_1} \tag{6}$$

mit

$$\psi_0 = -\arcsin\left(\frac{H \operatorname{tg}\Phi}{sG}\right), \qquad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{S}{sG\omega\cos\Phi - \frac{H^2}{4S}}}, \tag{7}$$

und daraus geht hervor, daß nur die ψ-Schwingung (und ähnliches gilt für die χ-Schwingung) gedämpft ist, wogegen jetzt aber zugleich eine unvermeidliche Mißweisung ψ_0 von wenigen Bogengraden in östlicher bzw. westlicher Richtung auftritt, je nachdem Φ positiv oder negativ ist. Diese Mißweisung ist eine von der geographischen Breite abhängige Apparatkonstante, die man bei neueren Konstruktionen auch ganz beseitigen konnte. Die Dämpfung kann so stark gewählt werden, daß die Schwingungen nach 1 bis 2 Umkehrungen praktisch verschwunden sind.

Von großer Wichtigkeit ist die Fehlertheorie des Kreiselkompasses bei der Fahrt des Schiffes. Hier zeigt sich, daß östliche oder westliche Geschwindigkeitskomponenten belanglos sind, während eine nördliche (südliche) Komponente v eine zusätzliche westliche (östliche) Mißweisung

$$\psi_v = \frac{v}{R\omega\cos\Phi} \tag{8}$$

hervorruft, die von der Größenordnung einiger Bogengrade sein kann, aber jeweils bekannt und also berücksichtigbar ist. Hierbei bedeutet R den Erdradius. Will man es so einrichten, daß bei Kurs- oder Geschwindigkeitsänderungen der Kreisel ohne neue Schwingungen sich sofort in die neue Lage $\psi_0 + \psi_v$ einstellt und also auf der ganzen Fahrt ohne Unterbrechung brauchbar bleibt, so muß man seiner dämpfungslosen Schwingungsdauer T_0, wie SCHULER[1]) gezeigt hat, den Wert

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{9}$$

geben; dies ist die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von der Länge R, also 84 Minuten.

Dieser Einkreiselkompaß ist auf rasch schlingernden Schiffen unbrauchbar, da er, wie eine genauere Theorie zeigt, einen weiteren, sehr bedeutenden und keineswegs kontrollierbaren Fahrtfehler, den sog. Schlingerfehler, aufweist. Dieser Fehler kann durch Anbringen weiterer Kreisel am schwimmenden System

---

1) M. SCHULER, Phys. ZS. Bd. 24, S. 344. 1923 und ZS f. angew. Geophys. Bd. 1, S. 59. 1924.

beseitigt werden. Hinsichtlich der konstruktiven Einzelheiten und der Theorie des so entstandenen **Mehrkreiselkompasses** müssen wir auf die Literatur[1]) verweisen.

Wir erwähnen nur noch, daß außer dem Anschütz-Kämpfeschen Kreiselkompaß noch Kreiselkompasse von SPERRY[2]) und von MARTIENSSEN[3]) ersonnen worden sind, die auf etwas anderen Überlegungen beruhen.

Eine interessante Anwendung findet der Kreiselkompaß beim Schachtabteufen nach dem Gefrierverfahren in dem **Bohrlochneigungsmesser** der Gesellschaft für Nautische Instrumente in Kiel[4]).

38. Der Schlicksche Schiffskreisel[5]). Dieser hat den Zweck, die Schwingungen eines Schiffes, insbesondere die sog. Rollschwingungen (um die Längsachse) durch Einbau eines Kreisels zu vermindern. Die allgemeine Anordnung ist aus Abb. 44 zu ersehen. Der Kreisel ist ein symmetrischer schwerer; er ist in einem um eine wagerechte Achse drehbaren Rahmen gelagert und wird durch eine Dampfturbine (oder einen Elektromotor) angetrieben, die unmittelbar mit dem Rahmen verbunden ist.

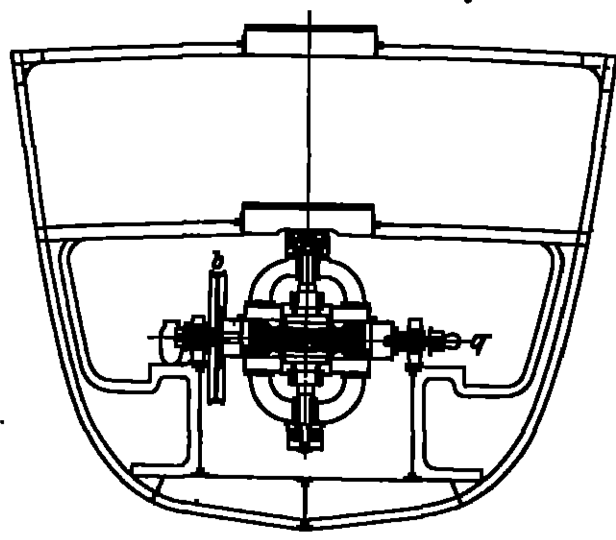


Abb. 44. Der Schlicksche Schiffskreisel.

Die Erklärung der Wirkungsweise des Schiffskreisels ist FÖPPL[6]) zu verdanken, der zuerst erkannte, daß der wichtigste Bestandteil zur Erzielung der gewünschten Wirkung die Bremse ist, durch die man die Ausschläge des Rahmens vom Schiffskörper aus zu beeinflussen vermag. Die Bremseinrichtung besteht aus einer Flüssigkeitsbremse (Katarakt), die im Schiffskörper montiert ist, und einer Bandbremse b, die erst bei größeren Ausschlägen nach Bedarf in Wirkung gesetzt werden kann. Die Bremse hat die Aufgabe, die Energie der Rollbewegung des Schiffes, nachdem diese durch Vermittlung des Kreiselmoments eine Schwingung des Kreiselrahmens erzeugt hat, durch Abbremsen dieser Rahmenschwingung in Reibungswärme umzusetzen. Dabei erhebt sich die Frage, wie groß der Kreisel und wie stark die Bremse sein müssen, damit jede stärkere Rollbewegung schnell genug auf das gewünschte Maß herabgesetzt wird. Physikalisch ist der Vorgang also der, daß ein an sich ungedämpft (oder schwach gedämpft) schwingendes System (das Schiff) mit einem anderen, gedämpft schwingenden System (dem

[1]) M. SCHULER, ZS. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 2, S. 233. 1922; Sir J. B. HENDERSON, Phil. Mag. (6) Bd. 49, S. 273. 1925; H. BÉGHIN et P. MONFRAIX, C. R. Bd. 167, S. 672. 1923.

[2]) SPERRY, Engineering Bd. 91, S. 427. 1911, sowie Bd. 93, S. 722. 1912.

[3]) O. MARTIENSSEN, ZS. f. Instrkde. Bd. 39, S. 165. 1919.

[4]) O. MARTIENSSEN, Elektrot. ZS. Bd. 41, S. 262, 462, 475. 1920; W. HORT, Zentralbl. d. Bauverw. Bd. 41, S. 61, 67, 85, 140. 1921.

[5]) O. SCHLICK, Jahrb. d. schiffbautechn. Ges. Bd. 10, S. 111. 1909; Trans. naval. archit. Bd. 46. 1904; ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 50, S. 1466, 1929. 1906.

[6]) A. FÖPPL, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 48, S. 478, 983. 1904.

Kreisel) verbunden wird, wodurch auch die Schwingungen des erstgenannten Körpers zu gedämpften Schwingungen umgewandelt werden. Kreisel mit dieser Wirkung werden als **Dämpfkreisel** bezeichnet.

Diese Wirkungsweise des Schiffskreisels läßt sich nun tatsächlich aus den Bewegungsgleichungen für das aus Schiff und Kreisel bestehende System von zwei Freiheitsgraden (der Drehwinkel des Kreisels fällt außer Betracht, es treten nur die Kreiselmomente in Rechnung) ableiten, wobei wir uns wieder auf den Ansatz und das wichtigste Ergebnis beschränken müssen. Die eine Koordinate ist der Drehwinkel φ des Schiffes um die wagerechte Längsachse, die andere die Drehung ψ des Kreiselrahmens um seine wagerechte Querachse q, beide gegen die Lotrechte gemessen. Ferner sei S der Betrag des Schwunges des Kreisels, Θ das Trägheitsmoment des Schiffes um die Längsachse durch das Metazentrum, ϑ das des Kreisels samt Rahmen um die Querachse, $\frac{GH}{\Theta}\varphi = \alpha^2\varphi$ das durch Θ geteilte Drehmoment des Gewichtes oder des Auftriebes des Schiffes, wobei das Schiff als ein um das Metazentrum schwingendes Pendel vom Gewicht G und der reduzierten Pendellänge H angesehen wird, $\frac{G_1 H_1 \psi}{\vartheta} = \beta^2\psi$ das durch ϑ geteilte Drehmoment des Kreisels samt Rahmen um die Querachse q; endlich sei k die Dämpfungskonstante des Kataraktes und die Dämpfung werde als Flüssigkeitsreibung für kleine Geschwindigkeiten proportional mit $\dot\psi$ angenommen. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\ddot\varphi + \alpha^2\varphi - \frac{S}{\Theta}\dot\psi = 0,\\ &\ddot\psi + \beta^2\psi + k\dot\psi + \frac{S}{\vartheta}\dot\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Abb. 45. Wirkung des Schiffskreisels.

Die Frequenzgleichung dieses Systems erhält mit der Abkürzung

$$\frac{k}{\sqrt{\alpha\beta}} = \varkappa \tag{2}$$

die Form

$$\lambda^4 + \varkappa\lambda^3 + \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{S^2}{\Theta\vartheta}\right)\lambda^2 + \varkappa\alpha^2\lambda + \alpha^2\beta^2 = 0; \tag{3}$$

setzt man darin

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha\beta}} = u, \qquad \frac{S^2}{\Theta\vartheta\alpha\beta} = \sigma^2 \tag{4}$$

und nimmt $\alpha = \beta$, so wird (3) zu einer „reziproken" Gleichung:

$$u^4 + 2\varrho u^3 + (2 + \sigma^2)u^2 + 2\varrho u + 1 = 0. \tag{5}$$

Man kann beweisen, daß die günstigste Wirkung des Schiffskreisels für $\alpha = \beta$ eintritt, und daß sich für die günstigste Bremsstärke der Betrag ergibt

$$\varkappa = \frac{2S}{\sqrt{\Theta\vartheta}}. \tag{6}$$

Die Wirkung des Kreisels auf die Rollbewegung des Schiffes ist aus Abb. 45 deutlich zu ersehen und schien sich zunächst außerordentlich zu bewähren. Bei späteren Versuchsfahrten hat sich jedoch gezeigt, daß neben sonstigen Unzuträglichkeiten[1]) die Beanspruchung des Schiffskörpers durch den Kreisel bei

[1]) Vgl. M. Schuler, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 68, S. 1224. 1924.

schwerem Seegang eine ungeheuer große ist, so daß die eingebauten Kreisel still gesetzt und entfernt werden mußten; der Schiffskreisel scheint heute kaum mehr in Verwendung zu stehen.

39. Die Einschienenbahn. Eine ganz andere Wirkung wie beim Schiffskreisel hat der Kreisel bei der Einschienenbahn, die 1909 nahezu gleichzeitig von Brennan mit wagerechter, von Scherl und Schilowsky[1]) mit lotrechter Stellung der Kreiselachse in einem entsprechend gelagerten Rahmen angegeben wurde. Der Rahmen ist in einem Wagen eingebaut, der auf zwei hintereinander stehenden Rädern laufen soll. Es handelt sich dabei um die Kopplung zweier Systeme, die beide für sich labil sind, mit Hilfe eines Kreisels; der Kreisel selbst wird durch Anbringung einer Feder bzw. durch ein hochliegendes Übergewicht labil gemacht. Kreisel mit dieser stabilisierenden Wirkung nennt man Stützkreisel.

Die Bewegungsgleichungen haben hier nahezu dieselbe Form wie beim Schiffskreisel. Es folgt aus ihnen, daß man den Wagen mit Hilfe des Kreisels nur dann stabilisieren kann, wenn das System außer der Eigendrehung des Kreisels tatsächlich beide Freiheitsgrade (Drehwinkel des Rahmens und des Wagens) besitzt — der Kreiselrahmen darf also nicht festgeklemmt werden —, und wenn die Schwingungsdauer des Kreisels für sich allein größer, die Schwingung also langsamer als die des (an den Rädern aufgehängt gedachten) Wagens ist. Unter diesen Bedingungen ist jedoch die Stabilisierung mit einem genügend starken und entsprechend gedämpften Kreisel stets erreichbar.

40. Pendelkreisel. Dies sind Kreisel, bei denen der Schwerpunkt unterhalb des Stützpunktes in der Figurenachse liegt; sie werden zur Schaffung von künstlichen Horizonten und Lotrichtungen verwendet. Der Betrag der Abweichung, den die Figurenachse des Pendelkreisels in seiner Gleichgewichtslage von der wahren Lotrichtung (mit Einschluß der Fliehbeschleunigung der Erddrehung) infolge der Erddrehung ω erleidet, ist in der geographischen Breite Φ durch die Gleichung (1) gegeben[2])

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{S\omega\cos\Phi}{Gl - S\omega\sin\Phi},$$

wo G das Kreiselgewicht und l die Entfernung zwischen Stützpunkt und Schwerpunkt ist. Diese unter ϑ_0 gegen die Lotrichtung geneigte Richtung nennt man das Kreisellot; und zwar liegt das Kreisellot im Meridian und weicht vom wahren Lot nach Süden oder Norden ab, je nachdem der Schwungvektor aufwärts ($S > 0$) oder abwärts ($S < 0$) weist.

Für ein bewegtes Fahrzeug kann ein solcher Pendelkreisel nur dann als Lotinstrument verwendet werden, wenn sich die Beschleunigungen, die auf das Fahrzeug wirken, im Mittel ausgleichen. Untersucht man die Bewegungsgleichungen dieses Pendelkreisels unter dem Einfluß von periodischen Kräften auf seinen Aufhängepunkt, so findet man[3]), daß der Kreisel die Lotlinie tatsächlich mit großer Genauigkeit angibt, wenn die Präzessionszeit des Kreisels groß ist gegen die mittlere Dauer der Beschleunigungsschwankungen.

Technische Ausführungen dieser Anwendung des Kreisels sind in großer Vollkommenheit bekannt geworden: wir nennen insbesondere den künstlichen Horizont von Fleuriais, den Fliegerhorizont von Anschütz, den Neigungsmesser für Flugzeuge von Drexler und von der Gesellschaft für Nautische Instrumente in Kiel.

---

[1]) Siehe den Vortrag von H. Barkhausen, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 54, S. 1738. 1910; P. Schilowsky, Engineering Bd. 1, S. 609. 1910 und ebenda Bd. 1, S. 623, 749. 1907; Bd. 1, S. 289. 1910; endlich A. Föppl, Elektrot. ZS. Bd. 31, S. 83. 1910.

[2]) Siehe Kap. 8, Ziff. 41, Gleichung (6) ds. Bd. des Handb.

[3]) Die Theorie ist entwickelt von R. Grammel, ZS. f. Flugtechn. Bd. 10, S. 1. 1919.

41. Geführte Kreisel. Wir zählen hier noch einige besonders bemerkenswerte Kreiselwirkungen auf, die bei Zwangsführung von Radsätzen vorkommen.

a) Fahrzeuge. Kreiselmomente sind in allen Fällen zu erwarten, in denen bei einem Fahrzeug (Eisenbahnwagen, Automobil, Schiff, Flugzeug) die Achsen rotierender Massen durch Schienenkrümmungen oder Steuerbewegungen eine Drehung erfahren.

Betrachten wir die Achse eines Radsatzes (der Halbmesser der Räder sei r, seine Trägheitsmomente mit Bezug auf den Schwerpunkt A, C), der eine Gleiskrümmung vom Halbmesser ϱ und dem Überhöhungswinkel φ mit der Geschwindigkeit v durchführt, dann ist die Eigendrehgeschwindigkeit und die Präzessionsgeschwindigkeit

$$\nu = \frac{v}{r}, \qquad \mu = \frac{v}{\varrho};$$

das Kreiselmoment folgt daher zu[1])

$$D = C\frac{v^2}{r\varrho}\cos\varphi - (C - A)\frac{v^2}{\varrho^2}\cos\varphi\sin\varphi. \tag{1}$$

Durch das Kreiselmoment wird die äußere Schiene noch mehr belastet und die innere noch mehr entlastet, als es durch die Fliehkraft allein geschieht; namentlich ist diese Verminderung des Druckes auf die Innenschiene aus Sicherheitsgründen zu beachten[2]).

Kreiselwirkung tritt auch beim Durchfahren der Übergangsbögen zu den Gleiskrümmungen ein, und da ist bemerkenswert, daß die dabei auftretende Kreiselwirkung um die Lotrechte jene von der Krümmung herrührende um die Fahrtrichtung ständig überwiegt.

Die bei Hänge- und Schwebebahnen auftretenden besonderen Verhältnisse hat Grammel[3]) untersucht.

b) Kollermühlen. Dieselbe Kreiselwirkung ist auch maßgebend für die Beurteilung der Wirkung von Kollermühlen, die ebenfalls von Grammel[4]) eingehend behandelt worden sind. Das mechanische Problem, das hierbei zugrunde liegt, ist das des Kurvenkreisels[5]), und die Fragen, die zu beantworten sind, betreffen einerseits die Größe der Pressung, die durch die Kreiselwirkung des Läufers entsteht, andererseits die Form der Kurvenführung für eine dauernd kraftschlüssige Bewegung. Grammel hat zu den bekannten Ausführungsformen drei Verbesserungsmöglichkeiten hinzugefügt, die die Wahl des günstigsten Achsenwinkels, die Zufügung einer besonderen Führungsplatte mit Erhöhung der Läuferdrehzahl und eine günstigere Formgebung der Läuferprofile betreffen.

c) Der Kurvenzeiger für Flugzeuge. Dies ist ein Kreisel, dessen Figurenachse dauernd gezwungen ist, in der lotrechten Längsebene des Flugzeuges zu bleiben, und dabei durch Federn parallel zur Längsachse des Flugzeuges gehalten wird. Bei einer Wendung des Flugzeuges, d. h. einer Drehung μ um die Hochachse, wird in dem von der Längsebene geführten Kreisel ein Kreiselmoment geweckt, welches seine Figurenachse unter Spannung der Federn aus der Längsachse treibt und mit diesem Ausschlag die Größe von μ anzeigt. Bei dem Steuerzeiger von Drexler[6]), der nach diesem Prinzip eingerichtet ist, wird der Kreisel durch einen eingebauten Motor mit einer Drehzahl von 20000/min angetrieben.

---

[1]) Siehe Kap. 8, Ziff. 39 ds. Bd. des Handb., wobei $\alpha = \pi/2 + \varphi$ ist.

[2]) S. F. Kötter, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. Bd. 36. 1904 [Arch. d. Math. u. Phys. (3) Bd. 7. 1904].

[3]) R. Grammel, Der Kreisel, S. 181, 182.

[4]) R. Grammel, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 61, S. 572. 1917.

[5]) Siehe Kap. 8, Ziff. 40 ds. Bd. des Handb.

[6]) F. Drexler, Motorwagen Bd. 60, S. 69. 1913; Flugsport Bd. 12, S. 104. 1920.

Dieses Instrument zeigt jede Abweichung vom geraden Flug an, was für Flüge bei Nacht und Nebel von größter Bedeutung ist. Die neueren Ausführungen sind mit Längs- und Querneigungsmessern verbunden, so daß der Flugzeugführer nicht nur die Drehgeschwindigkeit des Kurvenfluges, sondern auch die richtige Lage des Flugzeugs in der Kurve überprüfen kann[1]).

VII. Dynamik des Zweirades.

43. Vorbemerkungen. Vom Standpunkte der Stereomechanik ist das Fahrrad, unter der Annahme gleitfreien Rollens der Räder auf der Fahrbahn, ein System von fünf Freiheitsgraden, zwischen denen zwei nichtholonome Bedingungsgleichungen bestehen, so daß für jede vorgegebene Lage drei Bewegungsmöglichkeiten übrigbleiben. Diese nichtholonomen Bedingungsgleichungen bedeuten nur Einschränkungen im Unendlichkleinen, nicht aber im Endlichen; d. h. es gibt wohl ∞^5 verschiedene Lagen des Systems im Raume, von denen jede beliebige in jede andere durch eine Schar endlicher Bewegungen übergeführt werden kann, ohne diese Bedingungen zu durchbrechen; es ist jedoch nicht möglich, aus irgendeiner Anfangslage in jede beliebige Nachbarlage ohne Verletzung dieser Bedingungen überzugehen, vielmehr sind für jede Anfangslage die zulässigen Nachbarlagen gerade durch jene Bedingungsgleichungen vorgeschrieben.

Aufgabe der Mechanik ist es nun, für dieses System zunächst die stationären Bewegungen zu ermitteln und hinsichtlich ihres Stabilitätscharakters zu untersuchen, eine Aufgabe, die bisher eigentlich nur für die geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vollständig gelöst wurde, während sie für andere Bewegungsformen, wie die Kurvenfahrt, noch nicht mit der gleichen Vollständigkeit erledigt wurde; diesen Sonderfällen gegenüber ist die Untersuchung der allgemeinen Bewegung des Zweirades von untergeordnetem Interesse und bisher kaum über die Aufstellung der Bewegungsgleichungen hinaus gediehen[2]).

Als Ergebnis der theoretischen Untersuchung findet man für die geradlinige Bewegung Stabilität für Geschwindigkeiten im Bereiche von (etwa)

$$16 \text{ bis } 20 \text{ km/h} \quad \text{oder} \quad 4{,}5 \text{ bis } 5{,}5 \text{ m/sec},$$

also Werte, die praktisch leicht erreichbar sind. Für kleinere und größere Geschwindigkeiten ergibt die Theorie Instabilität; eine erklärende Deutung dieses zunächst merkwürdig scheinenden Ergebnisses ist von Klein und Sommerfeld gegeben worden. Für die Stabilisierung des Fahrrades sind die Kreiselwirkungen von wesentlicher Bedeutung. Von bestimmendem Einfluß auf den Stabilitätscharakter sind aber auch die willkürlichen und unwillkürlichen Steuermaßnahmen und Schwerpunktverlagerungen des Fahrers, durch welche die Stabilitätsgrenze praktisch bis nahe an die Geschwindigkeit Null herabgedrückt werden kann, worüber sich aber zahlenmäßig so gut wie nichts aussagen läßt.

Zur Verdeutlichung der für das Zweirad anzustellenden Betrachtungen ist ein Abschnitt über den Reifen (Kreisscheibe) eingeschaltet, an dem sich schon

[1]) Vgl. hierzu J. G. Gray, Proc. Phys. Soc. Bd. 35, S. 266. 1923.

[2]) Literatur: a) Sonderschriften: A. Sharp, Bicycles and tricycles, London 1896; C. Bourlet, Nouveau Traité des bicycles et bicyclettes, Paris 1898; P. Appell, Les mouvements de roulement en dynamique, Scientia Nr. 4, Paris 1899. b) Zeitschriftenaufsätze: F. J. Whipple, Quart. Journ. of Mathem. Bd. 30, S. 312—348. 1898; J. Boussinesq, C. R. Bd. 127, S. 843—848, 895—899. 1898; Bd. 128, S. 760—771. 1899; Journ. de math. (5) Bd. 5, S. 117—135, 217—232. 1899; C. Bourlet, Bull. de la Soc. math. de France Bd. 27, S. 47 bis 67, 76—79. 1899; E. Carvallo, Journ. de l'Ecole polytechn. (2) Bd. 5, S. 119—188. 1900; Bd. 6, S. 1—118. 1901. c) Außerdem kommen die bezüglichen Abschnitte in den bekannten Lehrbüchern von Appell (Bd. II), Grammel, Klein-Sommerfeld (Heft IV), Lamb (Higher Mechanics), Routh, Webster u. a. in Betracht.

vieles von dem vorfindet, was für das dynamische Verhalten des Zweirades kennzeichnend ist.

43. Der Reifen. Für den Reifen oder die Kreisscheibe, die auf einer wagerechten Ebene ohne Gleitung rollen, lassen sich die eingangs erwähnten Fragen nach den stationären Bewegungen und ihrer Stabilität vollständig und übersichtlich beantworten. Der Reifen auf rauher Ebene stellt ein System mit vier Freiheitsgraden dar, die durch eine nichtholonome Bedingungsgleichung verbunden sind, durch welche die Bewegungsmöglichkeiten auf ∞^3 eingeschränkt werden[1]). Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen ist es vorteilhaft, nicht die allgemeine (auf nichtholonome Systeme erweiterte) Lagrangesche Methode zu verwenden, die im wesentlichen auf die Einführung der durch die nichtholonomen Bindungen bedingten Kräfte hinausläuft, sondern nach dem Vorgange von ROUTH[2]) ein System von sowohl im Körper als auch im Raum bewegten Bezugsachsen einzuführen, die dieser Rollbewegung angepaßt sind.

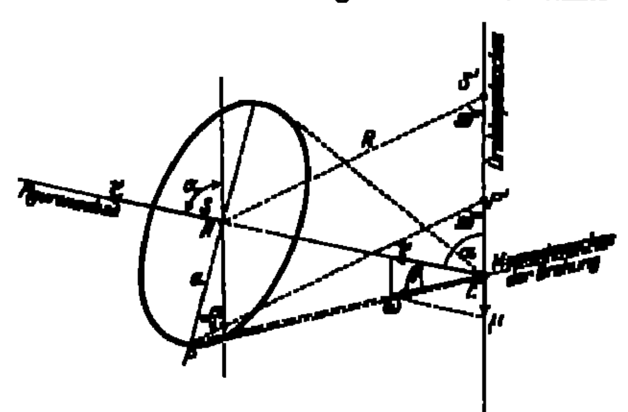


Abb. 46. Reguläre Präzession des Reifens.

Bezeichnet $C = mk^2$ das Trägheitsmoment des Reifens um die Figurenachse, $A = mk^2/2$ das um eine in seiner Ebene liegende Achse, m die Masse, a den Halbmesser, $A' = A + ma^2$, $C' = C + ma^2$, ϑ den Winkel der Figurenachse gegen die Lotrechte, ψ das Azimut, d. i. der Winkel der Tangente im Berührungspunkte gegen eine feste Richtung in der Fahrbahn, r die gesamte Winkelgeschwindigkeit des Reifens um die Figurenachse, so lauten die Bewegungsgleichungen (Abb. 46):

$$\left.\begin{aligned} A'\ddot{\vartheta} - A\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\psi}^2 + C'\sin\vartheta\cdot r\dot{\psi} &= -mga\cos\vartheta\,, \\ \frac{d}{dt}\left(A\sin^2\vartheta\cdot\dot{\psi}\right) - C\sin\vartheta\cdot r\dot{\vartheta} &= 0\,, \\ C'\dot{r} - ma^2\sin\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\dot{\psi} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die stationären Bewegungen dadurch, daß die Geschwindigkeiten, die den ignorablen Koordinaten (ψ, r) entsprechen, konstant und die der nichtignorablen Koordinate (ϑ) entsprechende gleich Null gesetzt werden. Es sei mithin

$$\vartheta = \alpha\,, \qquad \dot{\psi} = \mu\,, \qquad r = \nu + \mu\cos\alpha = n\,, \tag{2}$$

so daß ν die Geschwindigkeit der Eigendrehung des Reifens um die Figurenachse und μ die Präzessionsgeschwindigkeit bedeutet; sodann folgt

$$A\sin\alpha\cos\alpha\cdot\mu^2 - C'\sin\alpha\cdot n\mu = mga\cos\alpha\,,$$

[1]) Man beachte den Unterschied dieses Problems gegen das in Kap. 8, Ziff. 35 ds. Bd. des Handb. behandelte, wo außerdem die nichtholonome Bedingung des Nichtbohrens hinzugenommen wurde.

[2]) E. J. ROUTH, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. II, §§ 241—244, und H. LAMB, Higher Mechanics, § 63. Cambridge 1920.

oder
$$(C'-A)\sin\alpha\cos\alpha\cdot\mu^2 + C'\sin\alpha\cdot\mu\nu = -mga\cos\alpha. \qquad (3)$$

In Analogie mit dem schweren Kreisel kann man diese Bewegungen als **reguläre Präzessionsbewegungen des Reifens** bezeichnen.

Um einen Überblick über die Mannigfaltigkeit der durch diese Gleichung gegebenen Bewegungen zu gewinnen, schreiben wir sie in der Form
$$\nu = -\frac{C'-A}{C'}\cos\alpha\cdot\mu - \frac{mga}{C'}\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{1}{\mu} \qquad (4)$$

und tragen die Kurvenschar $\nu = \nu(\mu, \alpha)$ auf, die konstanten Werten von α entspricht. Diese Gleichung nimmt insbesondere für den Reifen ($k^2 = a^2$) die einfachere Form an
$$\nu = -\frac{3}{4}\cos\alpha\cdot\mu - \frac{g}{2a}\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{1}{\mu}, \qquad (5)$$

und die dadurch gegebene Kurvenschar ist in Abb. 47 mit $g/2a = 5/3$ dargestellt.

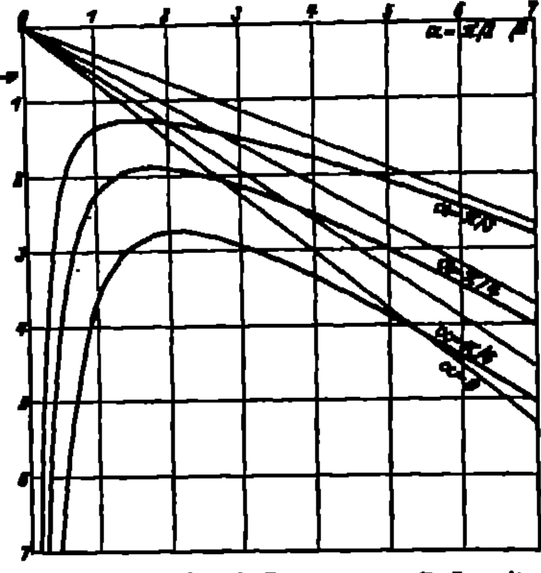


Abb. 47. Zusammenstellung der Werte von ν, μ, α für die reguläre Präzession des Reifens.

Aus diesen Gleichungen erkennt man zunächst, daß μ und ν stets verschiedenes Vorzeichen haben müssen, damit eine solche Bewegung möglich ist (Abb. 46): von oben gesehen erfolgt also die Präzessionsbewegung stets im entgegengesetzten Sinne wie die Eigendrehung des Reifens [rückläufige Präzession[1]]. Der Halbmesser R des Kreises, den der Schwerpunkt S bei dieser Bewegung beschreibt, läßt sich aus der Bedingung ermitteln, daß der augenblickliche Berührungspunkt ruht; nach dieser kann die Geschwindigkeit V von S in zweierlei Weise dargestellt werden:
$$V = a\nu = -R\mu,$$
und daraus folgt
$$R = -\frac{a\nu}{\mu} = \frac{mga^2}{C'}\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{1}{\mu^2} - \frac{Aa}{C'}\cos\alpha. \qquad (6)$$

Rechnet man ferner μ aus der Gleichung (3):
$$\mu = -\frac{C'}{2(C'-A)\cos\alpha}\cdot\nu \pm \sqrt{\left[\frac{C'}{2(C'-A)\cos\alpha}\right]^2\nu^2 - \frac{mga}{(C'-A)\sin\alpha}}, \qquad (7)$$

so sieht man, daß es zu jedem Werte ν der Eigendrehung (im allgemeinen) zwei Werte von μ gibt (eine langsame und eine schnelle Präzession) und daß für jeden Wert von α die Drehgeschwindigkeit ν einen bestimmten Wert überschreiten muß, um stationäre Bewegungen zu ermöglichen; diese Folgerungen lassen sich auch aus der Abb. 47 unmittelbar ablesen. — Es sei noch bemerkt, daß sich eine ähnliche Darstellung auch für die Kurvenschar $R = R(\mu, \alpha)$ nach Gleichung (6) geben läßt.

[1]) Vgl. Kap. 8, Ziff. 14 ds. Bd. des Handb.

44. Stabilität des Reifens. Ein Reifen oder eine Kreisscheibe, die in geneigter Lage in Bewegung gesetzt werden, beschreiben, um nicht umzufallen, von selbst eine Präzessionsbewegung (μ), und zwar nach jener Seite, nach der sie zu fallen streben. Man erkennt unmittelbar aus dem Satze vom gleichsinnigen Parallelismus[1]) der Drehachsen, daß gerade dadurch die Aufrechterhaltung der geneigten Lage möglich wird. Es zeigt sich jedoch, daß Stabilität nur eintritt, wenn die Neigung des Reifens gegen die Wagerechte und auch die Präzessionsgeschwindigkeit μ nicht unter eine gewisse Grenze sinken. Die Wirkung der dabei auftretenden Kräfte — der Mechanismus für die Stabilisierung — ist dann, beiläufig gesprochen, die, daß sich bei Verkleinerung des Neigungswinkels des Reifens gegen die Fahrbahn von selbst auch der Krümmungshalbmesser der Schwerpunktsbahn verkleinert; dadurch wird aber die Fliehkraft vergrößert und ist imstande, die ursprüngliche Gleichgewichtslage wieder herzustellen. Die eigentliche Kreiselwirkung besorgt nur die Verkleinerung der Krümmung: die Rückführung in die ursprüngliche Gleichgewichtslage ist Aufgabe der Fliehkraft.

Dasselbe Prinzip kommt auch beim Zweirad, und zwar sowohl unbewußt als auch bewußt durch den Fahrer, zur Geltung: die Lenkung des Vorderrades hat stets nach jener Seite zu erfolgen, nach der die Tendenz zu fallen besteht.

Die Zahlenwerte für die Größen der Drehgeschwindigkeiten, die für die Stabilität notwendig sind, findet man durch die Methode der kleinen Schwingungen. Danach ergibt sich bei aufrechter Lage des Reifens ($\alpha = \pi/2$, $\mu = 0$) als Bedingung für die Eigendrehung

$$\nu^2 > \frac{A\, m g a}{C(C + m a^2)}, \tag{1}$$

und als Geschwindigkeit des Mittelpunktes $V = a\nu$ mit $a = 0{,}3$ m

für den Reifen: $V = \sqrt{ag/4} = 0{,}86$ m/sec

und für die Kreisscheibe: $V = \sqrt{ag/3} = 1$ m/sec.

Für den Reifen in geneigter Lage (α) hat ROUTH[2]) die Bedingung der Stabilität in der Form angegeben

$$\mu^2\left\{\frac{k^2}{2}(1 + 2\cos^2\alpha) + a^2\sin^2\alpha\right\} + 2n^2(k^2 + a^2) - n\mu\cos\alpha\,(k^2 + a^2) - g a \sin\alpha > 0. \tag{2}$$

Setzt man hierin $n = \mu\cos\alpha + \nu$, so nimmt sie die Form an

$$\mu^2\left(\frac{k^2}{2} + a^2\right) + \mu\nu\cos\alpha\,(k^2 + 3a^2) + 2\nu^2(k^2 + a^2) - g a \sin\alpha > 0 \tag{3}$$

oder, wenn man für ν den durch Gleichung (4) Ziff. 2 gegebenen Ausdruck einführt,

$$\mu^4\left\{\frac{k^2}{2} + \frac{k^2 a^2}{2(k^2 + a^2)}\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha\right\} + \mu^2 g a \frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} + \frac{g^2 a^2}{(k^2 + a^2)^2}\operatorname{ctg}^2\alpha > 0. \tag{4}$$

Daraus folgt zunächst unter allen Umständen $\cos 2\alpha < 0$, also $\alpha = \pi/4$ als untere Grenze für die Neigung des Reifens bei stabiler Bewegung. Genauer erhält man für den Reifen Stabilität, sobald $\alpha > 62^\circ$ (etwa), und μ und ν bestimmte Werte haben, die von α abhängen.

Für den Reifen nimmt die Ungleichung (3) die auch von CARVALLO benutzte Form an

$$\mu^2 + \frac{8}{3}\mu\nu\cos\alpha + \frac{8}{3}\nu^2 - \frac{2g\sin\alpha}{3a} > 0, \tag{5}$$

---

[1]) Vgl. Kap. 8, Ziff. 38 und 39 ds. Bd. des Handb.

[2]) E. J. ROUTH, (s. Fußnote 2 S. 553) Bd. II, S. 191, Beisp. 2, und ähnlich bei E. CARVALLO, (s. Fußnote 2 S. 552).

die, wenn an Stelle des Ungleichheits- das Gleichheitszeichen gesetzt wird, eine ähnliche Darstellung gestattet, wie sie oben für die Gleichgewichtslagen gegeben wurde, und für jeden Wert von α das stabile Gebiet vom instabilen trennt.

Das Einrad (Monozykel) kann unter der Annahme, daß die Eigenbewegungen des Fahrers vernachlässigt werden können, in der gleichen Weise wie der Reifen behandelt werden und ergibt auch für die Gleichgewichtslagen und für Stabilität Bedingungen von ähnlicher Form wie beim Reifen[1]).

45. Allgemeine Bewegung des Reifens. APPELL und KORTEWEG[2]) haben gezeigt, daß die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Reifens durch hypergeometrische Funktionen integriert werden können. In der Tat ergibt sich aus den letzten beiden Gleichungen (1) von Ziff. 43 durch Elimination von dt und $\dot{\psi}$ unmittelbar die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 r}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta \frac{dr}{d\vartheta} - \frac{C m a^2}{A C'} r = 0, \tag{1}$$

die durch die Substitution

$$\cos^2\vartheta = \tau \tag{2}$$

in die folgende Gestalt übergeht:

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\tau\right)\frac{dr}{d\tau} - \frac{C m a^2}{A C'} r = 0, \tag{3}$$

deren Lösung durch Benutzung der Bezeichnungen

$$\gamma = \frac{1}{2}, \qquad \alpha + \beta = \frac{1}{2}, \qquad \alpha\beta = \frac{C m a^2}{A C'}$$

in der Form angesetzt werden kann:

$$r = D \cdot F(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}, \cos^2\vartheta) + E\cos\vartheta \cdot F(\alpha + \tfrac{1}{2}, \beta + \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \cos^2\vartheta),$$

worin $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ die hypergeometrische Funktion und D, E Konstante bedeuten.

Rechnet man sodann $\dot{\psi}$ aus der dritten der Gleichungen (1) Ziff. 2:

$$\dot{\psi} = \frac{C'}{m a^2} \frac{dr}{d\vartheta} \frac{1}{\sin\vartheta}$$

und führt dies in die erste jener Gleichungen oder in die Energiegleichung ein, so erhält man $\vartheta = \vartheta(t)$ und sodann $\psi = \psi(t)$ durch eine Quadratur.

Bemerkenswert sind ferner die „wirklichen" Bewegungen des Reifens, die unter dem Einfluß der Rollreibung und des Luftwiderstandes zustande kommen; bei ihnen beschreibt der Berührungspunkt eine spiralige Kurve bei abnehmender Neigung der Reifenebene gegen die Fahrbahn. Theoretische Untersuchungen darüber sind nicht bekannt.

46. Kinematische Kennzeichnung des Zweirades. Zur Beschreibung der Lage des Zweirades als mechanisches System führen wir zunächst die folgenden sieben Koordinaten ein, zwischen denen außer den schon erwähnten zwei nichtholonomen Bedingungsgleichungen auch zwei endliche Gleichungen bestehen. Diese Koordinaten sind: zwei (x, y) für den Berührungspunkt des Hinterrades mit der Fahrbahn, die in den theoretischen Untersuchungen meist als wagerechte Ebene angenommen wird; zwei Koordinaten (φ_1, ϑ_1) zur Kennzeichnung der Lage der Mittelebene des Rahmens und des Hinterrades, nämlich die Neigung zur Spur dieser Ebene gegen eine feste Richtung in der Fahrbahn (φ_1) und die Neigung dieser Mittelebene gegen die Lotrechte zur Fahr-

[1]) E. CARVALLO (s. Fußnote 2, S. 552).
[2]) P. APPELL u. D. J. KORTEWEG, Rend. del Circolo Mat. di Palermo Bd. 14, S. 1–8. 1900.

bahn (ϑ_2); ferner die entsprechenden Größen (φ_1, ϑ_1) für die Vorderradebene (Mittelebene der Gabel und Lenkstange) und schließlich die Neigung dieser beiden Ebenen gegeneinander (γ).

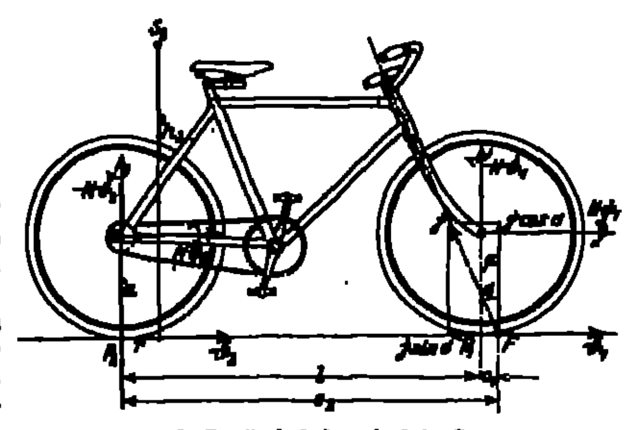


Abb. 48. Das Zweirad als mechanisches System.

Als bemerkenswerte Einzelheit über den Bau des Zweirades, dessen Beschreibung hier entbehrt werden kann, sei angeführt, daß die Verlängerung der Steuerungsachse, um die die Gabel des Vorderrades drehbar ist, zwecks Behinderung des Umkippens des Vorderrades unter dessen Mittelpunkt vorbeigeht und den Boden vor dem Berührungspunkt des Vorderrades trifft. Weiter wird in allen theoretischen Untersuchungen vollständige Symmetrie gegen die Mittelebene vorausgesetzt und der Fahrer mit dem Rahmen als starres Ganzes angenommen, also von den Einflüssen der unsymmetrischen Anordnung der Kette und Kettenräder, der Pedale, der Verlagerung der Beine beim Fahren u. dgl. abgesehen.

Unter der Annahme kleiner Winkeländerungen gegen die lotrechte Ausgangslage kann man die folgenden beiden geometrischen Gleichungen unmittelbar aus der Abb. 48 ablesen:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= \vartheta_2 - \gamma \sin\sigma, \\ \varphi_1 &= \varphi_2 + \gamma \cos\sigma, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei der Neigungswinkel σ der Gabelachse gegen die Lotrechte als unveränderlich angesehen werden kann.

Die nichtholonome Gleichung für das Hinterrad würde lauten

$$dy = \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot dx;$$

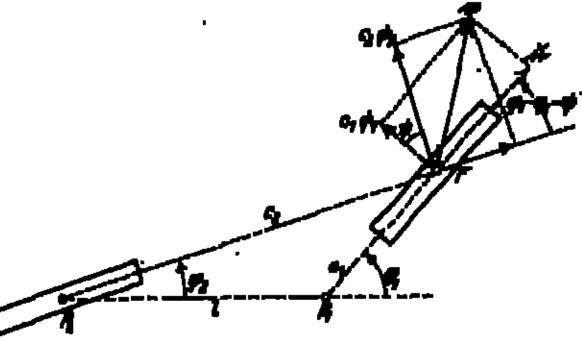


Abb. 49. Rollbedingung für das Zweirad.

sie kommt aber weiterhin nicht zur Geltung, weil x, y und φ_2 ignorable Koordinaten sind und durch den Vorgang der Ignoration eliminiert gedacht sind.

Die für das Vorderrad geltende nichtholonome Gleichung erhält man in folgender Weise: Nach Ausführung der kleinen Drehungen φ_1, φ_2 bilden die drei Punkte P_1, P_2, F nach Abb. 49 ein Dreieck, in welchem die Seite $P_1P_2 = l$ als fest angesehen werden kann. Der Punkt F hat außer der Vorwärtsgeschwindigkeit v noch die Geschwindigkeit $e_1\dot{\varphi}_1$, herrührend von der Drehung des Vorderrades, zusammen also $\mathfrak{v}$; durch diese muß auch die Bewegung des Hinterrades ausdrückbar sein; bei kleinen Drehungen können auch nach diesen die Strecken $P_1F = e_1$, $P_2F = e_2$ gesetzt werden, so daß die gesuchte nichtholonome

Gleichung für das Vorderrad durch Projektion von $\mathfrak{v}$ auf die Normale zu c_2 unmittelbar angeschrieben werden kann:

$$c_2\dot{\varphi}_2 = c_1\dot{\varphi}_1 + u(\varphi_1 - \varphi_2) = c_1\dot{\varphi}_1 + u\psi, \qquad (\psi = \varphi_1 - \varphi_2). \tag{2}$$

Da c_1 klein gegen c_2, so müssen $\dot{\varphi}_2$ und ψ dasselbe Vorzeichen haben, d. h. bei Verdrehung der Gabel muß das Hinterrad nach derselben Seite folgen.

47. Stabilität des Zweirades. Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Zweirades erfolgt gewöhnlich nach der synthetischen Methode durch Ansatz der Kräfte- und Momentengleichungen und Beachtung der zwischen den Koordinaten bestehenden holonomen und nichtholonomen Bedingungsgleichungen. Es ist aber zweifellos auch möglich, wenn auch bisher noch nicht ausgeführt worden, für solche verbundene Systeme („mehrläufige Verbände") mit Rollbedingungen, wie es das Fahrrad ist, eine Erweiterung der beim Reifen benutzten Methode der bewegten Achsen in Anwendung zu bringen, um unmittelbar die Bewegungsgleichungen zu erhalten; für das Fahrrad müßten zwei solche, im Raum und im Körper bewegte Achsensysteme eingeführt werden — für jede Rollbedingung eines —, die dann gemäß den kinematischen Bedingungen miteinander zu kuppeln wären. Der Ausführung dieses Gedankens dürften keine grundsätzlichen Schwierigkeiten im Wege stehen.

Für dieses mechanische System des Fahrrades sind die stationären Bewegungen geradeso zu bestimmen wie für den Reifen und führen auf ähnliche Bedingungen und Darstellungen wie dort.

Wir geben hier nicht die Bewegungsgleichungen in voller Allgemeinheit wieder, wie sie insbesondere von BOURLET, CARVALLO und WHIPPLE aufgestellt wurden, sondern beschränken uns darauf, sie — wie dies für die Frage der Stabilität üblich ist — für kleine Änderungen der Koordinaten anzuschreiben und einschränkend anzunehmen, daß $c_1 \approx 0$, $c_2 \approx l$ gesetzt werden kann und der Schwerpunkt von Rahmen + Hinterrad + Fahrer nahezu in der Lotrechten durch B_2 liegt.

Es bezeichne a den Halbmesser der Räder, m_2 und A_2' die Masse und das Trägheitsmoment von Rahmen + Hinterrad + Fahrer für die Spurlinie B_2B_1, D_2 das Deviationsmoment dieses Systems für diese Spurlinie und das Lot im Berührungspunkte P_2, M_1, $A_1' = A_1 + m_1 a^2$ Masse und Trägheitsmoment des Vorderrades, B_2, B_1 die Trägheitsmomente der beiden Systeme um die Lote in den Berührungspunkten P_2 und P_1, h_2 die Entfernung des Schwerpunktes von m_2 von der Spurlinie, $m_1 a + m_2 h_2 = m h$, u die Geschwindigkeit nach vorwärts und $N = Cu/a$ den Drehimpuls jedes Rades, dann lauten die Momentengleichungen für die Spurlinie und die Steuerungsachse mit den angegebenen Vereinfachungen und nach Elimination von φ_1, φ_2 und γ mittels der geometrischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A_2'\ddot{\vartheta}_1 + B_2\ddot{\vartheta}_2 - D_2\frac{u}{l}\dot{\psi} - N(\dot{\psi} + 2u\psi) - m_1 a u\dot{\psi} + \frac{mh}{l}u^2\psi& \\ - g(m_1 a_1\vartheta_1 + m_2 h_2\vartheta_2) = 0&, \\ A_1' l\cos\sigma\cdot\ddot{\psi} - A_2' l\sin\vartheta\cdot\ddot{\vartheta}_1 + A_1'\cos\sigma\cdot u\dot{\psi}& \\ + N[l\cos\sigma\dot{\vartheta}_1 + l\sin\sigma\dot{\psi} + \sin\sigma\cdot u\psi] = 0&. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierzu kommt als dritte die Gleichung (1) von Ziffer 46

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = -\gamma\sin\sigma = -\operatorname{tg}\sigma\cdot\psi. \tag{2}$$

Um die Stabilität zu beurteilen, hat man zu setzen

$$\vartheta_1 = C_1 e^{\lambda t}, \qquad \vartheta_2 = C_2 e^{\lambda t}, \qquad \psi = C_3 e^{\lambda t}$$

und erhält als Gleichung für λ die folgende charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A_3'\lambda^2 - g m_1 a & B_3\lambda^2 - g m_3 h_3 & -D_3 \frac{u}{l}\lambda - (N + m_1 a u)\lambda \\ & & \quad - N\frac{2u}{l} - \frac{m h}{l} u^2 \\ -A_3' l \sin\sigma\cdot\lambda^2 + N l \cos\sigma\cdot\lambda & 0 & A_1' l \cos\sigma\cdot\lambda^2 + A_1' u \cos\sigma u\cdot\lambda \\ & & \quad + N l \sin\sigma\cdot\lambda + N u \sin\sigma \\ 1 & -1 & \operatorname{tg}\sigma \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Ordnet man diese Determinantengleichung nach Potenzen von λ, so erhält man

$$\alpha\lambda^4 + \beta u\lambda^3 + (\gamma_1 + \gamma_2 u^2)\lambda^2 + (\delta_1 u + \delta_2 u^3)\lambda + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 u^2) = 0, \qquad (4)$$

worin die Größen $\alpha, \ldots \varepsilon_2$ von u unabhängig sind. Die bekannten Kriterien[1]) dafür, daß diese Gleichung nur Wurzeln mit negativ reellen Teilen hat, liefert zunächst Stabilität für die schon oben angegebenen Werte von u. Hierbei läßt sich zeigen, daß für die Stabilisierung tatsächlich die Kreiselwirkung der beiden Räder (insbesondere des Vorderrades) wesentlich mitwirkt, so daß die Stabilisierung in dem angegebenen Bereich nur mittels dieser Kreiselwirkung möglich wird. Auch hier tritt dasselbe ein wie beim Reifen: Wird das Rad durch irgendeine Störung nach einer Seite geneigt, so wird es gerade durch die Kreiselwirkung gezwungen, nach derselben Seite auszubiegen, nach der die Störung erfolgte; dies veranlaßt das Auftreten der Fliehkräfte, die das Rad wieder in die lotrechte Ausgangsstellung zurückzuführen streben. Was endlich das anscheinend paradoxe Ergebnis des Labilwerdens bei größerer Geschwindigkeit u anlangt (Ziff. 42), so kommt dieses daher, daß bei wachsendem u der Winkel ψ zwischen den Radebenen immer kleiner werden muß, d. h. bei rascher werdender Fahrt nimmt die Möglichkeit, daß sich die Radebenen gegeneinander verdrehen können, immer mehr ab, was schließlich praktisch auf die Sperrung dieses Freiheitsgrades hinausläuft, die nach bekannten Eigenschaften des Kreisels mit Labilität verbunden ist.

VIII. Dynamik der Schienenfahrzeuge.

48. Der Kraftbedarf. Die Probleme, über die bei den Schienenfahrzeugen insbesondere im Hinblick auf ihre Bedeutung für die Eisenbahntechnik mit mechanischen und physikalischen Hilfsmitteln Klarheit zu schaffen ist, beziehen sich vor allem auf die Bestimmung des Kraftbedarfes zur Aufrechterhaltung der stationären Bewegung in gerader Strecke und zur Überwindung der besonderen Widerstände bei Krümmungen, Steigungen, Weichen u. dgl. Für die Bewegung in gerader Strecke bestehen diese Widerstände lediglich aus Reibungs- und Luftwiderständen; und zwar aus der Lagerreibung an allen Gleitlagern und der Rollreibung der Räder auf den Schienen, so daß die am Zughacken der Lokomotive auftretende Kraft in einer Steigung der Bahn unter dem Winkel α in folgender Form angesetzt werden kann:

$$K = Q\sin\alpha + \frac{f_1 r_1 + f_2}{r} Q\cos\alpha + W_L, \qquad (1)$$

darin bedeutet Q das ganze auf die Laufachsen entfallende Zuggewicht, der Faktor $\frac{f_1 r_1 + f_2}{r}$ einen Mittelwert aus den Zahlen f_1, f_2 für Zapfen- und Roll-

[1]) Siehe Kap. 8, Ziff. 54 ds. Bd. des Handb.

reibung des Zapfenhalbmessers r_1 und des Radhalbmessers r; endlich W_4 den Luftwiderstand.

Die Zugkraft K kann niemals größer sein als die vom sog. Adhäsionsgewicht G herrührende Gleitreibung an den Rädern, d. h. es muß mit der entsprechenden Gleitreibungszahl f_0

$$G(f_0 \cos\alpha - \sin\alpha) \leq K \tag{2}$$

bleiben (sonst würde sie auf Beschleunigung der Triebräder verwendet).

In der praktischen Eisenbahntechnik werden an Stelle dieser Ungleichung empirische Formeln verwendet, von denen die sog. „Erfurter Formel" die verbreitetste ist: der Zugwiderstand für 1 t Zuggewicht wird in der Form angesetzt

$$w\,[\mathrm{kg/t}] = 2{,}4 + \frac{V^2}{1300} \pm \frac{h}{1000} + \frac{650}{R-60}, \tag{3}$$

worin V die Geschwindigkeit in km/st, h die Steigung in Metern auf 1000 m und R den Krümmungshalbmesser bedeuten[1]). Ist L das Lokomotivgewicht in t, so ist der gesamte Zugwiderstand daher

$$W\,[\mathrm{kg}] = (L + Q)\,w. \tag{4}$$

Von besonderen Widerständen, die in den Gleichungen dieser Art nur summarisch berücksichtigt sind („generalisierende Widerstandsformeln") gehören die Verluste durch Schienenstoß und Spurkranzreibung, die sich schwer theoretisch ermitteln lassen[2]).

Das Problem „Rad und Schiene" ist vielfach, z. B. von BOEDECKER[3]), SIEBER[4]) u. a. — jedoch meist mit unzureichenden Mitteln — behandelt worden; es handelt sich dabei um Fragen, die eine Verbindung der Theorie der Reibung mit der der Elastizitätstheorie oder vielmehr der Plastizitätstheorie darstellen, die aber bisher kaum eine einwandfreie Formulierung, geschweige denn eine befriedigende Lösung gefunden haben.

Die Riffelbildung[5]) an Schienen, die oft beobachtet wird, steht ebenfalls in engem Zusammenhange mit den zwischen Rad und Schiene auftretenden Reibungserscheinungen und den Drehschwingungen der Radsätze auf den Laufachsen. Als Mittel zur Verhinderung der Riffelbildung wird die Verlegung der Eigenfrequenz der Räder empfohlen.

Was die Größe des Luftwiderstandes von Eisenbahnzügen anlangt, so ist auf die Versuche zu verweisen, die neuestens in der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen darüber angestellt wurden und aus denen hervorgeht, daß man den Luftwiderstand durch zweckmäßige Verkleidung erheblich (bis um 38 vH) vermindern kann[6]).

49. Schwingungen. Die Fahrzeuge besitzen als starre Körper im Raume sechs Freiheitsgrade, die jedoch nicht alle voll in Erscheinung treten, da sie zum Teil durch Führungsbedingungen eingeschränkt oder blockiert sind (mathematisch

---

[1]) W. BAUER u. X. STÜRZER, Einführung in die Berechnung und Konstruktion von Dampflokomotiven, Wiesbaden 1911, nähere Angaben auch bei A. BIRK, Der Wegebau, 4. Teil, 2. Aufl., Leipzig u. Wien 1922; A. STRAHL, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 57, S. 251, 326, 379, 421. 1917; R. SANZIN, ebenda Bd. 50, S. 118. 1906; Österr. Wochenschr. f. d. öffentl. Baudienst Bd. 23, S. 421, 433, 448, 461. 1917.

[2]) S. H. DESDOUITS u. A. PULIN, Matériel roulant. Résistance des trains traction. Paris 1900.

[3]) BOEDECKER, Die Wirkungen zwischen Rad und Schiene, Hannover 1887.

[4]) K. SIEBER, Verkehrstechnik Bd. 41 (37), S. 397. 1924.

[5]) A. WICHERT, Verkehrstechnik Bd. 38, S. 109, 140. 1921, Stahl u. Eisen Bd. 41, S. 1181. 1924; ferner hierzu J. GASSNER, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 68, S. 282. 1924; Verkehrstechnik Bd. 41 (37), S. 167. 1924 u. Verkehrstechn. Woche, Berlin, März 1923, S. 33.

[6]) L. PRANDTL, Naturwissensch. Bd. 10, S. 169. 1922.

gesprochen: es sind für die Koordinaten gewisse Bedingungsungleichungen vorgeschrieben). Für die den übrigbleibenden Freiheiten zugeordneten Bewegungen sind die folgenden Bezeichnungen in Gebrauch[1]):

Fahrzeug	parallel der Längsachse x	parallel der Querachse y	parallel der Hochachse z	um x	um y	um z
Lokomotive . .	Zucken	—	Wogen	Wanken	Nicken	Schlingern
Schiff	—	—	Wogen (Tauchen)	Rollen (Krängen, Schlingern)	Stampfen (Setzen)	Gieren
Flugzeug . . .	Stoßen (Geschwindigkeitsschwankung)	Abtreiben	Wogen	Rollen	Kippen	Drehen

Für die Lokomotiven ist insbesondere die Bewegung parallel der Längsachse x — das Zucken — eingehend untersucht und als Ursache hierfür die Massenwirkung der Getriebeteile erkannt worden; das Zucken tritt bei größer werdender Geschwindigkeit immer mehr zurück. Borries[2]) hat gezeigt, wie die Amplitude des Zuckens aus den Extremwerten der erzwingenden Kräfte angenähert bestimmt werden kann.

Die Bewegungen des Wankens, Wogens und Nickens sind als erzwungene Schwingungen des auf Federn ruhenden Rahmens (mit Kessel usw.) der Lokomotive unter dem Einfluß periodischer Kräfte anzusehen, die von den periodisch wiederkehrenden Einwirkungen des Gleises (und zwar den elastischen Durchbiegungen der Gleise und den Schienenstößen) und des Antriebsmechanismus herrühren. Nach den bis auf Redtenbacher[3]) zurückgehenden Vorarbeiten, von denen insbesondere die von Zeuner[4]), Edinbeck[5]), Fliegner[6]) zu nennen sind, gab Radaković[7]) eine exakte Untersuchung dieser Frage nach dynamischen Methoden durch Aufstellung und Diskussion der Bewegungsgleichungen. Wegen der Möglichkeit der Resonanz zwischen diesen periodischen Einwirkungen mit den Eigenschwingungen des auf Federn gelagerten Rahmens ist zunächst die Kenntnis dieser Eigenschwingungen von Wichtigkeit, für die Radaković einfache Ausdrücke angegeben hat.

Bezüglich des Schlingerns (Drehschwingungen um die Hochachse) hat Mehlis[8]) angenäherte Rechnungsansätze gegeben.

Die in der technischen Literatur vorhandenen Arbeiten über diese Fragen sind übrigens vielfach unvollständig und nicht einwandfrei[9]).

Eine besondere Schwingungserscheinung stellen die „Schüttelschwingungen" elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb dar, die ausgesprochenen Resonanzcharakter zeigen; sie wurden bei hochgelagerten Motoren beobachtet, deren Leistung mittels Kurbeln und Schubstangen auf die tiefer liegenden Triebräder

[1]) L. Prandtl, ZS. f. Flugtechn. Bd. 1, S. 29. 1910.
[2]) V. Borries, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 46, S. 1066. 1902; Eisenbahntechn. d. Gegenw. Bd. 1, S. 107.
[3]) F. Redtenbacher, Die Gesetze des Lokomotivbaues 1855.
[4]) G. Zeuner, Progr. d. Eidgen. polyt. Schule Zürich 1861/62.
[5]) J. Edinbeck, Theoretische Untersuchungen über den Unterbau von Lokomotiven, Leipzig 1875.
[6]) A. Fliegner, Vierteljschr. d. naturf. Ges. Zürich Bd. 42, S. 1. 1897.
[7]) H. Radaković, ZS. f. Math. u. Phys. Bd. 53, S. 225. 1906.
[8]) H. Mehlis, Diss. Karlsruhe 1903.
[9]) Vgl. z. B. F. Meineke, Organ f. d. Fortschr. d. Eisenbahnw. Bd. 80, S. 49. 1925, und Saller, Zentralbl. d. Bauverw. Bd. 42, S. 608. 1902 (mit Literaturnachweisen).

übertragen wird. Ihre Ursache wurde darin gefunden, daß der Antrieb, dessen elastische Eigenschaften mit der Kurbelstellung veränderlich anzunehmen sind, zusammen mit der Rotormasse ein schwingungsfähiges System bildet, das von selbst zu Schwingungen angeregt werden kann. Eine vollständige Darstellung und Kritik dieser Erscheinungen stammt von DÖRY[1]).

50. Bremsen. Eine eingehende Theorie des Bremsvorganges rührt von SOMMERFELD[2]) her. Das wichtigste Ergebnis ist, daß eine Erhöhung des Bremsdruckes nicht immer eine Verringerung von Bremsweg und Bremsdauer, sondern oft das Gegenteil zur Folge hat. Zur theoretischen Untersuchung dieser Erscheinung werden folgende Annahmen getroffen:

1. Die normalen Fahrwiderstände (Zapfenreibung, Luftwiderstand) ebenso wie eine Neigung der Bahn werden vernachlässigt; diese lassen sich gegebenenfalls bei der zeichnerischen Auswertung besonders berücksichtigen.

2. Das Zuggewicht verteilt sich gleichmäßig auf alle Achsen.

3. Die Reibungszahlen zwischen Rad und Schiene sowie zwischen Rad und Klotz sind als empirische Funktionen der Gleitgeschwindigkeiten gegeben (s. Ziff. 2d).

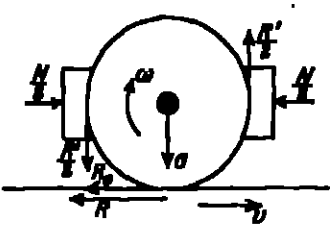


Abb. 50. Wirkung der Bremsen.

In den folgenden Formeln bedeuten (Abb. 50):

G das Zuggewicht für eine Achse,

G' das auf den Radhalbmesser bezogene Gewicht eines Achsensatzes,

v die Zuggeschwindigkeit (Anfangswert V),

u die Umfangsgeschwindigkeit eines Rades,

N den gesamten Bremsdruck für eine Achse,

$f(v-u)$ die Reibungszahl zwischen Rad und Schiene,

$f'(u)$ die Reibungszahl zwischen Rad und Bremsklotz,

f_0 und f_0' die Reibungszahlen für Haftreibung,

n die Zahl aller Achsen,

n_1 die Zahl der gebremsten Achsen,

R die Reibung zwischen Rad und Schiene an jeder gebremsten Achse,

R_0 die Reibung zwischen Rad und Schiene an jeder ungebremsten Achse,

R' die Reibung zwischen Rad und Bremsklotz.

Die Impulssätze ergeben für den Zug als Ganzes

$$n\frac{G}{g}\frac{dv}{dt} = -n_1 R - (n - n_1) R_0, \tag{1}$$

für einen gebremsten Radsatz

$$\frac{G'}{g}\cdot\frac{du}{dt} = R - R', \tag{2}$$

für einen ungebremsten Radsatz ($u = v$)

$$\frac{G'}{g}\frac{dv}{dt} = R_0. \tag{3}$$

Es können nun folgende drei Fälle eintreten:

a) Zwischen Rad und Schiene findet kein Gleiten statt:

$$u = v, \qquad R'(u) = N f'(v), \qquad R = R_0 \leq G f_0.$$

[1]) I. DÖRY, Die Schüttelerscheinungen elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb, Sammlung Vieweg, Heft 68, Braunschweig 1923 (mit ausführlichen Literaturangaben); ferner W. KUMMER, Bull. Schweiz. Elektrotech. Ver. Bd. 12, S. 74. 1921.

[2]) A. SOMMERFELD, Denkschr. d. Techn. Hochschule Aachen 1902.

Durch Entfernung der unbekannten R und R_0 aus Gleichung (1) bis (3) erhält man

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{du}{dt} = -\frac{n_1 g}{n(G+G')} N f'(v) = b(v). \tag{4}$$

Da durch die Bremsung eine Verzögerung entstehen muß, führt Gleichung (2) und (4) zur Bedingung

$$N \leq \frac{n(G+G')G}{nG+(n-n_1)G'} \cdot \frac{f_0}{f'(v)} = N_2(v). \tag{5}$$

Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen erreicht seinen Kleinstwert für $v = 0$; den zugehörigen Bremsdruck

$$N_1 = \frac{n(G+G')G}{nG+(n-n_1)G'} \cdot \frac{f_0}{f'_0} \tag{6}$$

nennen wir den ersten kritischen Bremsdruck. Analog nennen wir den Wert $N_2(v)$, durch welchen bei einer bestimmten Zuggeschwindigkeit v der Höchstwert von N bestimmt ist, damit dieser Bewegungsfall vorliegt, den zweiten kritischen Bremsdruck. Da $1/f'(v)$ angenähert proportional mit v ist, so nimmt $N_2(v)$ mit abnehmendem v nahezu linear ab und erreicht für $v = 0$ den Wert N_1.

b) Die Räder sind festgebremst und gleiten auf den Schienen:

$$u = 0, \qquad R' = R'_0 = R = R(v) = G f(v).$$

Aus den Gleichungen (1) bis (3) folgt

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = -\frac{n_1 g}{n(G+G')-n_1 G'} G f(v) = b(v). \tag{7}$$

c) Es tritt Gleiten sowohl zwischen Rad und Schiene (Geschwindigkeit $v-u$) als auch zwischen Rad und Klotz (u) ein; hierfür gilt

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{n_1 g}{n(G+G')-n_1 G'} G f(v-u),$$

$$\frac{du}{dt} = -[N f'(u) - G f(v-u)] \frac{g}{G'},$$

und daraus

$$\frac{d(v-u)}{du} = \frac{G f(v-u)}{N f'(u) - G f(v-u)} \cdot \frac{n_1 G'}{nG+(n-n_1)G'} - 1. \tag{8}$$

Abgesehen vom Anfang des Gleitens ($v \approx u$, $N f' = G f_0$) wird der erste Summand nahezu gleich Null, da G bedeutend größer als G' ist.

Da die Funktionen $f(v)$ und $f'(v)$ nur empirisch gegeben sind, läßt sich die Verfolgung des Bremsvorganges lediglich durch Anwendung der graphischen Integration der Differentialgleichungen (4) und (7) übersehen, die in Abb. 51 übersichtlich zusammengestellt ist.

Zunächst werden die Kurven $f(v)$ und $f'(v)$ nach den Versuchen von GALTON u. a. eingezeichnet. Die Differentialgleichung (4) wird in der Form geschrieben

$$ds = \frac{v\,dv}{b(v)};$$

um $v/b(v)$ in Abhängigkeit von v zu erhalten, zeichnet man im zweiten Quadranten im Abstande $\frac{n(G+G')}{n_1 g}$ eine Wagrechte und trägt auf dieser eine Skala für den Bremsdruck N auf. Nun wählt man einen bestimmten Wert des Bremsdruckes (unterhalb des ersten kritischen N_1, z. B. diesen selbst), zieht die Verbindungslinie l_1 nach O und erhält für jeden Wert von v durch die Strecke $AB = OB' = b$

die Beschleunigung, weiter mit Hilfe eines willkürlich gewählten Poles P_1 (z. B. $OP_1 = 4$), in der Strecke $Q'Q = v/b$ einen Punkt der Kurve $(v/b)_1$ in Abhängigkeit von v. Die graphische Integration dieser Kurve mit Hilfe eines zweiten Poles P_2 liefert die Kurve $s_1 = s_1(v)$, die man praktisch von O ausgehen läßt, damit sie unmittelbar für jede Anfangsgeschwindigkeit V brauchbar ist. Für jeden Wert von v der Abszissenachse als Anfangsgeschwindigkeit V stellt die Ordinate s_1 unmittelbar den bezüglichen Bremsweg dar.

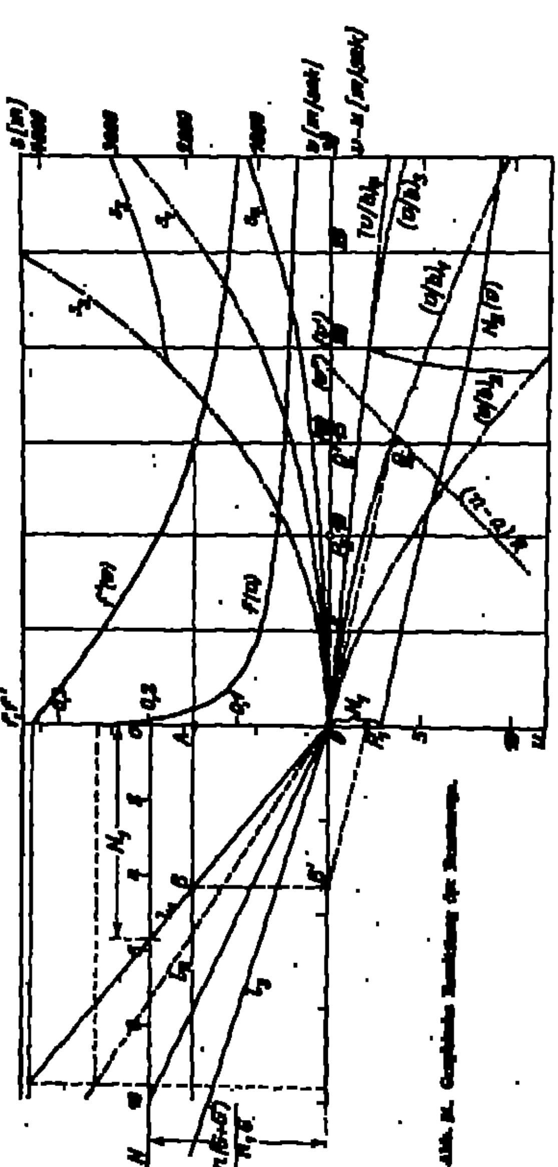


Abb. 51. Graphische Ermittlung der Bremswege.

Ist $N > N_2(v)$, so gilt nach Gleichung (7) dieselbe Konstruktion unter Verwendung von $f(v)$ und einer Parallelen im Abstande $\frac{n(G+G')-n_1G}{n_1 g}$, auf welcher G aufzutragen ist. Die entsprechenden Kurven sind mit l_2, $(v/b)_2$ und s_2 bezeichnet. Dieser Fall ergibt die größten Bremswege.

Für einen mittleren Bremsdruck, der der Ungleichung $N_1 < N < N_2(v)$ entspricht, ist zunächst die erste Konstruktion auszuführen, und zwar bis zu jenem Wert von $v = v'$, der durch die Gleichung $N = N_2(v)$ gegeben ist. Die zugehörigen Kurven sind $(v/b)_3$ und der Weg s_3. Für $v < v'$ gilt zunächst der Fall c), für den man die Gleichung (8) graphisch integrieren muß; die erhaltene Kurve ist mit $u(v-u)$ bezeichnet. Für $v = v''$ ist $u = 0$ geworden, und von da ab gilt der Bewegungsfall b).

Die kürzesten Bremswege für eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit V kann man erreichen, wenn man den Bremsdruck längs des ganzen Bremsvorganges entsprechend der Gleichung $N = N_2(v)$ veränderlich macht; die so erhaltenen Kurven sind durch $(v/b)_4$ und s_4 gegeben.

Der Abb. 51 sind folgende Zahlenangaben zugrunde gelegt: $G = 7,5$ t/Achse, $G' = 0,5$ t/Achse, $n = 120$, $n_1 = 20$.

IX. Dynamik des Schiffes.

51. Die Schwimmstabilität. Wir beschränken uns hier auf kurze Hinweise[1]), da in die Theorie des Schiffes ganz wesentlich die Hydrodynamik hineinspielt, die an anderer Stelle dieses Handbuches zur Behandlung gelangt. Die für die Praxis wichtigste Frage betrifft auch hier den Leistungsbedarf des Schiffes für eine gegebene Größe und Geschwindigkeit, die physikalisch auf die Ermittlung des sog. Schiffswiderstandes[2]) hinausläuft. Mit den Hilfsmitteln der Mechanik sind außerdem die Fragen der Stabilität, des Steuerns und der Schiffsschwingungen behandelt worden.

Die statische Behandlung zunächst der Stabilitätsfrage für das Schiff führt auf die Bedingung, daß das Metazentrum M (das „Längsmetazentrum" als das tiefer liegende), das ist der Schnittpunkt des Auftriebs für eine schwach geneigte Lage des Schiffes mit der Hochachse (der Schwimmachse) über dem Schwerpunkt S liegt; die Strecke $\overline{SM} = h_1$ wird als die metazentrische Höhe bezeichnet. Sie wird praktisch durch den sog. Krängungsversuch bestimmt, bei welchem ein bekanntes Gewicht p quer über das Schiff um eine Strecke l verschoben und die dabei eintretende Neigung ϑ beobachtet wird; ist G das Gewicht des Schiffes, dann gilt

$$h_1 = \overline{SM} = \frac{p\,l}{G \operatorname{tg} \vartheta}. \tag{1}$$

Auch für große Neigungen wird die Frage der Stabilität in statischer Weise durch Betrachtung der aus Gewicht und Auftrieb bestehenden Kräftepaare und ihrer Umhüllungskurven für die möglichen Schwimmebenen des Schiffes untersucht[3]).

52. Schiffsschwingungen. Die freien Schwingungen des stabil schwingenden und als starr vorausgesetzten Schiffes werden in den meisten Lehrbüchern der Mechanik behandelt[4]). Es ergibt sich, daß im ruhigen Wasser die Schwingungen des Wogens, Rollens und Stampfens voneinander unabhängig, also Hauptschwingungen sind, und daß das Gieren, was auch unmittelbar einleuchtet, keiner freien Schwingung entspricht. Die bezüglichen Schwingungsdauern sind durch die Ausdrücke gegeben:

$$\text{Wogen: } 2\pi\sqrt{\frac{G}{\gamma g F}}, \qquad \text{Rollen: } 2\pi\sqrt{\frac{A}{G h_1}}, \qquad \text{Stampfen: } 2\pi\sqrt{\frac{B}{G h_2}}; \tag{1}$$

darin bedeutet G das Schiffsgewicht, γ das Einheitsgewicht des Wassers, F die Schwimmfläche, h_1 und h_2 die metazentrischen Höhen für die Drehungen um x und y (vgl. Ziff. 49) und A, B die bezüglichen Trägheitsmomente.

Für die Untersuchung der erzwungenen Schwingungen im Seegange wird die Störung durch die Wellen allgemein als eine Fouriersche Reihe angesetzt und die Resonanz mit den Eigenschwingungen ermittelt. Die grundlegenden Untersuchungen in dieser Frage rühren von Kriloff[5]) und Froude[6]) her.

Die Bewegungsgleichungen des Schiffes bei umgelegtem Steuerruder sind schon von Euler[7]) aufgestellt worden, dessen Hauptwerk über diesen Gegenstand

---

[1]) Ausführliche Behandlung in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 3. Art. 22 (A. Kriloff).

[2]) Siehe Bd. VII ds. Handb.

[3]) Bez. d. Literatur sei auf d. Enzykl. d. math. Wissensch. Bd. 4, 3. Teilbd. Art. 22 (A. Kriloff u. C. H. Müller) verwiesen.

[4]) Siehe z. B. S. D. Poisson Bd. 2; J. M. C. Duhamel Bd. 2.

[5]) A. Kriloff, Trans. Inst. Nav. Arch. Bd. 40. 1898.

[6]) W. Froude, Trans. Inst. Nav. Arch. Bd. 2, S. 180. 1861; Bd. 14, S. 108. 1874.

[7]) L. Euler, Scientia navalis, Bd. 2, St. Petersburg 1749.

lange Jahre hindurch maßgebend gewesen ist. Doch können diese Gleichungen nur unter sehr weitgehenden Vereinfachungen, die sich von der Wirklichkeit weit entfernen, gelöst und diskutiert werden, so daß der praktische Wert dieser Betrachtungen sehr gering ist. Die Theorie der indirekten Schiffssteuerung — mit Benutzung eines Hilfsmotors — hat Hort[1]) behandelt.

Außer den Schwingungen des starren Schiffes als Ganzes im ruhigen Wasser sind in neuerer Zeit auch die Schwingungen des als elastisch vorausgesetzten Schiffskörpers untersucht und auf ihre Resonanz mit störenden Kräften, die vor allem durch die Massenwirkung der bewegten Teile der Schiffsmaschinen entstehen, geprüft worden. Der Schiffskörper wird dabei als elastischer Stab mit veränderlichem Querschnitt angesehen, dessen Biegungsschwingungen bestimmt werden. Die Differentialgleichung für diese lautet[2])

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right] + q(x)\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = F(x, t), \qquad (2)$$

worin EJ die Steifigkeit, q die auf die Längeneinheit bezogene Masse des Schiffskörpers und $F(x, t)$ die störende Kraft, ebenfalls auf die Längeneinheit bezogen, bedeuten. Für die Auflösung ist zu beachten, daß die Funktionen $EJ(x)$ und $q(x)$ nur empirisch gegeben sind, so daß diese Gleichung nur angenähert aufgelöst werden kann.

Zur Ermittlung der freien Schwingungen hat Gümbel[3]) ein angenähertes Verfahren entwickelt, bei dem die Enden des Schiffes als frei angesehen werden und ein Näherungswert für die kleinste Eigenschwingung dadurch erhalten wird, daß für EJ und q ihre Mittelwerte eingesetzt werden:

$$\overline{EJ} = \frac{1}{l}\int_0^l EJ(x)\,dx, \qquad \bar{q} = \frac{1}{l}\int_0^l q(x)\,dx. \qquad (3)$$

Danach wird die wirkliche Verteilung für EJ und q durch eine Stufenkurve ersetzt und die Eigenfunktionen durch eine Art sukzessiver Approximationen ermittelt.

Der Einfluß der hin und her gehenden Massen der Maschine auf die Schiffsschwingungen und die Wirkung des Massenausgleiches nach Schlick hat Berling[4]) auch messend untersucht.

X. Dynamik des Flugzeuges.

53. Vorbemerkungen. Wie die Bewegung des Schiffes, so ist auch die des Flugzeuges von den Eigenschaften und Einwirkungen des umgebenden Mittels — hier der Luft — wesentlich abhängig. Die Bewegungsgleichungen des Flugzeuges werden unter der Annahme angesetzt, daß die Luftkräfte auf alle Teile des Flugzeuges in jeder Stellung bekannte Funktionen der Lagen- und Geschwindigkeitskoordinaten sind. Die Trägheitskräfte der Luft bei beschleunigter Bewegung des Flugzeuges werden als klein außer Betracht gelassen. Die dynamischen Probleme liegen hier insofern anders als beim Schiff, als hier die Tragkraft erst durch die relative Geschwindigkeit gegen die Luft geweckt wird; weiter bringt die freie Wasseroberfläche beim Schiff besondere Bewegungsformen

---

[1]) W. Hort, Technische Schwingungslehre, 2. Aufl., S. 303, Berlin 1922, u. Dinglers Journ. Bd. 332, S. 297. 1917.

[2]) Vgl. hierzu Bd. VI ds. Handb.

[3]) L. Gümbel, Jahrb. d. schiffbautechn. Ges. Bd. 2, S. 211. 1901. Siehe weiter G. Melville, Engineering Bd. 75, S. 1. 1903; M. Leloup, Bull. de l'Ass. Techn. Marit. Bd. 15, S. 350. 1904.

[4]) G. Berling, Z. d. Ver. d. Ing. Bd. 43, S. 981, 1017, 1221, 1260. 1899.

(Wellen) mit sich, bei denen die Schwere wesentlich mitwirkt; und schließlich sind beim Schiff gewisse Einschränkungen der Bewegungsfreiheit nichtholonomer Natur (d. h. nur im unendlich Kleinen wirkend) maßgebend, wogegen das Flugzeug allseitig von Luft umgeben ist und seine sechs Freiheitsgrade voll in Erscheinung treten läßt.

Für die Dynamik der Flugzeuge ist es wichtig, daß ihre Längsbewegung für sich allein herausgehoben und von der Quer- oder Seitenbewegung vollständig getrennt werden kann. Die Längsbewegung ist theoretisch schon weit durchforscht und ist dadurch gekennzeichnet, daß die Längs- und Hochachse des Flugzeuges in einer lotrechten Ebene verbleiben. Die Seitenbewegung betrifft die Bewegungen um die Längs- und Hochachse, für sie ist die theoretische Behandlung weit schwieriger und heute kaum über die ersten Ansätze hinaus gediehen.

Der Zweck aller derartiger Untersuchungen ist der, die unsicheren qualitativen Aussagen, die in der praktischen Flugtechnik vielfach vorherrschen, und die sehr oft Schwierigkeiten in der Führung und auch Unglücksfälle zur Folge haben, durch eine richtige und auf die systematische Anwendung der Gesetze der Dynamik gegründete Einsicht in das tatsächliche Verhalten der Flugzeuge zu ersetzen.

Die vollständigste Behandlung der Bewegungsprobleme des Flugzeugs, die heute vorliegt, wurde von Hopf[1]) gegeben, dessen Darstellung auch dem folgenden Bericht zugrunde liegt[2]).

Abb. 52. Kräfte am Flugzeug.

54. Die Bewegungsgleichungen; einfache Lösungen. Sei G (Abb. 52) das Gewicht des Flugzeuges, J das Trägheitsmoment um die Querachse y, F die Größe der Tragfläche, K der Schraubenzug, v die Geschwindigkeit, α der Anstellwinkel, das ist der Winkel der Flügelsehne (oder einer anderen ausgezeichneten Richtung des Flügels, z. B. jener, die den Auftrieb Null ergibt — der „Nullrichtung") gegen v, φ der Winkel von v gegen die Wagrechte, ϑ jener der Sehne gegen die Wagrechte, β der von K gegen v, $\alpha - \beta = \varkappa =$ konst., dann lauten die Bewegungsgleichungen nach der Richtung von v, senkrecht dazu, und die Momentengleichung um den Schwerpunkt S

$$\left.\begin{aligned} \frac{G}{g}\dot{v} &= K\cos\beta - G\sin\varphi - W, \\ \frac{G}{g}v\dot{\varphi} &= K\sin\beta - G\cos\varphi + A, \\ J\ddot{\vartheta} &= -m(\alpha,\delta)v^2 - n v\dot{\vartheta}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

worin der Widerstand W und der Auftrieb A durch die Gleichungen gegeben sind[3])

$$W = c_w(\alpha)F\frac{\gamma}{2g}v^2 = c_w F q, \qquad A = c_a(\alpha)F\frac{\gamma}{2g}v^2 = c_a F q; \qquad (2)$$

[1]) L. Hopf, Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922), S. 192, Berlin 1923, und R. Fuchs u. L. Hopf, Aerodynamik, Berlin 1922.

[2]) Zur Einführung in das Gesamtgebiet der Flugtechnik sei hier insbesondere auf das Buch von R. v. Mises, Fluglehre, 3. Aufl., Berlin 1926 hingewiesen. Weiter sind zu nennen: L. Bairstow, Applied Aerodynamics, London 1920; S. Brodetsky, Mechanical principles of the Aeroplane, London 1921.

[3]) Siehe Bd. VII ds. Handb.

c_w und c_a nennt man die Beiwerte für Widerstand und Auftrieb, die als bekannte Funktionen von α angesehen werden, und q den Staudruck. Das Glied $-m(\alpha,\delta)v^2$ stellt das Moment der Luftkräfte um S für die Einheit der Geschwindigkeit dar, wobei der Faktor $m(\alpha,\delta)$ außer von α noch vom Ausschlag δ des Höhenruders, also von den Steuermaßnahmen des Führers, abhängt. Das letzte Glied $nv\dot{\vartheta}$ bedeutet das dämpfende Zusatzmoment, das von der Bewegung der von S weiter entfernten Flächen der Höhenflosse und des Höhenruders herrührt; im übrigen hängen m und n nur von den Abmessungen des Flugzeuges ab.

Abb. 53. Eiffelsche Polare.

Von den einfachen Lösungen dieser Gleichungen heben wir die folgenden hervor:

a) **Der Gleitflug**, gekennzeichnet durch $K=0$, $v=$ konst., $\varphi=$ konst., $m=0$; es ist

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{W}{A} = -\frac{c_w(\alpha)}{c_a(\alpha)} = -\varepsilon(\alpha) \qquad (3)$$

die Gleitzahl, das ist die Neigung der Flugbahn gegen die Wagrechte, die mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\frac{G}{F}\frac{\cos\varphi}{c_a}} = \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\frac{G}{F}\frac{1}{\sqrt{c_a^2+c_w^2}}} \qquad (4)$$

beschrieben wird. Aus der Eiffelschen Polaren[1] [$c_a = c_a(c_w)$] erkennt man unmittelbar, daß v_{max} für jenen Wert von α eintritt, für den $c_a^2 + c_w^2$ den kleinsten Wert annimmt, und daß einem größeren v zwei Werte von α angehören, von denen der eine dem steilgestellten, der andere dem flachgestellten Flugzeug entspricht (Abb. 53).

b) **Wagrechter Motorflug mit konstanter Geschwindigkeit:** $v=$ konst., $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$; aus den Bewegungsgleichungen folgt

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha - \varkappa) = \frac{A-G}{W}, \qquad K = \sqrt{(A-G)^2 + W^2}, \qquad m(\alpha,\delta) = 0; \qquad (5)$$

die erste dieser Gleichungen gibt α, die zweite K, die dritte δ. Insbesondere wird für $\beta = 0$ $(\alpha = \varkappa)$

$$A = G, \qquad K = W = \frac{c_w}{c_a}G. \qquad (6)$$

Bezeichnet n die Drehzahl, so kann der Schraubenzug K in der Form angesetzt werden

$$K = k\frac{\gamma}{g}n^2\psi\left(\frac{v}{n}\right). \qquad (8)$$

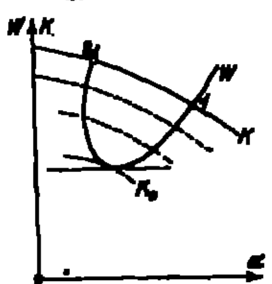


Abb. 54. Ermittlung der Geschwindigkeit für den stationären Flug.

Werden die Kurven $\frac{c_w}{c_a}G$ und K in Abhängigkeit von α oder q aufgetragen (Abb. 54), so geben sie in ihren Schnittpunkten 1 und 2 die Geschwindigkeiten für stationären Flug an. Eine einfache Überlegung lehrt, daß von diesen nur der Schnittpunkt 1 einem wirklichen Flugzustande entspricht. Diese Darstellung gestattet unmittelbar den Einfluß der abnehmenden Luftdichte beim Steigen des Flugzeuges, verschiedener Drosselung des Motors verschiedener Nutzgewichte und Flächengröße auf die Fluggeschwindigkeit und auf die Steiggeschwindigkeit u. dgl. zu verfolgen.

[1] Siehe Bd. VII ds. Handb.

c) **Motorflug bei bestimmtem Schraubenwirkungsgrad** η. Nimmt man den Steigungswinkel φ klein an und setzt die Steiggeschwindigkeit $w = v\varphi$, und überdies

$$Kv = 75 N\eta, \tag{9}$$

worin N die Motorleistung in PS bedeutet, so nehmen die beiden ersten der Gleichungen (1) die Form an

$$\left.\begin{aligned} 75N\eta - Gw - c_w F \frac{\gamma}{2g} v^3 &= 0, \\ G - c_a F \frac{\gamma}{2g} v^2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und man erhält durch Elimination von v

$$w = \frac{75N\eta}{G} - \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\frac{G}{F}\frac{c_w^2}{c_a^3}}. \tag{11}$$

Die „Leistungsbelastung" G/N und die „Flächenbelastung" G/F sind die wichtigsten Kennwerte eines Flugzeuges; je niedriger beide gehalten werden, um so größer ist w. Die aerodynamischen Eigenschaften gehen hier in der Verbindung c_w^2/c_a^3 ein. Der kleinste Wert dieses Verhältnisses liegt bei einem größeren α als jener der Gleitzahl c_w/c_a. Die Luftdichte γ tritt einerseits infolge der Luftkräfte im zweiten Summanden, andererseits wegen der Abhängigkeit der Motorleistung N von γ in diese Gleichung ein; setzt man $N = N_0\Gamma(\gamma)$, so folgt für die Luftdichte in Gipfelhöhe der Flugbahn für $w = 0$ die Beziehung

$$\gamma\Gamma^2(\gamma) = \frac{2g}{75^2\eta^2}\left(\frac{G}{N_0}\right)^2\frac{G}{F}\frac{c_w^2}{c_a^3}. \tag{12}$$

d) **Phygoidbewegung.** Setzt man nach LANCHESTER[1]) in den Gleichungen (1) $K = 0$, $W \infty 0$, $\alpha =$ konst., so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \dot v &= -g\sin\varphi, \\ v\dot\varphi &= -g\cos\varphi + hv^2; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

dann folgt aus der ersten Gleichung

$$v\,dv = -g\sin\varphi\,ds = g\,dy, \qquad \text{d. h. } v^2 = 2gy + C_1, \tag{14}$$

und aus der zweiten (mit $C_1 = 0$) die Gleichung der **Phygoidkurven**

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}hy + \frac{C}{\sqrt{y}}, \tag{15}$$

zu denen die bekannte Schleifenbahn (looping the loop) gehört. Die Konstante C ist durch zwei zusammengehörige Werte von y und φ bestimmt.

55. Die Längsstabilität; typische Flugzeugbewegungen. In statischer Hinsicht wird das Flugzeug als stabil bezeichnet, sobald $\partial m/\partial\alpha > 0$ (so daß bei einer zufälligen Vergrößerung von α die Flugzeugspitze nach unten gedrückt wird) und sobald v nicht unter einen bestimmten, von α und $\partial m/\partial\alpha$ abhängigen Wert sinkt. Wie bei anderen dynamischen Problemen ist die statische durch eine dynamische Behandlung zu ergänzen, bei der zur Entscheidung über die Beschaffenheit eines bestimmten Flugzustandes die Nachbarbewegungen herangezogen werden, wofür die Methode der kleinen Schwingungen wesentliche Dienste leistet, wenngleich sie auch nicht in allen Fragen befriedigende Aufschlüsse zu geben vermag. Die wichtigsten Arbeiten auf diesem Gebiete rühren

[1]) F. W. LANCHESTER, Aerodynamik, Bd. II, S. 29, Leipzig 1909, 1911.

von BRYAN[1]), DAIMLER[2]), HUNSAKER[3]), KNOLLER[4]), RUNGE[5]), v. KÁRMÁN und TREFFTZ[6]) her. Die letztgenannten Forscher fanden das bemerkenswerte Ergebnis, daß in den meisten Fällen in der Längsbewegung des Flugzeuges eine langsame, schwach gedämpfte und eine rasche, stark gedämpfte Schwingung auftreten; entscheidend hierfür ist die Größe von $\partial m/\partial\alpha$, für welche sich die beiden folgenden Grenzfälle darbieten:

a) Das statisch indifferente Flugzeug $\partial m/\partial\alpha = 0$: es tritt kein Moment auf, welches einen bestimmten Wert von ϑ bei irgendeiner Störung wiederherzustellen trachtet, noch auch einer Änderung von ϑ widerstrebt. Eine vorhandene Drehung $\dot{\vartheta}$ verläuft hingegen stark gedämpft. In diesem Grenzfall gehen die raschen Schwingungen, die im allgemeinen auftreten, über, wogegen die langsamen eine aperiodische Abnahme von v und α gegen ihre Gleichgewichtswerte bei gleichbleibendem ϑ zeigen. Dabei ist $\varphi = \vartheta - \alpha$.

b) Das unendlich stabile Flugzeug $\partial m/\partial\alpha = \infty$: es bestehen zwei Schwingungen, eine Drehschwingung um die durch $\varphi =$ konst. $v =$ konst. gekennzeichnete Bewegung, die mit der Zeit infolge der Dämpfung (u) abklingt, und eine langsame Schwingung des Schwerpunktes bei $\alpha =$ konst. (Hierzu gehört die Phygoidbewegung Ziff. 54.)

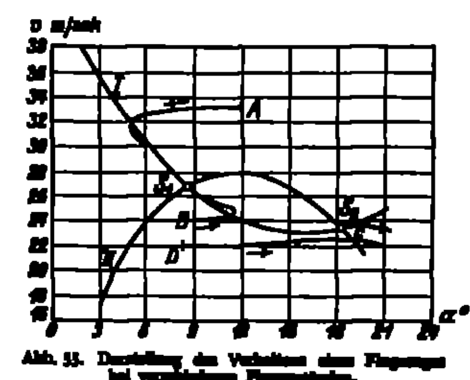


Abb. 55. Darstellung des Verhaltens eines Flugzeuges bei verschiedenen Flugzuständen.

Um dieses Ergebnis auf den Fall beliebiger Stabilität, d. h. eines beliebigen Wertes von $\partial m/\partial\alpha$ zu übertragen, betrachtet HOPF zunächst den Fall $m = 0$ (vollkommen indifferentes Flugzeug), der dadurch ausgezeichnet ist, daß bei fehlender Anfangsdrehung ($t = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$) der Wert von $\vartheta = \vartheta_0$ konstant bleibt. Da $\varphi = \vartheta - \alpha$, so lassen sich die beiden ersten Gleichungen integrieren, wenn auch nur numerisch, sobald c_a und c_w aus Versuchen gegeben sind.

Für die weiteren Betrachtungen ist von Wichtigkeit, daß die in der Bahn wirkenden Kräfte stets beträchtlich kleiner sind als die senkrecht zur Bahn wirkenden (bei den Phygoidkurven werden jene ganz unterdrückt). Bei irgendwelchen Störungen eines Gleichgewichtszustandes (v, α) werden daher jene stärker wirken als diese, es stellt sich zuerst das Gleichgewicht der Kräfte senkrecht zur Bahn her, und zwar durch Erreichung eines neuen Wertes von α, und danach nehmen erst v und α langsam die Werte an, die den veränderten Bedingungen zugehören; dabei bleibt das Gleichgewicht der bahnsenkrechten Kräfte aufrecht. Die entsprechenden Zeiten für beide Vorgänge sind etwa 1 Sek. bzw. 30 Sek.

Das ganze Verhalten des Flugzeuges kann nun anschaulich in einem $v-\alpha$-Koordinatensystem dargestellt werden, in dem die Zeit die Rolle eines Parameters spielt (Abb. 55). Die Kurve I ist durch $\dot{\alpha} = 0$, II durch $\dot{v} = 0$ gegeben. Die Schnittpunkte beider Kurven S_1 und S_2 geben die Werte für einen stationären

[1]) G. H. BRYAN, Die Stabilität der Flugzeuge, deutsche Ausgabe von H. G. BADER, Berlin 1914.
[2]) W. DAIMLER, Diss. Göttingen 1910, u. ZS. f. Flugtechn. Bd. 1, S. 49, 64, 91, 106. 1910.
[3]) J. HUNSAKER, Dynamical Stability of aeroplanes, Washington, Smithonian Inst.
[4]) R. KNOLLER, ZS. f. Flugtechn. Bd. 2, S. 177, 188, 205. 1911.
[5]) C. RUNGE, ZS. f. Flugtechn. Bd. 2, S. 193, 201. 1911.
[6]) TH. v. KÁRMÁN u. E. TREFFTZ, Jahrb. d. wiss. Ges. f. Luftf. Bd. 3, S. 116. 1914/15.

Flug, von denen wieder nur S_1 dem stabilen Fall entspricht. Die Integration der Bewegungsgleichungen ergibt dann von irgendeinem Anfangswertepaar (v_0, α_0) ausgehend, zunächst immer ein Stück einer Parallelen zur a-Achse bis in die Nähe der Kurve I, sodann einen allmählichen Übergang in die Gleichgewichtslage. Mittels dieser Darstellung ist es gelungen, Bewegungsformen aufzufinden, die bisher nicht bekannt waren, wie der „überzogene Flug", der der Kurve D entspricht.

Diese Darstellung kann auch auf den Fall beliebiger Stabilität ausgedehnt werden, bei dem zwei Drehungen: die der Flugbahn (φ) und des Flugzeuges (ϑ) in Betracht zu ziehen sind, und gestattet nicht nur den Stabilitätscharakter zu erkennen, sondern auch die Wirkung von Steuermaßnahmen systematisch zu verfolgen und in jedem einzelnen Fall die besonderen Bewegungsformen des Flugzeuges zu studieren.

Die Einzelheiten der analytischen Durchführung der Stabilitätsbetrachtungen sind in den oben angeführten Arbeiten enthalten.

56. Die Seitenstabilität; Kreiselwirkung. Für die Seitenbewegungen der Flugzeuge lassen sich vor allem deshalb weit weniger sichere Aussagen machen, weil die versuchsmäßigen Unterlagen lange nicht in der Vollständigkeit zur Verfügung stehen wie für die Längsbewegung; die Messungen verlangen eine Sechskomponentenwage und sind außerordentlich schwierig durchzuführen.

Die Betrachtung der Bewegungsgleichungen lehrt, daß für kleine Werte der Koordinaten, welche die Seitenbewegung darstellen, diese ganz unabhängig von der Längsbewegung verläuft, da das System der sechs Bewegungsgleichungen in zwei Gruppen zu je drei Gleichungen zerfällt. Die Koordinaten der Seitenbewegung sind: die Drehung um die Hochachse, das ist die Geschwindigkeit der Kursänderung, die Drehung um die Längsachse oder die Seitenneigung der Tragflügel und die Bewegung parallel zur Querachse, die eine unsymmetrische Orientierung des Flugzeuges gegen die Fahrtrichtung (den „Wind") verursacht.

Die auf kleine Werte dieser Koordinaten eingeschränkte Seitenbewegung ist insbesondere von Reissner[1] und Gehlen[2]) eingehend untersucht worden. Dabei wurden drei typische Seitenbewegungen gefunden: eine stark gedämpfte Rollbewegung um die Längsachse, der Spiralsturz um die Lotrechte, zu dessen Vermeidung die Keilstellung, Pfeilstellung und Taubenform der Flügel erfunden wurden, und eine Windfahnenbewegung.

Als wichtigster Sonderfall für endliche Werte der Koordinaten der Seitenbewegung ist der stationäre Kurvenflug zu nennen, bei dem auch die Kreiselwirkungen des Flugzeugkörpers eine wesentliche Rolle spielen, die von den Geschwindigkeiten quadratisch abhängen, also bei kleinen Werten wegfallen und bei größeren rasch anwachsen. Von den Sonderfragen, die dabei eine Rolle spielen, seien hier die nach der engsten Kurve, der „wendigsten" Kurve, d. h. der Kurve größter Drehgeschwindigkeit u. dgl., genannt. Besondere Bedeutung haben diese Untersuchungen wegen der sog. Trudelgefahr[3]), die darin liegt, daß fast alle Flugzeuge die Neigung zeigen, unter gewissen Umständen — z. B. bei einer großen Störung — von selbst in einen spiraligen, nach unten steil verlaufenden Kurvenflug überzugehen, der durch Steuermaßnahmen außerordentlich schwer zu beeinflussen ist.

Zur Erklärung dieser Trudelbewegungen findet man eine aerodynamische und eine stereodynamische Ursache. Die aerodynamische liegt in dem Auf-

---

[1]) H. Reissner, ZS. f. Flugtechn. Bd. 1, S. 101, 117. 1910 u. Bd. 3, S. 39. 1912.
[2]) K. Gehlen, ZS. f. Flugtechn. Bd. 4, S. 173, 186, 201, 213. 1913.
Weitere Literatur in dem oben angegebenen Werk von R. Fuchs u. L. Hopf.
[3]) L. Hopf, ZS. f. Flugtechn. Bd. 12, S. 273. 1921.

treten einer Eigendrehung (Autorotation) der Tragflügel: ein Tragflügel, der bei großem Anstellwinkel um eine in seiner Symmetrieebene liegende Achse aufgehängt ist, gelangt im Luftstrom von selbst in eine Drehung von ganz bestimmter Drehzahl, die von der Luftgeschwindigkeit und der Spannweite des Flügels abhängt. Die Erklärung für die Möglichkeit, daß ein großer Anstellwinkel dauernd angenommen wird und für die dadurch bedingte Steuerlosigkeit folgt daraus, daß bei großem Anstellwinkel ein großes Moment der Luftkräfte um die Querachse auftritt, das die Flugzeugspitze nach unten zu drücken pflegt und das seinen Gegenwert findet in dem Kreiselmoment um diese Achse.

Eine vollständige Behandlung der Bewegungsgleichungen des Flugzeuges mit Berücksichtigung der Kreiselwirkung ist auch von GRAMMEL[1]) gegeben worden.

Die Stabilisierung von Flugzeugen mit Hilfe des Kreisels ist vielfach versucht worden, so von MAXIM[2]), REGNARD[3]), DELAPORTE und in „indirekter" Ausführung, wobei der Kreisel auf die Steuerung eines Hilfsmotors wirkt, von DIECKLER[4]), doch haben diese Versuche für die praktische Flugtechnik bisher keinerlei bleibende Bedeutung erlangt.

57. Elastische Schwingungen der Flugzeugteile. Außer den bisher betrachteten Schwingungen, bei denen das Flugzeug (mit Ausnahme der beweglichen Steuerflächen) als starres Ganzes angesehen wird, sind auch die elastischen Schwingungen von Einzelteilen und die dabei auftretenden Resonanzerscheinungen vielfach untersucht worden. Besonders auffallend sind die schnellen Schwingungen von freitragenden Flügeln im Winde, die von v. BAUMHAUER und KONING[5]) beschrieben wurden und die gelegentlich so stark werden können, daß sie zur Zerreißung der Steuerseile und zu Havarien verschiedener Art führen können[6]).

XI. Registrierapparate.

58. Allgemeine Theorie der Registrierapparate. In diesem Abschnitte handelt es sich nur um jene Apparate, die für eine experimentelle Nachprüfung der in einigen der vorhergehenden Abschnitte hervorgehobenen Ergebnisse in Betracht kommen, keineswegs um eine vollständige Übersicht über die Theorie und Einrichtung aller hierhergehörigen Anzeigegeräte. Zu den Erscheinungen, die eine Nachprüfung durch Versuche zulassen, gehören insbesondere die (elastischen) Schwingungen, zu deren Aufzeichnung Geräte verschiedener Art bekanntgeworden sind, wobei insbesondere die Erscheinungen der Resonanz theoretisch und praktisch von außerordentlichem Interesse sind.

Bevor auf die Aufzählung der einzelnen Apparate eingegangen wird, seien einige allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt. Die Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung eines Systems mit einem Freiheitsgrad und elastischer Bindung lautet[7])

$$m\ddot{x} + 2\varkappa\dot{x} + c^2 x = K(t), \qquad (1)$$

worin $-c^2 x$ die elastische Kraft und $-2\varkappa\dot{x}$ die Dämpfungskraft bedeutet; sei

$$\frac{\varkappa}{m} = \lambda, \qquad \sqrt{\frac{\varkappa^2 - mc^2}{m^2}} = i\nu$$

[1]) R. GRAMMEL, Der Kreisel, § 16, Braunschweig 1920. Man vergl. auch die Ansätze bei R. v. MISES, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. IV, 1, Art. 10, Nr. 26.

[2]) H. S. MAXIM, Le vol naturel et le vol artificiel, S. 124, Paris 1909.

[3]) M. CARPENTIER, C. R. Bd. 150, S. 829. 1910; Aérophile Bd. 18, S. 204. 1910.

[4]) F. DIECKLER, Motorwagen Bd. 16, S. 69, 184. 1913.

[5]) A. G. v. BAUMHAUER u. C. KONING, Verslagen en Verhandelingen van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Deel II, S. 83. Amsterdam 1923.

[6]) A. HAAS, ZS. f. Flugtechn. Bd. 17, S. 146. 1926.

[7]) Vgl. hierzu Kap. 7, Ziff. 11 ds. Bd. des Handb.

gesetzt, so lautet ihre allgemeine Lösung

$$x = a e^{-\lambda t} \cos \nu (t - t_0) + \frac{1}{m\nu} \int_0^t K(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} \sin \nu (t - \tau) \, d\tau; \tag{2}$$

λ nennt man die Dämpfungskonstante und ν die Frequenz der Eigenschwingung, a und t_0 sind die der freien Schwingung ($K = 0$) entsprechenden Integrationskonstanten.

Nimmt man insbesondere eine mit der Frequenz ω periodisch veränderliche Kraft $K(t) = h e^{i\omega t}$ [1]), so lautet die Lösung der Schwingungsgleichung nach Abdämpfung des ersten Gliedes rechts in (2)

$$x = h A e^{i\omega(t-\beta)}, \tag{3}$$

worin

$$A \equiv A(\omega) = \frac{1}{(c^2 - m\omega^2)^2 + 4\varkappa^2\omega^2}, \qquad \operatorname{tg} \omega\beta = \frac{2\varkappa\omega}{c^2 - m\omega^2}; \tag{4}$$

A nennt man die Amplitudenverzerrung, β die Phasenverschiebung. Der erste Bestandteil der Lösung, der von der freien Schwingung herrührt, klingt rasch ab, so daß praktisch nur der zweite, durch die Gleichung (3) gegebene, von Belang ist.

Ist $\lambda = 0$, so wird $A = \infty$ für $\omega = \omega_0 = \frac{c}{\sqrt{m}}$, und für $\lambda \neq 0$ und $\omega = \bar{\omega}_0 = \sqrt{\frac{mc^2 - 2\varkappa^2}{m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2\varkappa^2}{m^2}}$ wird $A = \left\{\frac{4\varkappa^2 c^2}{m} - \frac{4\varkappa^4}{m^2}\right\}^{-1}$ ein Maximum, das um so schärfer ist, je kleiner $\varkappa$ und je kleiner ω_0^2 ist. Abb. 56 gibt die Gestalt der Verzerrungskurve $A = A(\omega)$ für verschiedene Werte von $\varkappa/\sqrt{m}$ an (für $c^2 = 1$, $m = 1$); sie haben die Eigenschaft, daß sie unmittelbar über der Eigenfrequenz zu Null abgedämpft werden.

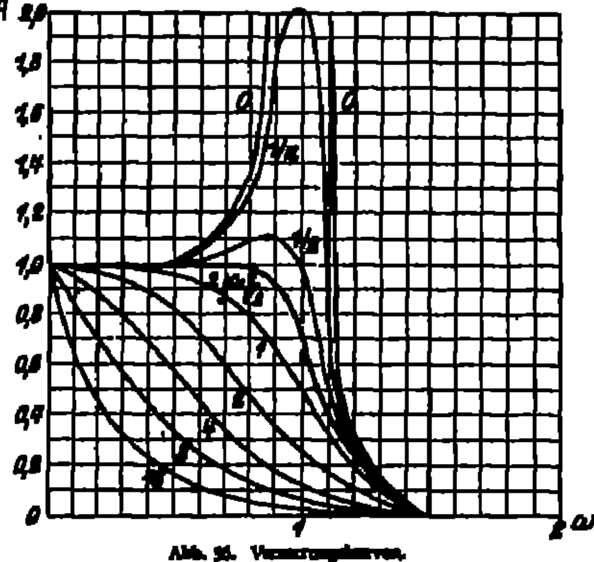


Abb. 56. Verzerrungskurven.

Bei einem physikalischen Anzeigegerät hat man die Konstanten m, c, $\varkappa$ in weiten Grenzen frei verfügbar; um sie den Bedürfnissen der Messung, die entweder auf starke Hervorhebung der Resonanzstelle oder auf Ausschaltung von Verzerrungen der Anzeigen hinauslaufen, anzupassen, sind die beiden folgenden Forderungen maßgebend.

Die erste Forderung verlangt eine passende Empfindlichkeit, d. h. passende

[1]) Die komplexe Schreibweise dient in allen derartigen Fällen zu einer kürzeren Herleitung der (reellen) Ergebnisse und besagt, daß sowohl der reelle wie der imaginäre Teil des Integrals eine Lösung der Differentialgleichung darstellt, sobald man den reellen bzw. imaginären Teil von $K(t)$ nimmt. Vgl. COURANT-HILBERT, Methoden der math. Physik, Bd. I, S. 222 u. 299, Berlin 1924.

Werte von A für die in Frage kommenden Frequenzen. Bei kleinem ω ist $A(\omega) \backsim 1/c^2$, so daß in dem Werte $1/c$ ein Maß für die Empfindlichkeit liegt; je größer $1/c$, d. h. je schwächer die elastische Bindung, desto größer ist die Empfindlichkeit.

Die zweite Forderung betrifft die (relative) Verzerrungsfreiheit der Anzeigen. Eine solche muß verlangt werden, wenn aus den Anzeigen des Apparates auf den erregenden Vorgang zurückgeschlossen werden soll, und dies ist ja gerade der Zweck aller Apparate dieser Art, wozu (außer dem Mikrophon, Grammophon, Seismograph u. dgl.) auch die meisten der später zu erwähnenden Apparate gehören. Nimmt man $2\kappa^2 - c^2 m = 0$, so erhält man die in der Abb. 56 stark ausgezogene Kurve; diese hat die Eigenschaft, daß sie bis ganz in die Nähe der Eigenschwingung angenähert verzerrungsfrei bleibt, während unmittelbar darüber vollständige Dämpfung herrscht. Will man also verzerrungsfreie Angaben eines Registrierapparates erreichen, so hat man seine Eigenschwingung nur etwas oberhalb der höchsten in Betracht kommenden Frequenz zu wählen und die Dämpfung $\kappa = c\sqrt{m/2}$ zu machen. Diese Bedingung ist auch durch die Gleichung $[A'(\omega)]_{\omega=0} = 0$ gegeben.

In ähnlicher Weise findet man als Bedingung dafür, daß die Phasenverschiebung angenähert konstant bleibt, aus $[\beta'(\omega)]_{\omega=0} = 0$ die Gleichung $4\kappa^2 - 3cm = 0$, die mit der vorher gefundenen nicht übereinstimmt. Will man beiden Bedingungen angenähert genügen, so empfiehlt es sich, für die Dämpfung κ den Mittelwert der aus den beiden angegebenen Gleichungen errechneten Werte zu wählen.

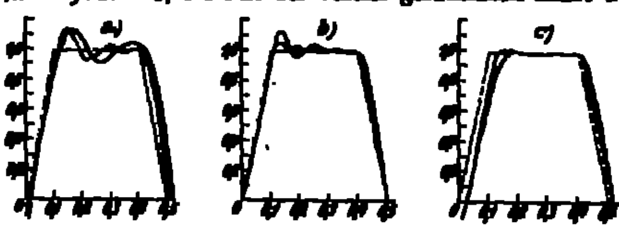


Abb. 57. Anzeigen eines Registrierapparates.

Als ein Beispiel für die Verzerrung und Phasenverschiebung eines Registrierapparates dient Abb. 57, bei der als erregende Schwingung die punktierte trapezförmige Kurve angenommen ist; a) zeigt in zwei Kurven den Verlauf der Registrierung bei relativ großen Eigenschwingungsdauern und kleiner Dämpfung, b) bei kürzeren Eigenschwingungsdauern und derselben Dämpfung, c) bei starker Dämpfung, insbesondere die strichpunktierte bei aperiodischer Dämpfung.

59. Ältere Methoden und Apparate. Außer dem schon seit langem in Verwendung stehenden Indikator, Tachometer und Tachographen sind für die praktischen Maschinenmessungen hervorzuheben:

a) Das Stimmgabelverfahren hat schon RADINGER[1] zur experimentellen Untersuchung der Geschwindigkeitsschwankungen (Schwungradpendelungen) stationärer Maschinen verwendet. Dieses Verfahren wurde von RANSOME[2] als Zyklometer und insbesondere von GÖPEL[3] (Phys.-Techn. Reichsanst. Berlin) wesentlich vervollkommnet. (Durch Verwendung von Stimmgabeln hat auch EIFFEL bei seinen Fallversuchen die Fallgeschwindigkeit registriert.)

b) Das Strobograph[4] (Stroboskop) von WAGNER ermittelt die Schwankungen eines Schwungrades durch Vergleich seiner Bewegung mit einem gleichförmig umlaufenden zweiten Schwungrade, wozu optische Methoden verwendet

[1] J. RADINGER, Dampfmaschinen, S. 337.
[2] RANSOME, Engineering Bd. 46, S. 310. 1888; Bd. 53, S. 23. 1892.
[3] F. GÖPEL, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 44, S. 1359, 1431. 1900.
[4] G. WAGNER, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 50, S. 1981. 1906; Forschungsarbeiten Heft 33.

worden. Dieser Apparat ist auch als stroboskopischer Schlüpfungsmesser[1]) zur Messung der Schlüpfung bei Drehstrommaschinen ausgebildet worden. Auf ähnlichen Grundsätzen beruht auch ein von AICHELE[2]) angegebener Apparat.

c) Auf photographischem Wege sind die Schwingungen von Schiffen im Seegange zuerst von HUET[3]) registriert worden, zum gleichen Zwecke hat auch FROUDE[4]) ein automatisch wirkendes Anzeigegerät angegeben. In neuerer Zeit kommen für solche Zwecke, auch für die Verfolgung der Bewegung der Flugzeuge, kinematographische Methoden in Verwendung.

d) Der Oszillograph von BERTIN[5]) besteht aus zwei Pendeln, von denen das kleinere leicht gedämpft ist, während das größere mit sehr großer Schwingungsdauer aus einem fast vollständig ausgeglichenen Rade besteht; aus den Schwingungen der beiden Pendel gegeneinander kann auf die Schiffsschwingungen geschlossen werden.

e) Einen gyroskopischen Apparat zur Registrierung der Schiffsschwingungen hat PÂRIS[6]) angegeben.

f) Der Pallograph von SCHLICK[7]) dient zur Messung der Schwingungen und Erzitterungen der Schiffskörper, die durch die Massenwirkungen der hin und her gehenden Teile der Schiffsmaschinen verursacht werden. Durch diesen Apparat werden die lotrechten und wagrechten Schwingungskomponenten durch zwei große pendelartige Gewichte aufgezeichnet, deren Trägheit eine Relativbewegung gegen die feste Lagerung bedingt.

g) Der Seismograph[8]) dient zur Messung der Erdbodenbewegungen und ist nach ähnlichen Gesichtspunkten eingerichtet.

60. Neuere Registrierapparate. Diese dienen vorwiegend zur Aufzeichnung der Schwingungen von Maschinengestellen, Gebäuden, Brücken, Schiffswellen u. dgl. Von diesen sind insbesondere zu nennen:

a) Der Frequenzmesser von FRAHM[9]) zur Bestimmung der Drehzahlen von Maschinen besteht aus einer Reihe von schwingungsfähigen, einseitig eingespannten Stahllamellen mit verschiedener Eigenfrequenz, die mit dem zu untersuchenden Körper verbunden werden und von denen jene die Schwingungsfrequenz des Körpers anzeigt, die dieser am nächsten kommt.

b) Der Torsionsindikator von FRAHM[10]) dient zur Aufzeichnung der Schwingungen von Schiffswellen und zur Ermittlung der kritischen Drehzahlen durch Aufzeichnung der gegenseitigen Verdrehung zweier Wellenquerschnitte.

c) Das Torsionsdynamometer von FÖTTINGER[11]) dient zur Bestimmung der effektiven Leistung einer Maschine durch selbsttätige Aufzeichnung der tatsächlichen Drehkräfte während des Umlaufes. Es besteht aus einem an einem Ende auf die Welle aufgeschraubten Meßrohr von 1 bis 2 m Länge, dessen anderes Ende eine Scheibe trägt, welcher gegenüber einer zweiten auf der Welle

1) G. WAGNER, Ein neuer stroboskopischer Schlüpfungsmesser für asynchrone Wechsel- und Drehstrommotoren, Berlin 1904.
2) A. AICHELE, Elektrot. ZS. Bd. 21, S. 236. 1900.
3) HUET, Mém. Génie Maritime 1895.
4) W. FROUDE, Trans. Inst. Naval Arch. Bd. 14. 1873.
5) E. BERTIN, Mém. prés. par div. Sav. Bd. 26. S. 1978.
6) PÂRIS, Rev. Marit. et Col. Bd. 20, S. 273. 1867; C. R. Bd. 64, S. 731. 1867; Trans. Inst. Nav. Arch. Bd. 8, S. 279. 1867.
7) O. SCHLICK, Trans. Inst. Nav. Arch. Bd. 34, S. 167. 1893; Bd. 35, S. 350. 1894; ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 49, S. 1561. 1905.
8) B. GALITZIN, Vorlesungen über Seismographie, Leipzig 1911.
9) H. FRAHM, Elektrot. ZS. Bd. 26, S. 264, 387. 1905.
10) H. FRAHM, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 46, S. 797, 880. 1902. Als zusammenfassendes
11) H. FÖTTINGER, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 46, S. 1868. 1902.
Werk liegt vor: P. NETTMANN, Der Torsionsindikator, 2 Bde., Berlin 1912/13.

aufgesetzten Scheibe einspielt. Die Drehung der beiden Scheiben gegeneinander wird mittels eines Hebelwerkes auf einen Schreibstift übertragen und daraus auf die Größe des erregenden Drehmomentes zurückgeschlossen. Der Apparat

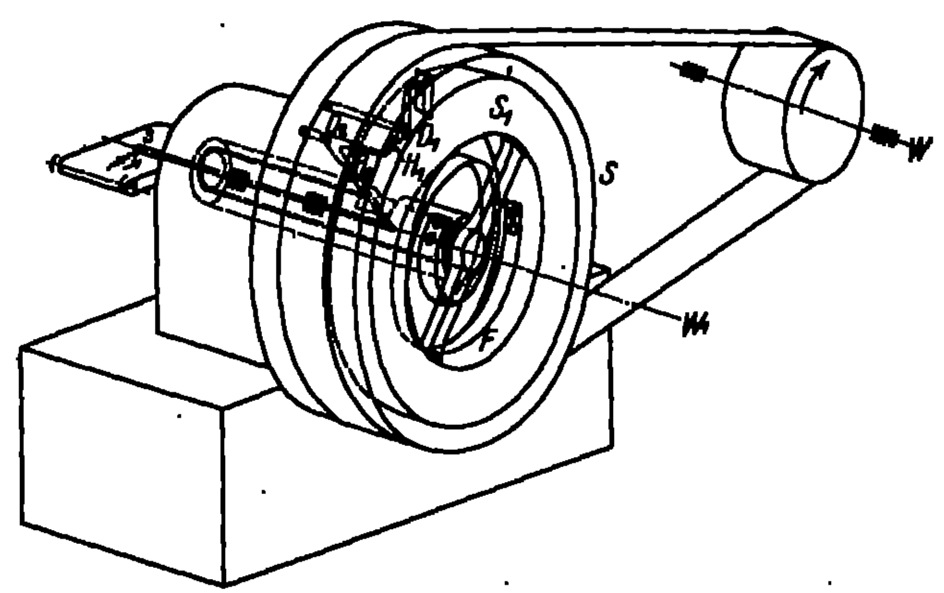


Abb. 58. Torsiograph von Geiger.

ist auch zur Untersuchung der Dämpfung der Maschine und zur Bestimmung der durch die Schiffsschwingungen aufgezehrten Energie verwendet worden.

d) Der (neuere) Torsionsindikator von FRAHM[1]) verwendet ein optisch-photographisches Verfahren zur Aufzeichnung der Wellenschwingungen. Durch eine mit der Welle umlaufende Lichtbildkammer werden die Wellenschwingungen dem Verlaufe und der Größe nach aufgezeichnet, wobei gleichzeitig auch die Wellengeschwindigkeit durch eine stimmgabelartige Feder registriert wird.

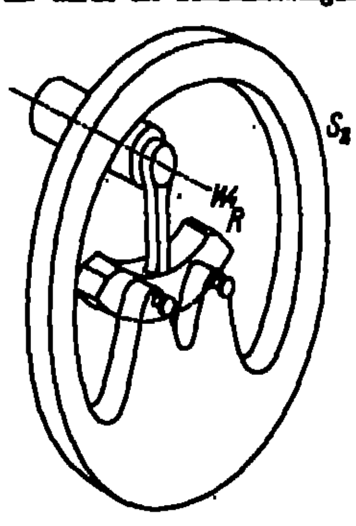


Abb. 59. Vibrograph von Geiger.

e) Der Torsiograph von GEIGER[2]) dient zur Registrierung von Drehschwankungen aller Art von Maschinengestellen, Fahrzeugen und Schiffskörpern, als auch insbesondere von rotierenden Wellen zur Bestimmung ihres Ungleichförmigkeitsgrades und der kritischen Drehzahl. Durch die Maschinenwelle W (Abb. 58) wird eine leichte Aluminiumscheibe S auf einer Hilfswelle W_1 in Drehung versetzt, die ihre Schwankungen vollständig mitmacht; diese Schwankungen werden durch die Relativ-

[1]) H. FRAHM, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 62, S. 177. 1918.

[2]) J. GEIGER, ZS. d. Ver. d. Ing. Bd. 60, S. 811. 1916; Proc. of the first int. Congress for applied Mechanics, Delft 1924, S. 359; ferner J. GEIGER, Mechanische Schwingungen und ihre Messung. Berlin 1927.

verdrehung gegen eine mit S durch die Feder F verbundene und wegen ihres großen Trägheitsmomentes (nahezu) gleichförmig umlaufende Scheibe kenntlich gemacht. Die Aufzeichnung dieser Relativverdrehungen erfolgt durch die beiden Hebel H_1, H_2, deren Drehpunkte D_1, D_2 an der Aluminiumscheibe S befestigt sind und durch den mit H_2 verbundenen und parallel zur Wellenachse verschieblichen Schreibstift S. Der Apparat eignet sich auch für die Aufzeichnung der höchsten im Motorenbau vorkommenden Schwingungen. Durch Verwendung zweier solcher Geräte an den beiden Enden der zu untersuchenden Welle ist es möglich, auch die Drehbeanspruchungen selbst zu ermitteln. Von GEIGER sind auch die drei folgenden Apparate angegeben worden.

f) Der **Vibrograph** dient zur Aufnahme von Erschütterungen von ganz beliebiger Richtung, da er die Anbringung in jeder Schrägstellung gestattet. Zur Aufnahme von langsamen Schwingungen dient die in Abb. 59 wiedergegebene Anordnung, bei der von der Schwungscheibe S_1 (Abb. 58) der größte Teil entfernt und an dem Reststück R eine exzentrische Schwungscheibe S_2 befestigt ist. Die übrige Einrichtung ist ganz so wie beim Torsiographen.

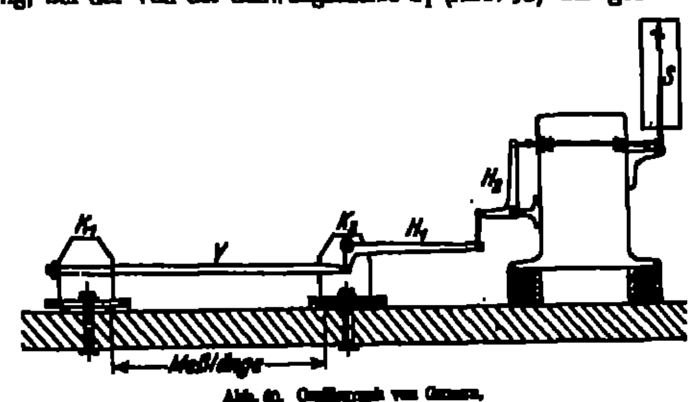


Abb. 60. Oszillograph von GEIGER.

g) Der **Oszillograph** dient zur Aufzeichnung von rasch aufeinanderfolgenden Längenänderungen an elastischen Systemen, wie von Brücken unter bewegter Last, Zylindern von Dieselmotoren u. dergl. Die Einrichtung ist in Abb. 60 schematisch dargestellt. Zwei Festkörper K_1 und K_2, zwischen deren inneren Spitzen oder Schneiden die „Meßlänge" liegt, sind durch Klemmen an dem zu untersuchenden Träger- oder Werkstück befestigt; die Änderungen der Meßlänge werden mittels eines Vergleichsstabes V von (nahezu) unveränderlicher Länge und des Hebelsystems H_1, H_2 auf den Schreibstift S übertragen.

h) Der **Universalregistrierapparat** stellt eine Vereinigung der vorher genannten Meßeinrichtungen dar, die durch Auswechslung von Einzelteilen aus ihm selbst hergestellt werden können. Er dient zur Aufzeichnung von Lage- und Längenänderung aller Art und von beliebiger Größe (0,1 cm bis zu einigen cm), so daß er sich nicht nur zur Bestimmung der niedrigsten, sondern auch der höheren kritischen Drehzahlen, ferner zur Registrierung der Formänderungen und Beanspruchungen von Einzelteilen von laufenden Maschinen, fahrenden Zügen und befahrenen Brücken eignet.

i) Ein **Schwingungsanzeiger**, der auch zur Registrierung und photographischen Aufzeichnung von Zitterbewegungen von menschlichen und tierischen Muskeln geeignet ist, wurde von BEALL und HALL[1]) angegeben.

[1]) CH. G. BEALL und CH. J. HALL, Gen. Electr. Rev. Bd. 27, S. 297. 1924.

Kapitel 10.

Relativitätsmechanik.

Von

O. Halpern, Wien.

I. Einleitung.

1. Die Umgestaltung der Mechanik durch die Relativitätstheorie. Die Relativitätstheorie hat analog ihrer Entwicklung in zwei Schritten Veränderungen der Mechanik herbeigeführt. Verhältnismäßig einfach läßt sich der Einfluß charakterisieren, den die spezielle Relativitätstheorie ausgeübt hat. Sie hat kein spezifisches Problem der klassischen Mechanik einer neuen Behandlung unterworfen, sondern vielmehr in die klassische Mechanik ein neues Element, nämlich eine ausgezeichnete Geschwindigkeit, eingeführt. Dies ist verständlich, wenn man die Entstehung der speziellen Relativitätstheorie ins Auge faßt, die ja durch Übertragung jener Transformationsgleichungen, denen gegenüber die Gleichungen der Elektrodynamik kovariant sind, auf alle anderen Gebiete der Physik bestimmt ist. Aus der in der Lorentztransformation enthaltenen Unmöglichkeit, die Vakuumlichtgeschwindigkeit zu überschreiten, ergeben sich zunächst eine Reihe kinematischer Resultate, wie z. B. die Veränderung des Newtonschen Additionstheorems der Geschwindigkeiten, die Unmöglichkeit der Existenz eines starren Körpers, einer inkompressiblen Flüssigkeit, von Nebenbedingungen im Sinne der alten Mechanik usw. Die eigentliche Dynamik beginnt nun formal mit der Aufgabe, die mechanischen Gleichungen kovariant gegen die Lorentztransformation zu machen und durch diese Neuformulierung zu erreichen, daß eine Überschreitung der Vakuumlichtgeschwindigkeit bei beliebigen Beschleunigungen unmöglich wird. Dieser Punkt enthält die wesentliche Eigenschaft der dynamischen Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie. Eng damit im Zusammenhang steht auch die Ausschaltung von Fernkräften, so daß auch in rein mechanischen Problemen der Wechselwirkung mehrerer Massen die Einführung eines Kräftepotentials im allgemeinen unmöglich wird.

Wesentlich tiefer greifend sind die Veränderungen, welche die allgemeine Relativitätstheorie am Begriffsystem der klassischen Mechanik vorgenommen hat. Die allgemeine Relativitätstheorie nahm im Gegensatze zur speziellen ihren Ausgang von mechanischen Betrachtungen; ihre Grundlage, das Äquivalenzprinzip, postulierte für alle physikalischen Vorgänge die Gleichwertigkeit von Gravitations- und Beschleunigungsfeldern, die ja für die mechanischen Prozesse bereits zu Recht bestand. Auf diese Weise fand das Problem der Gleichheit der trägen und schweren Masse seine theoretische Lösung. (Es versteht sich von selbst, daß im Rahmen der abgeschlossenen Theorie diese Aussagen nur

Näherungsaussagen sind, da ja die in ihnen auftretenden Begriffe aus der nur näherungsweise gültigen klassischen Theorie stammen.) In Weiterverfolgung des Zusammenhanges zwischen Beschleunigungs- und Gravitationsfeldern erwies sich die Frage nach der realen Existenz der Fliehkräfte als fundamentales Problem der allgemeinen Relativitätstheorie, bis schließlich die kovariante Formulierung der Feldgleichungen einen wesentlichen Teil der Frage nach der physikalischen Bedeutung eines absoluten Bezugssystems klarstellte. Wir erkennen aus dieser Übersicht die vorwiegend **mechanische** Fragestellung beim Aufbau der allgemeinen Relativitätstheorie. Für unsere **Mechanik im engeren Sinne** jedoch, die an dieser Stelle allein behandelt werden soll, bedeutete diese Entwicklung zu gleicher Zeit ein fast vollständiges Aufgehen in der Feldtheorie; lediglich für Spezialfälle, wie z. B. die Dynamik des Massenpunktes im weiteren Sinne und einzelne stationäre Probleme kontinuierlicher Massen, kann man noch von mechanischen Problemen im engeren Sinne des Wortes sprechen (die mathematische Verschärfung dieser Aussage wird weiter unten gebracht).

Nichtsdestoweniger bieten diese mechanischen Probleme der allgemeinen Relativitätstheorie erhebliches Interesse, da alle praktisch wichtigen Fragen zu diesem einfachen Spezialtypus gehören und somit nur an ihnen eine empirische Bestätigung der Theorie zu erlangen war.

2. Einteilung und Behandlungsart des Stoffes. Die Einteilung des Stoffes in diesem Kapitel ergibt sich auf Grund des oben Gesagten wie folgt: Wir behandeln zunächst die Dynamik der speziellen Relativitätstheorie (Abschn. II). Nach einigen kurzen kinematischen Bemerkungen bringen wir die **Bewegungsgleichungen des Massenpunktes**. Dazu bedienen wir uns mehrerer Ableitungen, die teils von der Elektrodynamik herübergenommen sind, teils den Impulsbegriff zur Grundlage haben. Anschließend diskutieren wir die verschiedenen Formen, die in Analogie zur klassischen Mechanik die Bewegungsgleichungen in der speziellen Relativitätstheorie erhalten können, sowie den Zusammenhang der relativistischen Gleichungen mit den klassischen, wobei wir immer auf die Unmöglichkeit der Überschreitung (Erreichung) der Lichtgeschwindigkeit das Hauptgewicht legen.

Daran schließt sich eine Übersicht über die **Dynamik der Kontinua**. Wir gehen vom vierdimensionalen Energie-Impulstensor aus. Zunächst besprechen wir die Übertragung des Begriffes vom starren Körper in die Relativitätstheorie. Das wichtigste Problem liegt in der **Trägheit der Energie**, die wir von mehreren Seiten anschaulich zu machen trachten. Wir erhalten dann sehr allgemeine Gleichungen analog zu den Gleichungen der Elektrodynamik für jedes durch seinen **Energie-Impulstensor** charakterisierte mechanische System. Als Spezialfall ergeben sich die Bewegungsgleichungen einer idealen Flüssigkeit in leichter Abänderung der Eulerschen Gleichungen der klassischen Hydrodynamik. Die Trägheit der Energie führt zu dem Ergebnis, daß eine Dynamik kontinuierlicher Medien ohne Einbeziehung der Gesetze der (relativistischen) Thermodynamik undurchführbar ist. Wir zeigen die Vereinigung beider Gebiete in dem verallgemeinerten Prinzip der kleinsten Wirkung von PLANCK. Für die Anwendung wichtig erweist sich die Frage nach dem Auftreten von Drehmomenten bei Translationsbewegungen gespannter Medien, welche Frage wir im Anschluß an v. LAUE diskutieren.

In der **allgemeinen Relativitätstheorie** (Abschn. III) erörtern wir zunächst die Stellung der Mechanik im engeren Sinne im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie und ihr Verhältnis zur Feldphysik. Hierauf leiten wir aus den Feldgleichungen die **Erhaltungssätze** ab, die hier den Inhalt unserer Mechanik im engeren Sinne bilden und gewinnen so die Gleichungen der

geodätischen Linie und verschiedene andere Formen der Bewegungsgleichungen für Massenpunkte (im weiteren Sinne des Wortes). Wir zeigen noch, wie vor Aufstellung der Feldgleichungen das Äquivalenzprinzip zur Gleichung der geodätischen Linie geführt hat. Als Beispiel für ein (statisches) Problem kontinuierlicher Medien behandeln wir die inkompressible Flüssigkeitskugel nach Schwarzschild.

Abschnitt IV dieses Kapitels soll die Theorie jener mechanischen Experimente bringen, die für die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie charakteristisch sind. Hierher gehören im Bereich der speziellen Relativitätstheorie die mechanischen Grundlagen des Versuches von Trouton und Noble, die Versuche über Ablenkung von Elektronen im gekreuzten elektrischen und magnetischen Feld, die Bewegung eines Elektrons um einen Kern und die Lichtquantenmechanik in ihren Aussagen über Strahlungsdruck, Dopplereffekt, Aberration und Comptoneffekt. Für die allgemeine Relativitätstheorie ist hier zu erwähnen: die Bewegung eines Massenpunktes im Felde eines festen Zentrums. Dabei ist es für die Behandlung gleichgültig, ob es sich um einen Massenpunkt mit endlicher Ruhmasse (Bewegung des Merkurperihels) handelt oder (unter Hinzuziehung der Lichtquantenhypothese) um einen solchen mit verschwindender Ruhmasse (Lichtstrahlkrümmung am Sonnenrand, Rotverschiebung der Spektrallinien).

Einige Worte seien noch über die hier gewählte Behandlungsweise des Stoffes gestattet. Dieser vertrüge sehr wohl eine rein deduktive Darstellung, welche aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie als Ausgangspunkt alle obenerwähnten Resultate mathematisch ableitet. Wir haben diese Darstellung mit Absicht vermieden und sogar im Gegensatze dazu (hauptsächlich in Abschn. II u. III) für manche unserer Resultate mehrere Ableitungen gegeben. Wir meinen die Rechtfertigung für eine solche Darstellung selbst im Rahmen eines Handbuches darin zu erblicken, daß nur auf diese Weise eine Übersicht über die physikalische Bedeutung der einzelnen Resultate gewonnen werden kann. Auch ließ sich so jederzeit der Zusammenhang mit den Ausgangspunkten der Theorie (Vorzugsstellung der Vakuumlichtgeschwindigkeit und Äquivalenzprinzip) aufrechterhalten[1]).

II. Spezielle Relativitätstheorie.

3. Kinematische Grundbegriffe. Wir setzen hier wie im folgenden die Kenntnis der Grundlehren der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie sowie der vierdimensionalen Tensoranalysis voraus und bringen hier nur für eine spätere Verweisung eine kurze Zusammenstellung der Transformationsformeln und wichtigsten Invarianten der Lorentztransformation. Unterscheiden wir die korrespondierenden Größen, gemessen von zwei mit der Relativgeschwin-

[1]) Als Literatur für die hier behandelten Fragen geben wir an: in erster Reihe die einschlägigen Kapitel aus dem Enzyklopädiebericht „Relativitätstheorie" von W. Pauli, der auch separat (bei Teubner in Leipzig) erschienen ist. Man findet dort, abgesehen von einer zusammenfassenden Darstellung, Literaturnachweise bis zum Jahre 1920. Weiter kommen eine Reihe von Lehrbüchern der Relativitätstheorie in Betracht, in denen mechanische Fragen mehr oder minder ausführlich behandelt sind. Wir nennen hier die Werke von M. v. Laue, Relativitätstheorie (2 Bde.); A. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung (übersetzt von Ostrowski und Schmidt); H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. Für eine zusammenfassende Darstellung der Relativitätstheorie sei weiter auf die beiden Artikel von Thirring und Back in den Bänden IV und XII dieses Handbuchs hingewiesen.

digkeit v gegeneinander bewegten Galileischen Bezugssystemen, durch einen angehängten Strich, so gilt für das vierdimensionale Linienelement

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \tag{1}$$

$$ds^2 = ds'^2. \tag{1a}$$

Legen wir die Richtung der Relativgeschwindigkeit in die x-Achse, so ist

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad y' = y, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{2}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad y = y', \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2a}$$

Für die Umrechnung der Geschwindigkeiten ergibt sich dann aus (2) bzw. (2a)

$$w'_x = \frac{w_x - v}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}, \qquad w'_y = \frac{w_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{w_x v}{c^2}}, \tag{3}$$

$$w_x = \frac{w'_x + v}{1 + \frac{w'_x v}{c^2}}, \qquad w_y = \frac{w'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{w'_x v}{c^2}}. \tag{3a}$$

Wir definieren weiter als **kontravarianten Vierervektor der Geschwindigkeit** $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ oder ausführlich

$$u^1 = \frac{dx}{ds}, \qquad u^2 = \frac{dy}{ds}, \qquad u^3 = \frac{dz}{ds}, \qquad u^4 = c\frac{dt}{ds}, \tag{4}$$

als Kovarianten u_i

$$u_i = -u^i (i \neq 4), \qquad u_i = +u^i (i = 4), \tag{5}$$

so daß sein absoluter Betrag[1])

$$u^i u_i = 1 \tag{6}$$

wird.

Das vierdimensionale Volumen eines Weltgebietes ist eine Invariante der Lorentztransformation

$$dx\,dy\,dz\,dt = dx'\,dy'\,dz'\,dt'. \tag{7}$$

Für das räumliche dreidimensionale Volumen gilt

$$V = V_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{8}$$

wobei V_0 das Volumen im Ruhsystem bedeutet.

a) Dynamik des Massenpunktes.

4. Die Minkowskischen Gleichungen. Die **Bewegungsgleichungen des Massenpunktes** in der speziellen Relativitätstheorie erhalten wir nach folgender allgemeiner Methode. Wir setzen zunächst die Bewegungsgleichungen im Ruhsystem als bekannt voraus; sie haben in diesem die Gestalt der Newtonschen Gleichungen

$$m_0 \frac{d^2 \mathfrak{r}_0}{dt^2} = \mathfrak{K}_0. \tag{1}$$

Diese Gleichungen trachten wir in Tensorform umzuschreiben und so ihre vom Koordinatensystem unabhängige Gestalt zu gewinnen.

1) Treten in einer Formel zwei gleiche Zeiger auf, so ist über sie von 1 bis 4 zu summieren.

Dabei ist zweierlei zu beachten: Die Gleichungen der klassischen Theorie haben, in Raumvektoren geschrieben, drei Komponenten, die Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie müssen immer noch eine vierte Komponente enthalten, da sie in der vierdimensionalen Welt gelten. Die zweite Bemerkung betrifft den Transformationscharakter der Kraft. Wie sich die linke Seite von (1) transformiert, können wir auf Grund von Ziff. 3, Gleichung (2), angeben. Zur Kenntnis der Transformation der rechten Seite ziehen wir die Transformationsformeln der Elektrodynamik heran; wir entnehmen aus ihnen, daß sich die Kraft bei dem speziellen Koordinatenwechsel von Ziff. 3, Gleichung (2), folgendermaßen transformiert:

$$K_x = K'_x, \tag{2a}$$

$$K_y = K'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad K_z = K'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{2b}$$

Alle nicht elektrodynamischen Kräfte müssen sich nach denselben Transformationsgesetzen umrechnen lassen. Dieses ist evident, da sonst ein Körper, der sich in einem System unter der Wirkung verschiedener Kräfte im Gleichgewicht befindet, in einem anderen Bezugssystem in beschleunigte Bewegung setzen würde. Wir können nun unter Berücksichtigung von Ziff. 3, Gleichung (8), an Stelle der Kraft die Kraftdichte k^i, d. h. die Kraft auf die Volumeinheit, einführen und diese zu einem Vierervektor ergänzen:

$$k^1 = \mathfrak{k}_x, \qquad k^2 = \mathfrak{k}_y, \qquad k^3 = \mathfrak{k}_z, \qquad k^4 = \frac{1}{c}(\mathfrak{k}\mathfrak{w}). \tag{3}$$

Dabei ist $\mathfrak{w}$ vom Betrag w die Geschwindigkeit des Massenpunktes.

Die Gleichungen der Mechanik schreiben wir dann in der allgemein kovarianten Form

$$c^2\varrho_0\frac{d^2x^i}{ds^2} = k^i, \qquad \left(\varrho_0 = \frac{m_0}{V_0}\right), \tag{4}$$

die sich für das Ruhsystem auf (1) reduziert. Unabhängige Veränderliche ist in diesen Gleichungen das Linienelement (die Eigenzeit). Gehen wir nun von der Kraftdichte durch Integration über das Volumen zur Gesamtkraft über, so erhalten wir

$$c^2\int\varrho_0\,dV^0\frac{d^2x^i}{ds^2} = \int k^i\,dV^0 = \frac{c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}\int\varrho_0\,dV\frac{d^2x^i}{ds^2}, \tag{5}$$

und führen wir schließlich an Stelle der Eigenzeit nach Ziff. 3, Gleichung (1) die gewöhnliche Zeit vermöge $ds = c\,dt\sqrt{1 - w^2/c^2}$ ein, so ergibt sich

$$m_0\frac{d}{dt}\frac{w_x}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \mathfrak{K}_x \tag{6}$$

und analog für die y- und z-Richtung.

Wir erhalten eine nähere Analogie zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen, wenn wir diese in der Form

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}$$

schreiben und für den relativistischen Impuls

$$\mathfrak{G} = \frac{m_0\mathfrak{w}}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \tag{7}$$

setzen. Die vierte Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{K}\mathfrak{w}) \tag{6a}$$

sofort den Energiesatz. Für die Gesamtenergie des Massenpunktes erhalten wir den Ausdruck

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \tag{7a}$$

für die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = E - m_0 c^2. \tag{8}$$

Energie und Impuls bilden hier einen Tensor erster Stufe. [Es wäre irrtümlich, zu meinen, daß der Ausdruck (7a) etwas mit der Trägheit der Energie zu tun hat; in der Nullsetzung der Konstante handelt es sich nur um eine mathematisch bequeme Normierung.]

5. **Diskussion der Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes.** Die gewonnenen Ausdrücke für Energie und Impuls eines Massenpunktes können wir in eine Reihe nach steigenden Potenzen von w^2/c^2 entwickeln und erhalten dann

$$E = m_0 c^2 + \frac{m_0 w^2}{2} + \frac{3 m_0 w^4}{8 c^2} + \cdots, \tag{1a}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_0 w^2}{2} + \frac{3 m_0 w^4}{8 c^2} + \cdots, \tag{1b}$$

$$\mathfrak{G} = m_0 \mathfrak{w}\left(1 + \frac{w^2}{2c^2}\right) + \cdots \tag{1c}$$

Vernachlässigen wir die höheren Glieder, so ergibt sich

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_0 w^2}{2}, \tag{2a}$$

$$\mathfrak{G} = m \mathfrak{w}. \tag{2b}$$

Wir sehen also, unter Berücksichtigung von Ziff. 4, Gleichung (7) und (7a), daß die Bewegungsgleichungen und der Energiesatz für kleine Geschwindigkeiten in die klassischen Aussagen übergehen, und daß sogar (beim Massenpunkt) die Abweichungen sowohl im Impuls als auch in der Energie von zweiter Ordnung in w/c sind. Nähert sich die Geschwindigkeit der Vakuumlichtgeschwindigkeit, so wird unsere Näherung (2) unerlaubt; die Vakuumlichtgeschwindigkeit selbst bleibt, wie aus Ziff. 4, Gleichung (7) und (7a), hervorgeht, unerreichbar, da für sie sowohl Impuls als auch Energie unendlich werden. Damit sind die kinematischen Forderungen der Lorentztransformation für den Massenpunkt als Folgerung aus den dynamischen Gleichungen abgeleitet.

Aus den Bewegungsgleichungen lassen sich nun auch zwei Begriffe von im wesentlichen historischer Bedeutung wiedergewinnen, nämlich die der longitudinalen und transversalen Masse. Wir nehmen zu diesem Zwecke an, daß die Geschwindigkeit in einem betrachteten Zeitpunkt in der Richtung der x-Achse gerichtet sei und betrachten gesondert zwei Fälle, in denen die Kräfte a) in der x-Richtung, b) senkrecht dazu, etwa in der y-Richtung, wirken. Im Falle a) erhalten wir dann aus Ziff. 4, Gleichung (6),

$$\frac{m_0}{\left(\sqrt{1 - w^2/c^2}\right)^3} \frac{d^2 x}{dt^2} = \mathfrak{K}_x, \tag{3a}$$

im Falle b)

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \frac{d^2 y}{dt^2} = \mathfrak{K}_y. \tag{3b}$$

Vergleichen wir (3a) und 3(b) mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen, so finden wir sie übereinstimmend bis auf den Faktor

$$\frac{1}{\left(\sqrt{1 - w^2/c^2}\right)^3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}.$$

Man nannte dementsprechend $\frac{m_0}{(\sqrt{1-w^2/c^2})^3}$ die longitudinale Masse, $\frac{m_0}{\sqrt{1-w^2/c^2}}$ die transversale Masse. Solche neuen Bezeichnungen sind vom Standpunkt der einheitlichen Gleichungen der Relativitätstheorie überflüssig. In dieser wird ein Massenpunkt durch die Angabe seiner Ruhmasse m_0 eindeutig charakterisiert. Wichtig hingegen ist der Hinweis auf das anisotrope Verhalten eines Massenpunktes unter dem Einfluß seiner Kraft.

Man versteht anschaulich dieses anisotrope Verhalten der Masse, wenn man sich das grundlegende Prinzip von der Unerreichbarkeit der Vakuumlichtgeschwindigkeit vor Augen hält: bei longitudinaler Beschleunigung ist der Zuwachs des absoluten Betrages der Geschwindigkeit während eines Zeitelementes gleich

$$\delta w_{\text{long}} = \frac{\mathfrak{K}_x \delta t}{m_{\text{long}}},$$

bei transversaler Beschleunigung unter der gleichen Kraft hingegen nur

$$\delta w_{\text{trans}} = \frac{\mathfrak{K}_y^2 (\delta t)^2}{2 w_0 m_{\text{trans}}^2}.$$

Es wäre also bei gleicher Masse und longitudinaler Beschleunigung leichter, der Lichtgeschwindigkeit näherzukommen als bei transversaler Beschleunigung.

Eine weitere wichtige Modifikation, die sich aus den Gleichungen (6) von Ziff. 4 ablesen läßt, betrifft das Trägheitsgesetz der klassischen Mechanik. Nach diesem bleibt die Geschwindigkeitskomponente eines Massenpunktes, in deren Richtung keine Kraft wirkt, konstant. In der relativistischen Mechanik erleidet die Geschwindigkeitskomponente eines Massenpunktes auch in jener Richtung, wo keine Kraft auf ihn wirkt, Änderungen im Laufe der Zeit, wenn in anderen Richtungen Kräfte auf ihn einwirken. Dies ergibt sich sofort aus den Bewegungsgleichungen, die hier für kräftefreie Richtungen nicht mehr Konstanz der Geschwindigkeits-, sondern der entsprechenden Impulskomponente verlangen. Diese aber ändert sich durch Veränderung des absoluten Betrages der Geschwindigkeit.

Es handelt sich in diesem Punkte wieder um die dynamische Seite einer kinematischen Konsequenz der Lorentztransformation. Nach dem Einsteinschen Additionstheorem der Geschwindigkeiten (3) von Ziff. 3 ist nämlich die Geschwindigkeitskomponente eines Massenpunktes senkrecht zur Relativgeschwindigkeit zweier Beobachter abhängig von dem Betrage dieser Relativgeschwindigkeit.

6. Ableitung der Bewegungsgleichungen aus dem Impulssatz. Bei Gewinnung der Minkowskischen Bewegungsgleichungen haben wir im Anschluß an die historische Entwicklung die Transformationsgesetze für die Kraft aus der Elektrodynamik übernommen, auf Grund der Überlegung, daß sich alle Kräfte in gleicher Weise transformieren müssen. Immerhin ist es befriedigend, daß auch ein Aufbau der Mechanik möglich ist, bei dem wir die elektrodynamischen Voraussetzungen nicht benötigen. Diese Darstellung verdankt man Untersuchungen von LEWIS und TOLMAN[1]), die wir im folgenden wiedergeben[2]).

Wir gehen dabei aus von dem Satz von der Erhaltung des Impulses, dessen Gültigkeit wir aus der klassischen Mechanik herübernehmen; das Gesetz der Abhängigkeit des Impulses von der Geschwindigkeit ist uns jedoch unbekannt und soll eben erst aus der hier anzustellenden Betrachtung ermittelt werden. Dabei ist von vornherein folgendes zu beachten: Ebenso wie alle

[1]) G. N. LEWIS u. R. C. TOLMAN, Phil. Mag. Bd. 18, S. 510. 1909.
[2]) Wir verweisen den Leser ganz besonders auf die Darstellung bei M. BORN, Die Relativitätstheorie Einsteins, 3. Aufl., S. 200ff., Berlin 1922.

Gleichungen der Newtonschen Mechanik sich als Komponentengleichungen eines dreidimensionalen Vektors im Raume schreiben lassen, müssen wir hier auf Gleichungen zwischen vierdimensionalen Vektoren ausgehen, und es liegt die im folgenden zu bestätigende Vermutung nahe, daß Energie und Impuls des Massenpunktes die Komponenten dieses Vierervektors bilden werden.

Wir führen nun das folgende Gedankenexperiment durch: Zwei Beobachter, die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v bewegen, mögen einander zwei gleiche Kugeln zuwerfen; diese sollen so zusammenstoßen, daß die Stoßrichtung senkrecht auf der Richtung der Relativgeschwindigkeit steht, und ihre Geschwindigkeiten sich dabei nach den Gesetzen des elastischen Stoßes ändern. Weiter wird vorausgesetzt, daß der Absolutbetrag der Geschwindigkeiten jeder Kugel, von ihrem Beobachter aus gesehen, gleich w sei. Wegen der vollständigen Symmetrie genügt es, wenn wir die Rechnung für den ersten Beobachter ausführen. Selbstverständlich würde sich für den zweiten Beobachter dasselbe Gesetz für die Abhängigkeit der Masse von der (durch ihn gemessenen) Geschwindigkeit ergeben.

Wir unterscheiden die beiden Systeme durch einen angehängten Strich, die beiden Kugeln durch die Zeiger 1 und 2, dann gilt für die Geschwindigkeitskomponenten u_p parallel und u_s senkrecht zur Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß

$$u_{p_1} = 0, \qquad u_{s_1} = w, \tag{1a}$$

$$u'_{p_2} = 0, \qquad u'_{s_2} = -w. \tag{1b}$$

Gleichung (1b) rechnen wir mit Hilfe von Ziff. 3, Gleichung (3), auf das ungestrichene Bezugssystem um und erhalten

$$u_{p_2} = v, \qquad u_{s_2} = -w\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{1c}$$

Da die Massen im allgemeinen von dem Absolutbetrag der Geschwindigkeit abhängen werden, so können wir für den Impuls setzen

$$\mathfrak{G} = m(v)\mathfrak{v},$$

also für die Kugeln vor dem Stoß

$$\mathfrak{G}_p = m_1(v_1)u_{p_1} + m_2(v_2)u_{p_2} = m_2 v, \tag{2a}$$

$$\mathfrak{G}_s = m_1 u_{s_1} + m_2 u_{s_2} = m_1 w - m_2 w\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{2b}$$

Nach dem Stoß seien die Geschwindigkeitskomponenten der ersten Kugel vom ungestrichenen Bezugssystem aus gesehen

$$u_{p_1} = 0, \qquad u_{s_1} = -W. \tag{3a}$$

Daß keine p-Komponente auftritt, ergibt sich aus der Symmetrie des Stoßes. Entsprechend lauten die Geschwindigkeitskomponenten der zweiten Kugel vom gestrichenen Bezugssystem aus gesehen

$$u'_{p_2} = 0, \qquad u'_{s_2} = W. \tag{3b}$$

Rechnen wir wieder mit Hilfe von Ziff. 3, Gleichung (3), alle Geschwindigkeiten auf das ungestrichene Bezugssystem um, und bilden wir die Komponenten des Impulses nach dem Stoß, so erhalten wir

$$\Gamma_p = \mu_1 u_{p_1} + \mu_2 u_{p_2} = \mu_2 v, \tag{4a}$$

$$\Gamma_s = \mu_1 u_{s_1} + \mu_2 u_{s_2} = -\mu_1 W + \mu_2 W\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{4b}$$

wobei die griechischen Buchstaben die entsprechenden Größen nach dem Stoß kennzeichnen sollen. Die Erhaltung des Impulses hat nun zunächst zur Folge [durch Kombination von (2a) und (4a)]

$$m_2 = \mu_2 ; \tag{5a}$$

d. h. der Absolutbetrag der Geschwindigkeit der zweiten Kugel bleibt beim Stoß ungeändert; daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (3b) und Ziff. 3, Gleichung (3),

$$w = W , \tag{5c}$$

was wieder

$$m_1 = \mu_1 \tag{5b}$$

zur Folge hat. Kombination von (2b) und (4b) liefert dann unter Berücksichtigung von (5a, b, c)

$$m_2 = \frac{m_1(w)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{6}$$

Gehen wir nun mit der vorläufig willkürlich gelassenen Größe w gegen 0, so erhalten wir den Zusammenhang zwischen der Ruhmasse und der mit der Geschwindigkeit v bewegten Masse

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{7}$$

Wir haben damit für den Impuls den Minkowskischen Ausdruck (7) von Ziff. 4 wiedergewonnen. Die weitere Diskussion geht jetzt ganz analog wie in Ziff. 4 vor sich, besonders ergibt sich die dortige vierte Gleichung (6a), wenn die dortige Gleichung (6) erfüllt ist.

7. Verschiedene Formen der Bewegungsgleichungen. Analog der klassischen Mechanik lassen sich auch in der Relativitätstheorie eine Reihe äquivalenter Formen der Bewegungsgleichungen angeben: wir beschäftigen uns in dieser Ziffer mit jenen Gleichungen, in denen die Zeit als unabhängige Veränderliche auftritt.

Man bestätigt durch Nachrechnen, daß die Größe

$$\mathfrak{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - w^2/c^2} \tag{1}$$

als Lagrangefunktion die richtigen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} = \mathfrak{K}_x \tag{2}$$

liefert. Natürlich kann man auch das entsprechende Hamiltonsche Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{K}_x \delta x + \mathfrak{K}_y \delta y + \mathfrak{K}_z \delta z)\, dt = 0 \tag{3}$$

bilden, wobei wieder wie in der klassischen Mechanik[1]) die Bedingung vorgeschrieben ist, daß an den Grenzen des Integrationsintervalles alle variierten Bahnen zusammenfallen.

Bei dieser Darstellung sind in die Lagrangefunktion die Kräfte nicht eingearbeitet. Dies hat seinen Grund darin, daß man in der Relativitätstheorie bei der Wechselwirkung von Massen im allgemeinen die Kräfte nicht durch Funktionen der gleichzeitigen Koordinaten ausdrücken kann, was eine Ausbreitung mit Überlichtgeschwindigkeit zur Voraussetzung hätte. Für den praktisch wichtigen Fall der Bewegung von Massenpunkten in einem äußeren Kraftfeld,

[1]) Vgl. Kap. 2, Ziff. 22 ds. Bd. des Handb.

das durch die Bewegung der Massenpunkte nicht merklich verändert wird, können wir jedoch auch hier eine dem klassischen Ausdruck analoge potentielle Energie angeben. Betrachten wir im besonderen den Fall, daß die äußeren Kräfte elektromagnetischer Natur sind, dann gilt für die Bewegungsgleichung des Massenpunktes

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \mathfrak{K} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{w}\mathfrak{H}]\right). \tag{4a}$$

Drücken wir die elektrische und magnetische Feldstärke durch das skalare und Vektorpotential aus

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t}, \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{a},$$

so ergibt sich durch einfache Rechnung, daß folgende Lagrangefunktion die richtigen Bewegungsgleichungen liefert:

$$\mathfrak{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - w^2/c^2} - e\left[\varphi + \frac{1}{c}(\mathfrak{w}\mathfrak{a})\right]. \tag{4b}$$

Wir können auch in Analogie zur klassischen Mechanik mit Hilfe von (1) Hamiltonsche kanonische Gleichungen aufstellen. Zu diesem Zwecke bilden wir die generalisierten Impulse

$$p_x = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}$$

und aus ihnen nach der alten Vorschrift[1]) die Hamiltonsche Funktion

$$H = \sum \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \mathfrak{L} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{m_0^2 c^2}}\,; \tag{5}$$

dann lauten die neuen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial p_x}, \qquad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \mathfrak{K}_x \tag{6}$$

und analog für die y- und z-Komponente.

Von den Hamiltonschen kanonischen Gleichungen gelangt man genau wie in der klassischen Mechanik[2]) zur Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung

$$m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{1}{m_0^2 c^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]} + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

bzw. für Systeme mit Energieintegral

$$m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{1}{m_0^2 c^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]} + V = E, \tag{8}$$

was sich durch Quadrieren leicht in die Gestalt bringen läßt

$$\frac{1}{2m_0}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = A + BV + CV^2. \tag{9}$$

Der Zusammenhang von A, B, C mit Energie, Masse und Lichtgeschwindigkeit wäre leicht anzugeben (vgl. das Beispiel in Ziff. 26).

Wir sehen also, daß die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung eines Massenpunktes in der Relativitätstheorie dieselbe Gestalt hat wie in der klassischen Mechanik; nur die potentielle Energie hat sich (außer um einen Zahlenfaktor)

[1]) Vgl. Kap. 3, Ziff. 2 ds. Bd. des Handb.

[2]) Vgl. Kap. 3, Ziff. 12 ds. Bd. des Handb. Bei der Anwendung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung wird die Existenz einer allgemeinen Lagrangefunktion vorausgesetzt, die auch bereits die Kräfte enthält wie (4).

noch um ein Zusatzglied vermehrt, welches dem Quadrat ihres ursprünglichen Ausdrucks gleich ist. Diese Bemerkung erweist sich als nützlich bei der Integration praktisch auftretender Fälle, worauf wir in Abschnitt IV noch zurückkommen.

8. Bewegungsgleichungen mit der Eigenzeit als unabhängige Veränderliche. Vom Standpunkt der Relativitätstheorie ist es inkonsequent, eine Variable (die Zeitkoordinate) gegenüber den räumlichen besonders auszuzeichnen, wie es in den bisherigen Formulierungen der Bewegungsgleichungen der Fall war. Diese Inkonsequenz macht sich besonders in dem Auftreten der Wurzelausdrücke $\sqrt{1-w^2/c^2}$ bzw. $1/\sqrt{1-w^2/c^2}$ unangenehm geltend, welche die Integration vielfach sehr erschweren. Es ist ein Vorzug der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung, diese Wurzelausdrücke nicht mehr zu enthalten. Für die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes lassen sich nun Gleichungen angeben, welche als unabhängige Veränderliche die Eigenzeit enthalten; in ihnen treten dann die erwähnten Wurzeln nicht mehr auf.

Wir verzichten darauf, eine eingehende Darstellung der Bewegungsgleichungen mit Eigenzeit zu geben, da wir in der allgemeinen Relativitätstheorie neuerlich auf die Frage zurückkommen und dort in allgemeiner Form die verschiedenen Ansätze besprechen werden. Wir werden auch dort (Ziff. 21) den Zusammenhang mit dem Variationsprinzip besprechen. Hier sei nur bemerkt, daß diese Bewegungsgleichungen folgendermaßen lauten

$$\frac{d}{ds}\left(m_0 c^2 \frac{dx}{ds} + e\mathfrak{a}_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(E-e\varphi)^2}{2m_0 c^2} + e\left(\mathfrak{a}_x \frac{dx}{ds} + \mathfrak{a}_y \frac{dy}{ds} + \mathfrak{a}_z \frac{dz}{ds}\right)\right] \tag{1}$$

und zwei analoge Gleichungen für die y- und z-Komponente. [Wir machen auf die große formale Ähnlichkeit dieser Gleichungen mit den Gleichungen (9) von Ziff. 8 aufmerksam.] Man überzeugt sich durch Ausrechnen leicht davon, daß (1) mit der Minkowskischen Gleichung (6) von Ziff. 4 äquivalent ist. Wir erwähnen nur noch, daß sich ganz analog zu früher Lagrangesche und Hamiltonsche Gleichungen angeben lassen.

9. Die Hyperbelbewegung. Als Abschluß der Punktdynamik behandeln wir noch kurz ein spezielles Bewegungsproblem, das aus historischen Gründen und wegen seiner ausgezeichneten Stellung in der Elektrodynamik eine gewisse Bedeutung beanspruchen kann. Es handelt sich um die Bewegung eines Massenpunktes in einem konstanten Kraftfeld, z. B. einer Ladung im homogenen elektrischen Felde. Elektromagnetisch ist das Problem dadurch ausgezeichnet, daß hier trotz der Beschleunigungen keine Ausstrahlung auftritt. Den Beweis für diese Behauptung findet der Leser in dem mehrfach zitierten Artikel von THIRRING. Durch dieses Fehlen der Ausstrahlung ist es gerechtfertigt, daß wir von den Reaktionskräften der Strahlung gänzlich absehen und nur die konstante äußere Kraft in die Bewegungsgleichungen einsetzen. Es ist klar, daß hier wesentliche Unterschiede gegenüber den klassischen Formeln auftreten müssen, da nach diesen die Geschwindigkeit mit der Zeit über alle Grenzen wächst, in der Relativitätstheorie jedoch die Lichtgeschwindigkeit nie erreichen kann.

Im einzelnen liefert die Rechnung

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = \mathfrak{K}_x . \tag{1}$$

Durch eine erste Integration und eine leichte Umformung ergibt sich

$$\dot{x} = \frac{b(t-t_0)}{\sqrt{1+\frac{b^2}{c^2}(t-t_0)^2}}, \qquad \left(b = \frac{\mathfrak{K}_x}{m_0}\right) \tag{2}$$

die zweite Integration liefert

$$(x - x_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = \frac{m_0^2 c^4}{\mathfrak{K}_x^2}. \qquad (3)$$

Die Weltlinie des Massenpunktes ist also eine Hyperbel, woher die Bezeichnung Hyperbelbewegung für diesen Bewegungstypus stammt. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes wächst, wie vorauszusehen war, nicht über alle Grenzen, sondern nähert sich, wie aus (2) hervorgeht, asymptotisch der Vakuumlichtgeschwindigkeit[1]).

b) Dynamik der Kontinua.

10. Das Problem des starren Körpers. Es ist klar, daß der starre Körper der Newtonschen Mechanik mit der Lorentztransformation (Lorentzkontraktion) unverträglich ist. Wir erwähnen nur, ohne näher darauf einzugehen, daß eine Reihe[2]) von Untersuchungen sich mit dem Problem beschäftigt hat, durch geeignete kinematische Postulate einen starren Körper in die relativistische Dynamik einzuführen. Diese Versuche sind ohne befriedigendes Resultat[3]) geblieben. Die völlige Klärung des Problems (und zwar in negativem Sinne) brachte eine überraschend einfache Betrachtung von LAUE[4]):

Versuchen wir einem ausgedehnten Körper Beschränkungen der Deformierbarkeit aufzuerlegen, wie dies beim starren Körper der klassischen Mechanik der Fall ist, und auf diese Weise zu einem Analogon in der Relativitätstheorie zu gelangen, so bedeutet dies eine Verringerung der unendlich vielen Freiheitsgrade, die jedes Kontinuum ursprünglich besitzt, auf eine endliche Anzahl. Dies erweist sich jedoch als unverträglich mit der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit jeder beliebigen Störung. Bringen wir nämlich an einer beliebig großen Anzahl von Punkten des betrachteten Körpers in ein und demselben Augenblick Kräfte an, so können wir immer eine (kleine) Zeit angeben, innerhalb deren die einzelnen Störungen unabhängig voneinander verlaufen. Einer Steigerung der Zahl der Punkte steht nichts im Wege, solange wir überhaupt Kontinuumsphysik treiben. Wir haben demgemäß in diesem Körper beliebig viele Bewegungen mit je einem oder mehreren Freiheitsgraden, die während einer gewissen Zeit unabhängig verlaufen. Eine Beschränkung der Zahl der Freiheitsgrade erweist sich somit als undurchführbar.

Ebensowenig wie der starre Körper läßt sich die (exakt) inkompressible Flüssigkeit[5]) in die relativistische Mechanik übertragen[6]). Auch hier läßt sich eine analoge Überlegung durchführen. Es müßte sich nämlich eine jede auftretende Druckänderung mit unendlich großer Geschwindigkeit fortpflanzen, die Verdichtungswellen hätten also sicher Überlichtgeschwindigkeit. Auch die in der klassischen Mechanik wichtigen starren Bindungen bei kinematischen

---

[1]) Die erste Untersuchung der mechanischen und elektrodynamischen Eigenschaften der Hyperbelbewegung findet sich in der Arbeit von M. BORN, Ann. d. Phys. Bd. 30, S. 1. 1909.

[2]) Vgl. vor allem M. BORN, Ann. d. Phys. Bd. 30, S. 1. 1909.

[3]) Siehe etwa P. EHRENFEST, Phys. ZS. Bd. 10, S. 918. 1909.

[4]) M. v. LAUE: Phys. ZS. Bd. 12, S. 85. 1911; vgl. auch M. v. LAUE, Relativitätstheorie, Bd. I, 4. Aufl., S. 202–204.

[5]) Über „Flüssigkeiten kleinster Zusammendrückbarkeit" vgl. M. v. LAUE, Relativitätstheorie, Bd. I, S. 267.

[6]) Es ist hervorzuheben, daß man aus dem Relativitätsprinzip allein nichts über die Grenzen der Kompressibilität aussagen kann, sondern daß hierzu noch die explizite Kenntnis der mechanischen Gleichungen erforderlich ist. Man kann also auch keine untere Grenze für die Kompressibilität angeben, solange man nicht die (kaum annehmbare) Voraussetzung einführt, daß die hydrodynamischen Gleichungen für die reibungslose Flüssigkeit exakt richtig sind.

Nebenbedingungen verlieren hier ihren Sinn; keine Störung vermag sofort die ihr äquivalente Gegenkraft hervorzurufen, wie wir schon beim starren Körper gesehen haben.

11. Der Energieimpulstensor. Wir dürfen also, wie aus den vorigen Ziffern hervorgeht, zu einem allgemeinen Aufbau der Dynamik von vornherein keine Annahme über die Zahl der Freiheitsgrade eines Körpers machen. Wir charakterisieren diesen vielmehr in Analogie zur klassischen Dynamik durch einen 16-komponentigen Spannungstensor T^{ik} bzw. T_{ik}, T_i^k. Ob wir den kovarianten, kontravarianten oder gemischten Tensor verwenden, ist für die spezielle Relativitätstheorie belanglos. Wir bringen die Formeln in der Gestalt, die sie später für die allgemeine Relativitätstheorie am bequemsten verwendbar macht; dort wird sich auch (vgl. Ziff. 22) ein physikalischer Unterschied zwischen den einzelnen Tensoren ergeben.

Bei der Aufstellung des Energieimpulstensors tritt nun wieder der schon mehrfach betonte wesentliche Unterschied der relativistischen Dynamik hervor. Da alle Gleichungen gegenüber der Lorentztransformation kovariant sein müssen, haben wir es hier mit einem 16-komponentigen Tensor zweiter Stufe zu tun. Seine Komponenten $T^{ik}(i, k \neq 4)$ stehen in Analogie zu den elastischen Spannungen; den exakten Zusammenhang werden wir später besprechen. Die Komponenten $T^{i4}(i \neq 4)$ stellen die Komponenten des räumlichen Vektors der Impulsdichte dar, die Komponenten $T^{4i}(i \neq 4)$ die des räumlichen Vektors der Energieströmungsdichte[1]), T^{44} schließlich die Energiedichte.

Als Grundgesetz der Dynamik formulieren wir

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = k^i. \tag{1}$$

Diese Gleichungen stellen mit $i = 1, 2, 3$ den verallgemeinerten Impulssatz dar, die vierte Gleichung ($i = 4$) den Energiesatz. Man nennt deshalb vielfach auch die Komponenten $T^{ik}(i, k \neq 4)$ die Komponenten der Impulsströmung, um die Analogie zu den Komponenten T^{4i}, welche die Energieströmung darstellen, hervorzuheben. Der Vierervektor k^i stellt die Kraftdichte dar, herrührend von allen jenen Energiearten, die wir in den Energieimpulstensor nicht aufgenommen haben. Durch Integration über das gesamte Volumen erhalten wir die auf den Körper wirkende Gesamtkraft.

Um die Rechnungen mit dem Energieimpulstensor zu veranschaulichen, wollen wir aus ihm für den Spezialfall des Massenpunktes die Minkowskischen Bewegungsgleichungen (6) von Ziff. 4 wiedergewinnen. Wir setzen zu diesem Zwecke für den Energieimpulstensor des Massenpunktes an

$$T^{ik} = \varrho_0 u^i u^k. \tag{2}$$

Darin bedeutet ϱ_0 die Ruhmassendichte und [vgl. Ziff. 3, Gleichung (4)]

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

die Vierergeschwindigkeit. Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\varrho_0 u^i u^k) = k^i. \tag{3}$$

---

[1]) Bei Rechnungen mit dem Energieimpulstensor denken wir uns immer die Einheiten so gewählt, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 wird. Andernfalls müßten wir die T^{i4} mit dem Faktor c, die T^{4i} mit dem Faktor $1/c$ versehen. Gleichung (10a) würde dann lauten: $T^{i4} = \frac{1}{c^2} T^{4i}$.

Durch Ausdifferenzieren ergibt sich

$$u_i \frac{\partial}{\partial x^k}(\varrho_0 u^k) + \varrho_0 \frac{d u^i}{d s} = k^i. \tag{4}$$

Der Skalar $\frac{\partial}{\partial x^k}(\varrho_0 u^k)$ verschwindet aber, wovon man sich im Ruhkoordinatensystem sofort überzeugt. Die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\varrho_0 u^k) = 0 \tag{5}$$

stellt die vierdimensionale Schreibweise der Kontinuitätsgleichung für inkohärente Materie dar. Die Gleichung (4) wird also, da jetzt $c = 1$ ist, gleichlautend mit Ziff. 4, Gleichung (4) und wir können durch Integration über das Volumen und Übergang zur gewöhnlichen Zeit wieder die Minkowskischen Bewegungsgleichungen (6) von Ziff. 4 erhalten.

Wir erkennen für den Spezialfall des Massenpunktes, daß der Energieimpulstensor symmetrisch[1]) ist

$$T^{ik} = T^{ki} \tag{6}$$

und wenden uns nun der für das folgende fundamentalen Frage zu, ob diese Symmetrie für jedes mechanische System zu Recht besteht. Wenn wir die Annahme machen, daß sich die Materie aus elektromagnetischen Feldern aufbauen läßt, so ergibt sich diese Symmetrie von selbst, da der Energieimpulstensor des elektromagnetischen Feldes bekanntlich symmetrisch ist. Die Annahme eines elektromagnetischen Weltbildes wäre aber nur auf Grund einer allgemeinen Theorie der Materie gestattet und führt überdies zu einer Reihe von Schwierigkeiten in der Frage der Ladungsexistenz und anderen Punkten, auf die wir hier nicht einzugehen haben. Wir wollen vielmehr rein phänomenologisch vorgehen und untersuchen, was sich aus allgemeinen Forderungen über die Symmetrieeigenschaften des Energieimpulstensors folgern läßt. Zu diesem Zwecke suchen wir die Gesetze für die Erhaltung des Drehimpulses auf, die sich aus denen für die Erhaltung des Impulses $\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = k^i \ (i \neq 4)$ ableiten lassen.

Als Drehmoment definieren wir, wie in der klassischen Mechanik,

$$\mathfrak{M} = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{k}]\, dV, \tag{7}$$

als Drehimpuls

$$\mathfrak{L} = \int [\mathfrak{r}\mathfrak{g}]\, dV. \tag{8}$$

Hier bedeuten $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{g}$ die Dichte der Kraft bzw. des Impulses. Aus (1) ergibt sich dann durch eine einfache Rechnung

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{L}}{dt}. \tag{9}$$

Damit ist der Drehimpulssatz als eine Folge unserer dynamischen Grundgleichungen (1) bewiesen.

Die Gültigkeit von (9) ist jedoch bereits in der klassischen Mechanik an eine wichtige Bedingung geknüpft; es muß nämlich, wie früher[2]) ausführlich erörtert worden ist, die Relation gelten

$$T_0^{ik} = T_0^{ki} \ (i, k \neq 4), \tag{10}$$

[1]) Diese Symmetrie bleibt für den kovarianten Tensor erhalten, wenn sie für den kontravarianten gilt; ebenso macht sie es überflüssig, beim gemischten anzugeben, ob der erste oder zweite Zeiger kovariant ist.

[2]) Siehe Kap. 1, Ziff. 11 ds. Bd. des Handb.

da sonst der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses verletzt würde. In der klassischen Mechanik gilt diese Bedingung für alle relativ zueinander gradlinig gleichförmig bewegten Bezugssysteme. In der relativistischen Dynamik nehmen wir dieselbe Bedingung als erfüllt an, wobei aber an Stelle der Galileitransformation die Lorentztransformation bei der Umrechnung der Tensorkomponenten zu verwenden ist. Gehen wir also zu einem neuen Bezugssystem über durch Anwendung der Transformation (2) von Ziff. 3

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad y' = y,$$

so erhalten wir wegen $T'^{ik} = T^{\alpha\beta}\frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\beta}$

$$\sqrt{1-v^2}\, T'^{12} = T^{12} - v T^{42}, \tag{11a}$$

$$\sqrt{1-v^2}\, T'^{21} = T^{21} - v T^{24}. \tag{11b}$$

Soll in diesem Bezugssystem gleichfalls die geforderte Symmetrie der T^{ik} $(i, k \neq 4)$ bestehen, so ergibt sich

$$T^{42} = T^{24}. \tag{10a}$$

Wir haben damit gefunden, daß aus der in jedem Bezugssystem gültigen Symmetrie der Spannungskomponenten $T_{ik} = T_{ki}$ $(i, k \neq 4)$ die vollständige Symmetrie des Energieimpulstensors folgt. Diese Symmetrie zeigt einen physikalischen Zusammenhang zwischen Impulsdichte und Dichte jeder Energieströmung auf.

Der allgemeine Fall, daß elektromagnetische Kräfte gleichfalls mitwirken, erfordert keine besondere Behandlung, denn der elektromagnetische Impulstensor ist, wie bereits oben erwähnt, symmetrisch. Die ganze Betrachtung ist völlig unabhängig von Hypothesen, die man über die Natur der Materie machen kann. Wir haben es hier lediglich mit einem die Erfahrungstatsachen wiedergebenden Ansatz für den mechanischen Energieimpulstensor zu tun.

12. Die Trägheit der Energie. Die Tatsache, daß die Dichte der Energieströmung und des Impulses einander proportional sind, ist von so fundamentaler Bedeutung, daß wir uns nicht mit ihrer mathematischen Formulierung begnügen, sondern vielmehr sie in ihren physikalischen Konsequenzen möglichst anschaulich machen wollen. Wir haben aus Ziff. 11, Gleichung (10 a) erkannt, daß jede Energieströmung Impuls besitzt, d. h. daß die Energie träge Masse hat. Wir wollen im folgenden an einigen Beispielen zeigen, wie weit dieses Resultat für die Relativitätstheorie charakteristisch ist.

Wir knüpfen hierbei zunächst an das folgende, von EINSTEIN herrührende Gedankenexperiment an. Dieses zeigt, daß die Voraussetzung, jede Energie lasse sich in Strahlung umwandeln, zusammen mit dem Schwerpunktsatze zwangläufig zum Satz von der Trägheit der Energie führt. Wir machen dabei keine Annahme über die Gültigkeit des Relativitätsprinzips. Von einer Kastenwand A werde eine ebene Lichtwelle mit der Energie E zur gegenüberstehenden Kastenwand B geschickt, wo sie absorbiert wird. Bei Aussenden der Lichtwelle erhält die Masse M des Kastens auf Grund des Impulssatzes der Elektrodynamik einen Rückstoß, dessen Impuls gleich ist E/c, beim Auftreten des Lichtstrahles einen entgegengesetzten Impuls vom gleichen Betrag. In der Zeit, in der das Licht den Kasten durchfliegt, hat sich dieser um die Strecke $\frac{\overline{AB}\cdot E}{c^2 M}$ etwa nach links verschoben, bei Absorption des Lichtes kommt er wieder zur Ruhe (Glieder höherer Ordnung sind dabei vernachlässigt). Wir bringen

jetzt durch irgendein Transportwerkzeug die Energiemenge E in beliebiger Gestalt (Wärme, chemische Energie usw.) wieder nach A zurück und ebenso das Transportwerkzeug in seine Ausgangslage bei B. Unter der Voraussetzung, daß das Transportwerkzeug beim Hin- und Rückweg die gleiche Masse besitzt, geht dieser Transport ohne Verschiebung des Kastenschwerpunktes vor sich. Wir haben damit einen Kreisprozeß geschlossen, dessen Ergebnis in einer Verschiebung des Schwerpunkts eines abgeschlossenen Systems besteht. Durch Wiederholung des Prozesses könnte sich jedes abgeschlossene System beliebig weit von seiner Anfangslage entfernen; diese dem physikalischen Empfinden widerstrebende Verletzung des mechanischen Schwerpunktsatzes fällt weg, wenn wir dem Transportgerät auf seinem Weg von B nach A eine um E/c^2 größere Masse zuschreiben als auf dem Rückweg. Dann ist der Transport von B nach A mit der entgegengesetzt gleichen Schwerpunktsverschiebung $\frac{\overline{AB} \cdot E}{c^2 M}$ verknüpft, am Ende des Prozesses also der Schwerpunkt des Systems unverschoben geblieben. Es ist damit gezeigt, daß unter den erwähnten Voraussetzungen jeder Energie vom Betrage E eine träge Masse E/c^2 zuzuschreiben ist.

Während wir bei dieser Ableitung sowohl Voraussetzungen über den Impuls der Strahlung aus der Elektrodynamik und über den Schwerpunktssatz aus der Mechanik entlehnen mußten, um das Resultat von der Trägheit der Energie zu gewinnen, erlaubt das spezielle Relativitätsprinzip, dieses Resultat aus seinen Grundgleichungen anschaulich abzuleiten, ohne die in Ziff. 11 gemachten Erörterungen über die Symmetrie des Energieimpulstensors zu benutzen. Wir zeigen dies an zwei Beispielen, von denen das erste noch optische Elemente enthält, während das zweite rein mechanischer Natur ist. Das erste Beispiel stammt von EINSTEIN[1]), das zweite von FRANK[2]).

Wir betrachten einen Körper, der im System K ruhend, nach entgegengesetzten Richtungen ($+x$- bzw. $-x$-Achse) gleichzeitig die gleiche Energiemenge ε in Form zweier ebener elektromagnetischer Wellen aussendet. Der Körper bleibt dann aus Symmetriegründen in Ruhe, behält also auch in einem relativ zu K mit konstanter Geschwindigkeit v parallel zur x-Achse bewegten Systems K' seine Geschwindigkeit dauernd bei. Im gestrichenen System jedoch stellt sich der Vorgang anders dar. Es wurden nämlich, von ihm aus gesehen, verschiedene Energiebeträge nach den beiden Richtungen entsendet, und zwar, wie aus den Transformationsgleichungen der Elektrodynamik folgt, bzw. die Energien

$$\varepsilon_1' = \frac{\varepsilon(1 - v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (1\text{a})$$

$$\varepsilon_2' = \frac{\varepsilon(1 + v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (1\text{b})$$

Die Energien des Körpers vor und nach der Emission des Lichtes hängen dann folgendermaßen zusammen:

$$E_0 = E + 2\varepsilon, \qquad (2\text{a})$$

$$E_0' = E' + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (2\text{b})$$

Daraus erhalten wir

$$E_0' - E_0 = (E' - E) + 2\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right). \qquad (3)$$

[1]) A. EINSTEIN, Ann. d. Phys. Bd. 18, S. 639. 1905.
[2]) PH. FRANK, Lotos Bd. 70, S. 301. 1922.

Auf der linken Seite von (3) steht offenbar die kinetische Energie des Körpers vor der Emission des Lichtes (es steht dort die Differenz der Energien des Körpers, gemessen einmal im Ruhsystem und dann im gestrichenen System, gegen das sich der Körper mit der Geschwindigkeit v bewegt). Die Differenz $(E' - E)$ rechts liefert die kinetische Energie des Körpers nach der Emission des Lichtes; sie ist kleiner als vor der Lichtemission, und da die Geschwindigkeit des Körpers konstant geblieben ist, bedeutet dies einen Massenverlust. Der Verlust an kinetischer Energie ergibt sich aus dem dritten Glied der rechten Seite von (3) zu

$$\Delta E_{\text{kin}} = 2\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right). \tag{4}$$

Wir erkennen darin die Formel (8) von Ziff. 4 für die kinetische Energie eines Massenpunktes von der Ruhmasse $2\frac{\varepsilon}{c^2}$ wieder, die nach Gleichung 16 von Ziff. 5 für kleine Geschwindigkeiten den klassischen Ausdruck $\varepsilon^2 v^2/c^2$ annimmt. Das Relativitätsprinzip ergibt also zwangläufig ohne Heranziehung des Schwerpunktsatzes das oben gefundene Resultat von der Trägheit der Energie[1]).

Das zweite Beispiel handelt vom unelastischen Zusammenstoß zweier gleicher Kugeln, die sich im Bezugssystem K mit der Geschwindigkeit w bzw. $-w$ in der x-Richtung aufeinander zu bewegen; nach dem Zusammenstoß bleiben die beiden Kugeln in Ruhe, da sich voraussetzungsgemäß ihre gesamte kinetische Energie in Wärme verwandelt.

Dies drückt sich in Formeln folgendermaßen aus: Die kinetische Energie vor dem Zusammenstoß beträgt

$$E_{\text{kin}} = 2m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} - 1\right). \tag{5}$$

Der Impuls der ersten Kugel ist entgegengesetzt gleich dem der zweiten

$$\mathfrak{G}_{1x} = \frac{m_0 w}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = -\mathfrak{G}_{2x}; \tag{6}$$

der Gesamtimpuls verschwindet.

Nach dem Zusammenstoß ist die kinetische Energie in Wärme übergegangen, der Gesamtimpuls bleibt Null, da jetzt der Impuls für jede einzelne Kugel verschwindet. Ob der Wärme Trägheit zukommt, können wir aus der Betrachtung in K allein nicht erschließen, wir verwenden vielmehr dazu ein zweites Bezugssystem K', das sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit w entlang der x-Achse bewegt.

Dann lauten unter Zuhilfenahme von Ziff. 3, Gleichung (3), die Geschwindigkeiten in K' vor dem Stoß

$$v_1' = 0, \qquad v_2' = \frac{-2w}{1 + \frac{w^2}{c^2}}. \tag{7}$$

Die Impulse sind

$$\mathfrak{G}_{1x}' = 0, \qquad \mathfrak{G}_{2x}' = -\frac{2m_0 w}{1 - w^2/c^2}. \tag{8}$$

Also beträgt der Gesamtimpuls vor dem Stoß

$$(\mathfrak{G}) = -\frac{2m_0 w}{1 - w^2/c^2}. \tag{9}$$

---

[1]) Die vollständige Gestalt der hier für einen Spezialfall verwendeten Transformationsformel für die Energie einer ebenen elektromagnetischen Welle findet der Leser bei THIRRING, Bd. XII ds. Handb.; sie spielt weiter unten bei der Lichtquantenmechanik noch eine Rolle.

Der Gesamtimpuls muß beim Zusammenstoß erhalten bleiben. Da nach dem Stoß beide Kugeln in K ruhen, ihre gemeinsame Geschwindigkeit in K' also $-w$ beträgt, so gilt

$$(\mathfrak{G}) = -\frac{2\mu_0 w}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \tag{10}$$

μ_0 bedeutet dabei die vorläufig noch unbekannte Ruhmasse einer Kugel nach dem Stoß. Durch Kombination von (9) und (10) erhalten wir für die Änderung der Ruhmasse beim Stoß

$$\mu_0 - m_0 = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} - 1 \right). \tag{11}$$

Dies steht wieder im Einklang mit dem früheren Resultat über die Trägheit der Energie.

Wir heben die allgemeine Methodik der geschilderten Gedankenexperimente hervor: Es wird ein physikalischer Prozeß angegeben, für den in einem bestimmten Bezugssystem aus Symmetriegründen ein Integral bekannt ist: die symmetrische Lichtemission läßt die Geschwindigkeit ungeändert, der unelastische Zusammenstoß bringt beide Kugeln zur Ruhe. Die Aufhebung der Symmetriebedingungen durch Übergang zu einem zweiten Bezugssystem führt dann in diesem zu einer Aussage über die Veränderung beim Ablauf des gewählten Prozesses und liefert damit das gesuchte Resultat.

13. Diskussion der Eigenschaften des Energie-Impulstensors; Transformationsformel und Spezialfälle. Die physikalische Bedeutung der Annahme eines 10-komponentigen Energieimpulstensors überblickt man am besten, wenn man die Transformationsformeln für den Übergang zu einem anderen Bezugssystem explizit hinschreibt. Wir wählen die spezielle Transformation[1] (2) von Ziff. 3 und erhalten so, wenn das ungestrichene System ein Ruhsystem und also $T_0^{4i} = 0 \; (i \neq 4)$ ist:

$$T^{11'} = \frac{T_0^{11} + v^2 T_0^{44}}{1 - v^2}, \tag{1a}$$

$$T^{22'} = T_0^{22}, \qquad T^{33'} = T_0^{33}, \tag{1b}$$

$$T^{32'} = T_0^{32}, \qquad T^{12'} = \frac{T_0^{12}}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad T^{13'} = \frac{T_0^{13}}{\sqrt{1 - v^2}}, \tag{1c}$$

$$T^{41'} = \frac{v(T_0^{11} + T_0^{44})}{1 - v^2}, \tag{1d}$$

$$T^{42'} = \frac{v\, T_0^{12}}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad T^{43'} = \frac{v\, T_0^{13}}{\sqrt{1 - v^2}}, \tag{1e}$$

$$T^{44'} = \frac{T_0^{44} + v^2 T^{11}}{1 - v^2}. \tag{1f}$$

Integrieren wir über den ganzen Körper, so ergeben sich unter Fortlassung der Striche folgende Ausdrücke für Gesamtenergie und Gesamtimpuls:

$$E = \int T^{44} dV = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \left(E_0 + v^2 \int T_0^{11} dV_0\right), \tag{2a}$$

$$\mathfrak{G}_x = \int T^{41} dV = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \left(E_0 + \int T_0^{11} dV_0\right), \tag{2b}$$

$$\mathfrak{G}_y = \int T^{42} dV = v \int T_0^{12} dV_0, \tag{2c}$$

$$\mathfrak{G}_z = \int T^{43'} dV = v \int T_0^{13} dV_0. \tag{2d}$$

[1] Wir erinnern daran, daß überall $c = 1$ gesetzt ist.

Die Formeln werden besonders einfach, wenn in dem Ruhsystem gleichförmiger Druck ($p_0 = T_0^{11} = T_0^{22} = T_0^{33}$; $T_0^{12} = T_0^{23} = T_0^{13} = 0$) herrscht. Wir erhalten dann aus (2a, b, c, d) für Gesamtenergie und Gesamtimpuls

$$E = \frac{E_0 + v^2 p_0 V_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \tag{3a}$$

$$\mathfrak{G}_x = \frac{v(E_0 + p_0 V_0)}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad \mathfrak{G}_y = \mathfrak{G}_z = 0. \tag{3b}$$

Setzen wir noch den Druck gleich Null, so erkennen wir, daß sich dieser Körper wie ein Massenpunkt verhält, dessen Ruhmasse gegeben ist durch

$$m_0 = E_0. \tag{4}$$

Bei nichtverschwindendem Druck ergäbe sich noch ein Zusatzterm in den Ausdrücken für Energie und Impuls, herrührend von dem Gliede mit $p_0 V_0$; doch ist jetzt die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Energie eine andere als beim Massenpunkt. Wir haben damit eine neue Formulierung des bereits eingehend diskutierten Satzes von der Trägheit der Energie gefunden, und erkennen weiter, daß nicht nur der Energie, sondern auch den elastischen Spannungen träge Masse zukommt. [Es gilt nicht mehr $E/|G| \sim v$, wie man durch Division von (3a) und (3b) erkennt.]

Aus der Verknüpfung von Energie und Impuls ergibt sich weiter die Erklärung für ein bemerkenswertes, von der Relativitätstheorie gefordertes Verhalten. Führen wir beispielsweise einem im Bezugssystem K geradlinig gleichförmig bewegten Körper Wärme zu, so erhöht sich dadurch seine Energie, d. h. seine träge Masse und damit im Falle gleichbleibender Geschwindigkeit sein Impuls. Da aber jede Impulszunahme die Einwirkung einer Kraft zur Voraussetzung hat, erkennt man, daß der unter Energiezufuhr stehende Körper zur Aufrechterhaltung seiner Geschwindigkeit einer äußeren Kraftwirkung bedarf. Die Wirkung einer Kraft besteht also nur bei gleichbleibender Masse ausschließlich in einer Beschleunigung. Für die Durchrechnung einzelner Fälle verweisen wir auf das mehrfach zitierte Werk von LAUE[1]).

Ein weiterer wichtiger Unterschied gegenüber der klassischen Dynamik besteht darin, daß, wie aus den allgemeinen Formeln (1d) bzw. (1e) hervorgeht, Impuls und Geschwindigkeit nicht mehr parallel sind. Vielmehr treten im allgemeinen transversale Impulskomponenten auf; diese sind an das Auftreten von Schubspannungen im Ruhsystem geknüpft, wie (1e) zeigt. Dieser transversale Impuls stellt eine Abweichung von der klassischen Mechanik dar, die nicht wie die Effekte beim Massenpunkt von zweiter Ordnung in v/c ist, sondern vielmehr von nullter Ordnung. Daß die theoretisch geforderten Abweichungen unbeobachtbar klein sind, liegt daran, daß der Beitrag der Spannungen zur trägen Masse (der Zahlenkoeffizient des Geschwindigkeitsvektors) klein ist gegenüber dem Beitrag der Energie[2]). Könnten wir mit sehr stark gespannten Körpern experimentieren, so ließe sich also die Ungültigkeit der klassischen Mechanik bereits für beliebig kleine Geschwindigkeiten zeigen und würde auch im Limes $v \to 0$ nicht zu bestehen aufhören. Wir erkennen daraus, daß die übliche Behauptung, für kleine Geschwindigkeiten gehe die Dynamik der speziellen Relativitätstheorie in die klassische Mechanik über, nur für die Betrachtung ungespannter Körper zu Recht besteht.

[1]) M. v. LAUE, Relativitätstheorie, Bd. I, 4. Aufl., S. 196 (Fall von Joulescher Wärme), S. 222.

[2]) Man erkennt aus Dimensionsgründen, daß bei $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec die rechte Seite von (1e) noch durch c^2 zu dividieren wäre.

14. Das vollständige statische System; die relativen elastischen Spannungen. Aus den Transformationsformeln für den Energieimpulstensor erkennt man, daß eine Änderung der Geschwindigkeit im allgemeinen auch mit einer transversalen Impulsänderung verknüpft ist, demgemäß also zur Translationsbewegung im allgemeinen ein Drehmoment erforderlich ist. Es gibt jedoch eine große Klasse von Systemen, bei denen diese transversale Kraft wegfällt, die wir nach LAUE als vollständige statische Systeme bezeichnen. Diese sind durch die Bedingung charakterisiert, daß im Ruhsystem die Energieströmung verschwindet und auf ihre Oberfläche von der Umgebung nur ein isotroper Druck ausgeübt wird. Mathematisch äquivalent damit ist die Bedingung

$$\int T_0^{11} dV_0 = \int T_0^{22} dV_0 = \int T_0^{33} dV_0 = p_0 V_0, \tag{1a}$$

$$\int T_0^{21} dV_0 = \int T_0^{31} dV_0 = \int T_0^{23} dV_0 = 0. \tag{1b}$$

Setzen wir (1a, b) in die Transformationsgleichungen (2a, b, c, d) von Ziff. 13 ein, so erhalten wir

$$E = \frac{E_0 + v^2 p_0 V_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \tag{2a}$$

$$\mathfrak{G}_x = \frac{v(E_0 + p_0 V_0)}{\sqrt{1 - v^2}}, \tag{2b}$$

$$\mathfrak{G}_y = \mathfrak{G}_z = 0. \tag{2c}$$

Wir erkennen daraus, daß jedem vollständigen statischen System für $p_0 = 0$ Gesamtenergie und Gesamtimpuls eines Massenpunktes von der Ruhmasse $m_0 = E_0$ zuzuordnen sind. Für $p_0 \neq 0$ gelten zwar nicht die Formeln des Massenpunktes, doch fehlen auch hier die transversellen Impulskomponenten.

Dieses Resultat hat weitgehende Bedeutung, vor allem für jene Fälle, wo bereits im Ruhsystem verschiedene Arten von Energie in Wechselwirkung stehen, also z. B. bei einem geladenen Kondensator die elektrischen und elastischen Spannungen. Zerlegt man dann im bewegten System den Energieimpulstensor in zwei Summanden, deren einer vom elektrischen, deren anderer vom elastischen Energieanteil herrührt, so liefert im allgemeinen jeder Anteil für sich eine transversale Impulskomponente. Die Summe dieser beiden ergibt jedoch nach dem oben Gesagten für jedes statische System immer Null, ein Drehmoment ist für die Aufrechterhaltung der Translationsbewegung nicht erforderlich. Für die näheren Ausführungen verweisen wir auf Ziff. 24.

Die Bedeutung vollständiger statischer Systeme für das Äquivalenzprinzip wird in Ziff. 19 behandelt.

Wir bringen noch anschließend eine Bemerkung über die physikalische Bedeutung der Komponenten des Energieimpulstensors. Die Divergenzgleichung (1) von Ziff. 11, der sie genügen, bezieht sich auf einen im Raum festen Punkt und nicht auf ein materielles Volumelement (Eulersche Gleichungen im Gegensatz zu dem Lagrangeschen); in der Mechanik hingegen definiert man die elastischen Spannungen unter Bezugnahme auf ein bestimmtes Volumelement. Wir müssen also, um Analogie zu erhalten, an Stelle des lokalen Spannungstensors den substantiellen einführen. Diese auf ein bestimmtes Materieelement bezogenen Spannungen nennt LAUE die relativen Spannungen oder elastische Spannungen schlechtweg. Ihren Ausdruck gewinnen wir folgendermaßen: Bezeichnen wir die lokale Änderung der i-Komponente des Vektors der Impulsdichte mit $\partial \mathfrak{G}_i / \partial t$, die substantielle mit $D\mathfrak{G}_i / Dt$, so hängen diese beiden Größen nach bekannten Überlegungen aus der Hydrodynamik durch die Gleichung zusammen

$$\frac{D\mathfrak{G}_i}{Dt} = \frac{\partial \mathfrak{G}_i}{\partial t} + \sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\mathfrak{G}_i \mathfrak{w}_k), \tag{3}$$

wo $\mathfrak{w}$ der Geschwindigkeitsvektor im betreffenden Raumpunkt sein soll. Weiter gilt für $\partial \mathfrak{G}_i/\partial t$ wegen Ziff. 11, Gleichung (1)

$$\frac{\partial \mathfrak{G}_i}{\partial t} + \sum_1^3 \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

also

$$\frac{D \mathfrak{G}_i}{D t} = -\sum_1^3 \frac{\partial T^{*ik}}{\partial x^k}. \tag{4}$$

Der Tensor[1]) der relativen elastischen Spannungen T^{*ik} lautet somit

$$T^{*ik} = T^{ik} - \mathfrak{G}_i \mathfrak{w}_k. \tag{5}$$

Die Transformationsformeln der relativen elastischen Spannungen lauten für die spezielle Transformation (2) von Ziff. 3

$$T^{*11} = T_0^{*11}, \qquad T^{*22} = T_0^{*22}, \qquad T^{*33} = T_0^{*33}, \tag{6a}$$

$$T^{*12} = \frac{T_0^{*12}}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad T^{*13} = \frac{T_0^{*13}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{6b}$$

$$T^{*21} = T_0^{*21}\sqrt{1-v^2}, \qquad T^{*31} = T_0^{*31}\sqrt{1-v^2}, \tag{6c}$$

$$T^{*23} = T_0^{*23}, \qquad T^{*32} = T_0^{*32}. \tag{6d}$$

Im allgemeinen ist T^{*ik} nicht symmetrisch; nur wenn die Impulsdichte an jedem Orte die Richtung der Geschwindigkeit hätte, so wäre $T^{*ik} = T^{*ki}$. Wir haben aber schon oben [vgl. Gleichung (1d, e) von Ziff. 13] gesehen, daß dies bei Auftreten von Schubspannungen im allgemeinen nicht der Fall ist. Welcher der beiden Spannungstensoren jeweils zu verwenden ist, ist eine Frage der Bequemlichkeit der Rechnung.

15. Die Trägheit der Energie und das Prinzip der kleinsten Wirkung. Bereits in der klassischen Mechanik ist es in der Dynamik kontinuierlicher Medien nicht möglich, ohne Heranziehung thermodynamischer Gesichtspunkte auszukommen. Es liegt dies bekanntlich daran, daß einige Zustandsgrößen temperaturabhängig sind und deshalb die bei den Bewegungen entwickelte Wärme berücksichtigt werden muß. In der Relativitätstheorie tritt hierzu die Notwendigkeit, die Trägheit der den einzelnen Elementen in Form von Wärme zu- und abströmenden Energie in Rechnung zu setzen. Daß Wärmeentwicklung bei konstanter Geschwindigkeit ohne Einwirkung einer äußeren Kraft im allgemeinen unmöglich ist, haben wir bereits in Ziff. 13 besprochen. Demgemäß müssen in alle dynamischen Gleichungen, welche Fälle mit Wärmeentwicklung enthalten, die thermodynamischen Gleichungen mit einbezogen werden. Formal am einfachsten geschieht diese Vereinigung in dem Prinzip der kleinsten Wirkung, welches hier ganz analog zur klassischen Theorie aufgestellt werden kann[2]). Das Prinzip lautet

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta E_{\text{kin}} - \delta F + \delta A)\, dt = 0, \tag{1}$$

---

[1]) Er ist nur für die räumlichen Komponenten ($i, k \neq 4$) definiert; wir sprechen hier von einem Tensor, wie man in der Elastizitätstheorie vom Drucktensor spricht.

[2]) Vgl. Kap. 2, Ziff. 25 ds. Bd. des Handb.

wobei wieder an den Grenzen alle Vergleichssysteme übereinstimmen sollen. Wir wählen als unabhängige Veränderliche die Temperatur T, das Volumen und die mechanischen Koordinaten, und es sollen bedeuten

$$F = E - TS = \text{freie Energie}, \quad (S = \text{Entropie})$$
$$E_{\text{kin}} = \mathfrak{w}\mathfrak{G},$$

δA = die Arbeit, die bei Veränderung der unabhängigen Variablen geleistet wird, $\delta A = -p\delta V + \mathfrak{w}\delta\mathfrak{G}$.

Während aber in der klassischen Theorie F von den Koordinaten und deren Ableitungen, E_{kin} von Druck und Temperatur unabhängig waren, gilt dies in der Relativitätstheorie nicht mehr. Mit der Bezeichnung

$$\mathfrak{L} = -E + TS + \mathfrak{w}\mathfrak{G} \tag{2}$$

erhalten wir dann aus (1) als Lagrangesche Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{x}} = \mathfrak{K}_x, \tag{3a}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial V} = V, \tag{3b}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial T} = S. \tag{3c}$$

Man kann die Transformationsgleichungen für p, S aus der Bemerkung gewinnen, daß im Ruhsystem

$$\mathfrak{L}_0 = -E_0 + TS_0 = -F_0$$

und weiter

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0\sqrt{1 - v^2}, \tag{4}$$

also

$$\mathfrak{L}dt = \mathfrak{L}_0 dt_0, \tag{5}$$

ist.

16. Die relativistische Hydrodynamik. Die Hydrodynamik bietet in der Relativitätstheorie im wesentlichen nur mathematisches Interesse, da sie weder besondere begriffliche Merkwürdigkeiten aufweist, noch in ihren Resultaten auch nur im entferntesten mit der Erfahrung verglichen werden kann. Wir begnügen uns deswegen mit der kurzen Angabe der Gleichungen für die ideale reibungslose Flüssigkeit in Analogie zu den Eulerschen Gleichungen der klassischen Hydrodynamik. In diesem Falle reduzieren sich die räumlichen Komponenten T^{ik} $(i, k \neq 4)$ des Spannungstensors auf die des Massenpunktes, sofern $i \neq k$; die Diagonalglieder enthalten außerdem noch den isotropen Druck. Das Schema des Energieimpulstensors lautet also

$$T_i^k = \varrho_0 u_i u^k - p\,\delta_i^k \qquad (\delta_i^k = 1 \text{ für } i = k;\ \delta_i^k = 0 \text{ für } i \neq k). \tag{1}$$

Die Ruhdichte der Energie ist nicht durch ϱ_0, sondern durch $\varrho_0 - p$ gegeben; wir erkennen wieder den in Ziff. 13 diskutierten Beitrag der Spannungen zur Ruheenergie. Daraus bilden wir die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 = \varrho_0 u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + u_i \frac{\partial \varrho_0 u^k}{\partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i}. \tag{2}$$

Die ersten drei Komponenten von (2) bilden wieder die Bewegungsgleichungen im engeren Sinne, die vierte liefert den Energiesatz. Multiplizieren wir (2) mit u^i, so erhalten wir unter Berücksichtigung von Ziff. 3, Gleichung (6)

$$\frac{\partial \varrho_0 u^k}{\partial x^k} - \frac{dp}{ds} = 0. \tag{3}$$

Das ist die Kontinuitätsgleichung der relativistischen Dynamik, die mit der klassischen bis auf den unbeobachtbar[1]) kleinen Betrag dp/ds übereinstimmt, den die Spannungen zur Ruheenergie liefern (vgl. Ziff. 13). Was die Frage der Definitionsmöglichkeit einer inkompressiblen Flüssigkeit anlangt, sei auf das in Ziff. 10 Gesagte verwiesen. Wir erwähnen nur noch, daß in Verallgemeinerung des Begriffs der inkompressiblen Flüssigkeit „Flüssigkeiten geringster Zusammendrückbarkeit" definiert wurden, deren mathematisch interessante Eigenschaften von LAUE eingehend diskutiert worden sind. Eine nähere Untersuchung des Überganges von den hydrodynamischen Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie zu denen der klassischen Mechanik findet sich in einer Arbeit von GRÜNBERG[2]).

III. Allgemeine Relativitätstheorie.

17. Die Stellung der Mechanik in der allgemeinen Relativitätstheorie. Ebenso wie wir in Anbetracht des Zwecks dieses Kapitels in Ziff. 4 bei der Gewinnung der Minkowskischen Bewegungsgleichungen die Kenntnis der speziellen Relativitätstheorie vorausgesetzt haben, müssen wir für die folgenden Ziffern die Vertrautheit mit den Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie als gegeben ansehen[3]). Hier handelt es sich lediglich um die Stellung der Mechanik im engeren Sinne im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie.

Verstehen wir unter Mechanik im engeren Sinne des Wortes die Kenntnis der Gesetze, die für die Weltlinien materieller Elemente gelten, so hat dieser Zweig der Physik durch die allgemeine Relativitätstheorie seine selbständige Stellung verloren und ist ein Teil der Feldphysik geworden. (Wir möchten diesen Punkt als einen begrifflich sehr befriedigenden prinzipiellen Fortschritt der Einsteinschen Gravitationstheorie bezeichnen; sie hat durch die Vereinigung von Feld- und Bewegungsgesetzen einen Stand erreicht, den die heutige Elektrodynamik noch nicht einnimmt.) Wir erläutern diese Behauptung zunächst an dem speziellen Beispiel von zwei Massenpunkten, die fern von allen Massen unter dem gegenseitigen Einfluß ihre Weltlinien beschreiben.

Bis zur Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie war es eine sinnvolle Aussage, von der Relativbewegung zweier Massenpunkte schlechtweg zu sprechen; man konnte bei gegebenem Kraftgesetz und Kenntnis des Anfangszustandes das obengestellte Problem, abgesehen von mathematischen Schwierigkeiten, als prinzipiell lösbar ansehen. Die allgemeine Relativitätstheorie hat diese Sachlage grundlegend verändert. Da ihre Grundgleichungen gegen beliebige Punkttransformationen kovariant sind, ist uns über die physikalische Bedeutung der in ihnen als unabhängige Veränderliche auftretenden Koordinaten nichts bekannt. Wir müssen die Messung der Koordinaten vielmehr erst durch einen physikalischen Prozeß definieren, also etwa durch die Festsetzung: x^1, x^2, x^3 bedeuten die Längen, gemessen an einer bestimmten Stelle mit einem dort ruhenden, ganz bestimmten Maßstab in drei ganz bestimmten Richtungen, x^4 die Zeit, die eine bestimmte, im betrachteten Weltpunkt ruhende Uhr anzeigt. Je nach der Annahme des Koordinatensystems nimmt der metrische Fundamentaltensor verschiedene Werte an, die Festsetzung eines Koordinatensystems (Wahl von Maßstäben und Uhren) ist eben kein invarianter Vorgang, und nur solche werden durch die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie festgelegt. Wir können uns nun, um auf das obengestellte Beispiel zurückzukommen, das Koordinatensystem

1) Weil wir in gewöhnlichen Einheiten p/c^2 schreiben müßten.
2) G. GRÜNBERG, ZS. f. Phys. Bd. 31, S. 584. 1925.
3) Siehe Bd. IV dieses Handbuches.

auch durch die Verfügung (mindestens teilweise) bestimmt denken, daß beide Massenpunkte zu allen Zeiten an gegebenen Stellen ruhen sollen. Man kann sogar nach HILBERT eine unendliche Anzahl von Massenpunkten gleichzeitig auf dauernde Ruhe transformieren: Denken wir uns den ganzen Raum mit einer kontinuierlich verteilten Masse von der (geodätisch gemessenen) Ruhdichte ϱ_0 erfüllt und ordnen wir ihr einen Vektor des Massenstroms $s^i = \varrho_0 u^i$ zu, wobei s^i willkürliche Funktionen der Weltparameter sein sollen. Dann können wir eine Koordinatentransformation angeben, derart, daß im ganzen Raume zu allen Zeiten gilt

$$s^1 = s^2 = s^3 = 0, \qquad s^4 = 1.$$

Wir sehen aus diesen Überlegungen, daß von einer Mechanik erst nach Festlegung eines Koordinatensystems (und der in ihm herrschenden Metrik) die Rede sein kann. Nun wirkt aber die Materie auf das Feld zurück und ändert damit den metrischen Fundamentaltensor. Diese Wechselwirkung von Feld und Materie wird eben durch die Feldgleichungen geregelt. Wir haben es demgemäß in der allgemeinen Relativitätstheorie prinzipiell immer mit Problemen der Feldtheorie zu tun; wir werden diese Behauptung in Ziff. 19 quantitativ verschärfen.

Nichtsdestoweniger gibt es zwei Klassen von Problemen, die man unter die Mechanik im engeren Sinne des Wortes zählen kann, von denen die erste eine große Bedeutung erlangt hat, sowohl in historischer Hinsicht, als auch was die experimentelle Prüfung der Theorie betrifft. Wir meinen damit die Bewegung von Massenpunkten im vorgegebenen Feld und weiter die stationären Probleme kontinuierlicher Massen. Betrachten wir nämlich in einem wohldefinierten Koordinatensystem das Verhalten von Partikeln, die zwar vom Felde beeinflußt werden, ihrerseits aber nicht merklich auf das Feld rückwirken, so haben wir es im wesentlichen mit einem klassischen mechanischen Problem zu tun. Unter stationären Problemen verstehen wir solche Vorgänge, bei denen sich wenigstens ein Koordinatensystem finden läßt, in dem der metrische Fundamentaltensor zeitunabhängig wird. Die Behandlung dieser speziellen Klassen einerseits auf Grund der Feldgleichungen, andererseits mit Hilfe der heuristischen Vorstellung, die EINSTEIN zur Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie geführt haben, wird den Inhalt der Ziff. 19 bilden.

18. Die verwendeten Tensoren und Einheiten. Wir charakterisieren im folgenden die betrachtete Mannigfaltigkeit durch den metrischen Fundamentaltensor g_{ik}, so daß das invariante Linienelement die Gestalt hat

$$g_{ik}\,dx^i\,dx_k = ds^2; \tag{1}$$

mit g^{ik} bezeichnen wir dann wie üblich den zugeordneten kontravarianten Fundamentaltensor. Weiter führen wir den Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor ein durch die Definition

$$B^{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\sigma}, \tag{2}$$

wobei die

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}\right) \tag{3}$$

die Christoffelschen Drei-Indizes-Symbole zweiter Art darstellen. Aus dem Krümmungstensor gewinnen wir durch Verjüngung

$$R_{\mu\nu} = B^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma} \tag{4}$$

und durch zweite Verjüngung den Krümmungsskalar

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{5}$$

Unter der tensoriellen Differentialoperation $\mathrm{Div}_i T_i^k$ verstehen wir

$$\mathrm{Div}_i T_i^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l T_l^k. \tag{6}$$

Schließlich erinnern wir noch daran, daß $\sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$ eine Invariante ist, wobei g die Determinante aus der Matrix der g_{ik} bedeutet.

Wir verwenden im folgenden solche Einheiten, daß in ihnen die Vakuumlichtgeschwindigkeit im euklidischen Raum sowie die Gravitationskonstante zu Eins werden.

19. Die Feldgleichungen der Gravitation. Die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation, welche gleichzeitig die Mechanik im engeren Sinne enthalten, lauten in der gewählten Bezeichnung

$$G_i^k = R_i^k - \tfrac{1}{2}\delta_i^k R = -8\pi T_i^k. \tag{1}$$

In den Energieimpulstensor T_i^k denken wir uns dabei alle Energiearten einbezogen. Auf Grund eines in der Tensoranalysis bewiesenen Satzes verschwindet die verallgemeinerte Divergenz $\mathrm{Div}_i G_i^k$ der linken Seite identisch, demgemäß folgt auch durch Kombination von Ziff. 18, Gleichung (6) und (3)

$$\mathrm{Div}_i T_i^k = 0 = \frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}. \tag{2}$$

Diese Gleichung stellt den verallgemeinerten Energieimpulssatz unter Einbeziehung der Wechselwirkung mit dem Gravitationsfeld dar und unterscheidet sich von der entsprechenden Gleichung (1) von Ziff. 11 durch das Auftreten von Ableitungen der g_{ik} nach den Koordinaten, welche den Einfluß des Gravitationsfeldes ausdrücken. Für konstante g_{ik} werden (2) und Gleichung (1) von Ziff. 11 identisch. Demgemäß enthält auch (2) die Mechanik im engeren Sinne bei Anwesenheit des Gravitationsfeldes.

Setzen wir ganz analog zu den Ausführungen in Ziff. 11

$$T^{ik} = \varrho u^i u^k,$$

was dem Energieimpulstensor eines Massenpunktes entspricht, so erhalten wir, indem wir die kontravariante statt der kovarianten Divergenz bilden,

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,\varrho u^i u^k\right) = -\sqrt{-g}\,\varrho u^\alpha u^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^i \tag{3}$$

Dabei verstehen wir unter einem Massenpunkt einen Körper, der so klein ist, daß in dem von ihm erfüllten Bereich das äußere Feld als homogen angesehen werden kann, während sein Beitrag zum metrischen Feld entweder überall vernachlässigbar klein sein oder doch höchstens in seinem Innern einen konstanten Beitrag liefern soll. Wir beweisen dann aus (3), daß die Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld längs einer Geodätischen vor sich geht und seine Eigenmasse

$$\sqrt{-g}\,\varrho\, d\overset{1}{x}\, d\overset{2}{x}\, d\overset{3}{x}\, d\overset{4}{x} = m\, ds,$$

während der Bewegung konstant bleibt. Zu diesem Zwecke integrieren wir (3) über ein vierdimensionales Weltgebiet und erhalten

$$\iiiint d\overset{1}{x}\, d\overset{2}{x}\, d\overset{3}{x}\, d\overset{4}{x} \frac{\partial}{\partial x^k}\sqrt{-g}\,\varrho u^i u^k = -\iiiint d\overset{1}{x}\, d\overset{2}{x}\, d\overset{3}{x}\, d\overset{4}{x} \sqrt{-g}\,\varrho u^\alpha u^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^i.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen können wir den Integranden der rechten Seite konstant setzen und erhalten dann nach Ausführung einer Integration

$$\iiint \sqrt{-g}\,\varrho u^i u^1 \,d\overset{2}{x}\,d\overset{3}{x}\,d\overset{4}{x} + \cdots + \iiint \sqrt{-g}\,\varrho u^i u^4 \,d\overset{1}{x}\,d\overset{2}{x}\,d\overset{3}{x} = -\Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta m\,ds. \tag{4}$$

Legen wir das Koordinatensystem so, daß der Weltkanal, den das Teilchen durchfegt, das Integrationsgebiet in den Ebenen $d\overset{1}{x} = 0$ schneidet, so bleibt hier nur das erste Integral links bestehen und nimmt den Wert an

$$\frac{d}{ds}(m u^i)\,ds. \tag{5}$$

Wir erhalten demgemäß

$$\frac{d}{ds} m u^i = -m \Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta. \tag{6}$$

Diese Gleichung würde mit der Differentialgleichung der geodätischen Linie

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \tag{7}$$

exakt übereinstimmen, wenn die Ruhmasse (unter den gemachten Voraussetzungen) sich als konstant erweisen läßt. Wir zeigen dies durch Multiplikation von (6) mit $m g_{ik} u^k$ und erhalten nach einigen leichten Umformungen wegen (3) von Ziff. 18

$$m g_{ik} u^k \frac{d}{ds} m u^i = -\frac{1}{2} m^2 \frac{d g_{ik}}{ds} u^i u^k. \tag{8}$$

Wir vertauschen i und k und addieren die so erhaltene Gleichung; dann ergibt sich durch Zusammenziehen

$$\frac{d}{ds}(m^2 g_{ik} u^i u^k) = 0, \tag{9}$$

was mit

$$\frac{dm^2}{ds} = 0$$

zufolge Ziff. 18, Gleichung (1), äquivalent ist.

Dieser nach EDDINGTON geführte Beweis liefert also das gewünschte Resultat, daß jeder spannungsfreie Massenpunkt im Gravitationsfeld bei Abwesenheit anderer Kräfte sich auf einer Geodätischen bewegt. Für den Fall, daß wieder die Voraussetzung der Kleinheit zu Recht besteht, innerhalb des Körpers jedoch elastische Spannungen auftreten, hat v. LAUE[1]) bewiesen, daß für vollständige statische Systeme die Bahn gleichfalls eine Geodätische ist.

Wir haben jetzt noch den Fall zu erledigen, daß elektromagnetische Kräfte auf den Körper wirken. Die Rechnung gestaltet sich ganz analog wie bisher, nur haben wir auf die rechte Seite von (2) die negative Divergenz des elektromagnetischen Energieimpulstensors E^{ik} zu setzen[2]):

$$\mathrm{Div}^i(\varrho u^i u^k + E^{ik}) = 0 \tag{10}$$

oder

$$\varrho\left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta\right) = -\mathrm{Div}^i E^{ik} = F^{ik} s_k. \tag{11}$$

In (11) bedeutet F^{ik} den schiefsymmetrischen Tensor des elektromagnetischen Feldes, s_i den Viererstrom, dessen räumliche Komponenten den Komponenten

[1]) M. v. LAUE, Relativitätstheorie, Bd. II, 2. Aufl., S. 160.

[2]) Für nähere Ausführungen betr. die elektromagnetischen Kräfte vgl. die Artikel von THIRRING und BECK in Bd. IV dieses Handbuches.

des Konvektionsstromes und dessen zeitliche der Ladungsdichte entsprechen. Infolge der Einwirkung des elektromagnetischen Feldes weicht die Weltlinie des Massenpunktes von der Geodätischen ab. Bei Abwesenheit von Gravitationsfeldern gehen diese Bewegungsgleichungen in die Gleichungen (4a) bzw. (4b) von Ziff. 7 über.

Überlegungen betreffend die Integration der Feldgleichungen zeigen uns nun, wie weit wir in der allgemeinen Relativitätstheorie von Mechanik im engeren Sinne des Wortes sprechen können. Die Feldgleichungen enthalten zwanzig Größen g_{ik}, T_{ik}, zu deren Bestimmung zehn Gleichungen vorhanden sind; außerdem können wir vier dieser Größen nach den Überlegungen von Ziff. 17 willkürlich vorgeben. In dem speziellen Fall des Massenpunktes, in dem der Energieimpulstensor durch den Viererstrom (die Vierergeschwindigkeit) gegeben ist, stimmen Zahl der Gleichungen und der Unbekannte überein. Bei Kenntnis des Anfangszustandes ergibt sich das weitere Geschehen aus den Gleichungen. Im allgemeinen Fall haben wir sechs Unbekannte mehr als Gleichungen. Die Integration ist also nicht ausführbar, wenn nicht entweder die T_{ik} von vornherein für alle Zeiten gegeben sind oder aber sich aus anderen Feldgrößen berechnen lassen (z. B. aus elektromagnetischen Größen), die ihrerseits wieder durch Feldgesetze bestimmt sind. Wir erkennen also, daß im allgemeinen Fall vor Ausführung der Integration das eigentlich mechanische Problem schon gelöst sein muß (T_{ik} bekannt) oder aber überhaupt innerhalb der Feldtheorie aufgeht. Sonderfälle bilden die Untersuchungen über das Verhalten von Massenpunkten und über die stationären Probleme; in diesen ist ja durch die Kenntnis des *Anfangszustandes die Zukunft* festgelegt, wir können also, abgesehen von mathematischen Schwierigkeiten, beliebige stationäre Lösungen ohne Konstitution der Materie durch Felder angeben. Ob jedoch eine vorgegebene Materieverteilung einer stationären Lösung entspricht, muß erst in jedem einzelnen Falle gesondert untersucht werden; im allgemeinen wird dies nicht der Fall sein.

Wir erwähnen noch, daß die Feldgleichungen (1) bei angenäherter Integration die theoretische Ableitung der Erfahrungstatsache der Gleichheit von „träger" und „schwerer" Masse gestatten. Dies hat seinen Grund darin, daß die „*träge Masse*" T^{ik} gleichzeitig die Erregung des Schwerefeldes bestimmt, also als „*schwere Masse*" wirkt[1]).

20. Die geodätische Linie und das neue Trägheitsgesetz der Mechanik. Wir haben in der vorigen Ziffer das Bewegungsgesetz des Massenpunktes im Gravitationsfeld als Folgerung aus den Feldgleichungen abgeleitet; doch läßt sich das Gesetz der geodätischen Linie noch auf einem anderen Wege gewinnen, der sowohl aus historischen Gründen als auch wegen seiner Anschaulichkeit besondere Beachtung verdient.

Wir gehen zu diesem Zwecke von der Bemerkung aus, daß in der *Newtonschen Mechanik* ein homogenes Gravitationsfeld einem gleichförmig beschleunigten Bezugssystem vollkommen äquivalent ist; dabei ist die Beschleunigung des Koordinatensystems der Gravitationsbeschleunigung dem Betrage nach gleich und entgegengesetzt gerichtet. Ein in diesem Koordinatensystem ruhender Beobachter würde von der Schwerkraft nichts merken, da diese durch die auftretenden „Scheinkräfte" genau kompensiert wird. Die *Forderung*, daß diese *Äquivalenz von Gravitations- und Beschleunigungsfeld* nicht nur für die *mechanischen*, sondern für *alle physikalischen Erscheinungen* zu Recht bestehe, bildet den Inhalt des *Äquivalenzprinzips*. Seine Aufstellung hat zur Voraussetzung, daß das Gravitationsfeld allen Körpern die

[1]) Vgl. Bd. IV dieses Handbuches (Artikel von BECK).

gleiche Beschleunigung erteilt; die in der klassischen Mechanik nur registrierte, aber nicht in die Theorie eingearbeitete Erfahrungstatsache der Gleichheit von träger und schwerer Masse findet so ihre theoretische Verankerung[1]).

Wir erkennen also, daß sich jedes homogene Schwerefeld in seiner ganzen Ausdehnung wegtransformieren läßt. (Nach der speziellen Relativitätstheorie hat an Stelle des frei fallenden Koordinatensystems, dessen einzelne Punkte im Laufe der Zeit Überlichtgeschwindigkeit annehmen würden, ein solches zu treten, in dem jeder Punkt die in Ziff. 9 beschriebene „Hyperbelbewegung" ausführt; denn diese stellt die Bewegung unter Einfluß einer konstanten Kraft dar. Für die folgenden prinzipiellen Betrachtungen ist dieser Unterschied unwesentlich.) Ist das Schwerefeld räumlich und zeitlich variabel, so können wir es zwar nicht mehr an allen Weltpunkten wegschaffen, wohl aber können wir durch ein geeignet gewähltes Bezugssystem jedes beliebige, sehr kleine Weltgebiet schwerefrei machen; denn im unendlich Kleinen während sehr kurzer Zeit kann jedes Schwerefeld als homogen angesehen werden. Strenger formuliert hat das Äquivalenzprinzip zu lauten: Bei allen jenen physikalischen Vorgängen, die zwar durch das Gravitationsfeld beeinflußt werden, ihrerseits aber nicht merklich rückwirken, kann der Einfluß des Gravitationsfeldes durch eine passende Koordinatentransformation beseitigt werden. Es ist nun eine naheliegende Annahme, in diesem gravitationsfreien Weltgebiet die Gültigkeit der speziellen Relativitätstheorie zu postulieren. In dieser ist die Weltlinie eines freien Massenpunktes infolge des Trägheitsgesetzes eine Gerade, die durch die Gleichungen gegeben ist $\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds} = 0$. Gleichwertig damit ist das Integralprinzip

$$\delta \int ds = 0 \tag{1}$$

bzw.

$$\delta \int ds^2 = 0, \tag{2}$$

wobei

$$ds^2 = (dx_0^4)^2 - (dx_0^1)^2 - (dx_0^2)^2 - (dx_0^3)^2. \tag{3}$$

Dabei haben wir mit dem unteren Index 0 das geodätische Koordinatensystem bezeichnet, in dem eben die spezielle Relativitätstheorie gilt, und das bis auf eine Lorentztransformation bestimmt ist.

In jedem anderen Koordinatensystem wird das Linienelement die allgemeine Gestalt (1) von Ziff. 18 besitzen. Die jetzigen Integralprinzipien (1) und (2) aber sind invariant gegenüber dem Koordinatensystem formuliert, liefern daher unabhängig vom Koordinatensystem immer die richtigen Bewegungsgleichungen, wenn sie in einem einzigen gelten. Bilden wir nach Einsetzen von Ziff. 18, Gleichung (1), aus den jetzigen Gleichungen (1) und (2) die Lagrangeschen Differentialgleichungen, so erhalten wir die Gleichung der Geodätischen

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \tag{4}$$

An die Stelle der geraden Weltlinie des klassischen Trägheitsgesetzes tritt hier die geodätische oder geradeste Weltlinie der nichteuklidischen Mannigfaltigkeit.

Wir können den Sachverhalt noch ein wenig anders ausdrücken. Ein Massenpunkt im Gravitationsfeld, der sonst keinerlei Kräften ausgesetzt ist, führt eine reine „Trägheitsbewegung" aus, d. h. beschreibt bei passender Koordinatenwahl

[1]) Das Auftreten von „Scheinkräften" kann uns hier nicht näher beschäftigen, da dieses nach der allgemeinen Relativitätstheorie auf Gravitationswirkungen ferner Massen zurückzuführen sein soll. Es handelt sich hier um die verwickelte Frage der „absoluten Rotation" und der „Randbedingungen" (Machsches Prinzip). Vgl. hierüber den Artikel von BECK in Bd. IV dieses Handbuches.

eine gerade Weltlinie. Die „Gravitationskraft" ist nur eine „Scheinkraft", da sie jederzeit wegtransformiert werden kann. Der Massenpunkt im Gravitationsfeld führt also eine kräftefreie Bewegung aus. Dies ist die neue Formulierung des Trägheitsgesetzes.

21. Verschiedene Formen der Bewegungsgleichungen des Massenpunktes. Die Integralprinzipien (1) bzw. (2) von Ziff. 20 geben Veranlassung zur Aufstellung einer ganzen Reihe anderer Formen der Bewegungsgleichungen, die in völliger Analogie zu den Lagrangeschen und Hamiltonschen Formen der klassischen Theorie stehen (vgl. auch Ziff. 7 u. 8). Unabhängige Veränderliche ist in ihnen zunächst immer das Linienelement (die Eigenzeit), worauf wir bereits in Ziff. 8 hingewiesen haben. Zur Gewinnung dieser neuen Formen gehen wir von Ziff. 20, Gleichung (2) aus. Die Lagrangeschen Gleichungen (4) von Ziff. 20 lassen sich dann aus der Lagrangefunktion

$$L = g_{ik} u^i u^k = g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \tag{1}$$

ableiten, wobei wir von der Form (1) in Ziff. 18 bei der Variation keinen Gebrauch machen. Wollen wir das elektromagnetische Feld mit einbeziehen, so hat an Stelle von (1) in Verallgemeinerung von Ziff. 7, Gleichung (7a) bzw. (4b)

$$L = -\frac{mc^2}{2} g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} - e\varphi_i \frac{dx^i}{ds} \tag{2}$$

zu treten; φ_i bedeutet das elektromagnetische Viererpotential. Man überzeugt sich leicht, daß (2) mit Ziff. 19, Gleichung (11), äquivalent ist.

Als generalisierte Impulse definieren wir

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} \tag{3}$$

und als Hamiltonsche Funktion

$$H = \frac{\partial L}{\partial u^i} u^i - L. \tag{4}$$

[Wären wir von Ziff. 20, Gleichung (1) ausgegangen und hätten wir als Lagrangefunktion $L' = \sqrt{g_{ik} u^i u^k}$ gewählt, so wäre $H' \equiv 0$.)

Aus (4) erhalten wir dann als Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung

$$H\left(x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial S}{\partial s} = 0. \tag{5}$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß wegen Ziff. 18, Gleichung (1) $H = -\frac{mc^2}{2}$ gilt; wir können also sofort den Separationsansatz $S = W + \frac{mc^2}{2} s$ einführen und erhalten so

$$H\left(x^i, \frac{\partial W}{\partial x^i}\right) = -\frac{mc^2}{2}. \tag{6}$$

Jedes vollständige Integral von (6) enthält also, wie es sein muß, vier willkürliche Konstante. Betrachten wir im besonderen nur statische Felder, so können wir auch, da die g_{ik} von x^4 unabhängig sind, mittels $ds = \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dx^4} \frac{dx^k}{dx^4}}\, dx^4$ die gewöhnliche Zeit an Stelle der Eigenzeit ds als unabhängige Veränderliche einführen. Die Integration von (6) läßt sich ganz analog dem Vorgehen in der klassischen Theorie durchführen; Anwendungen der Methode auf spezielle Fälle finden sich in Arbeiten von TEMPLE[1]) und KUDAR[2]).

[1]) G. TEMPLE, Phil. Mag. Bd. 48, S. 277. 1924.
[2]) J. KUDAR, Phys. ZS. Bd. 26, S. 207, 276. 1925.

Wir erwähnen noch die Ausnahmestellung von Massenpunkten, die mit Lichtgeschwindigkeit laufen; nach Ziff. 4, Gleichung (7a), ist ihre Ruhmasse Null, ihr $ds^2 = 0$. Diese Aussage der speziellen Relativitätstheorie bleibt in der allgemeinen aufrecht, da sie im geodätischen System zu Recht besteht und invariant formuliert ist.

22. Die inkompressible Flüssigkeitskugel. Zum Vergleich zwischen der Newtonschen und Einsteinschen Gravitationstheorie behandeln wir im folgenden als Beispiel eines exakt berechenbaren Problems die Druckverteilung innerhalb einer sog. inkompressiblen Flüssigkeitskugel. Wir charakterisieren die Materie durch einen Tensor folgender Gestalt:

$$T_i^k = \varrho u_i u^k - p\,\delta_i^k, \tag{1}$$

der sich im statischen Fall auf das Schema reduziert

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4^4 \end{vmatrix} \tag{1a}$$

wobei wir T_4^4 als koordinatenunabhängig ansetzen. Physikalisch bedeutet dies, daß in unserem statischen Problem die Energie der Flüssigkeit unabhängig vom Druck überall in der Kugel konstant ist und daß in der Kugel ein homogener isotroper Druck ohne Schubspannungen herrscht. Mit Inkompressibilität im Sinne der klassischen Hydrodynamik hat unsere Definition nichts zu tun, da durch sie das Auftreten von Deformationen nicht verhindert ist. Setzen wir diesen Materietensor in die Feldgleichungen (1) von Ziff. 19 ein, und berücksichtigen wir die Tatsache der Kugelsymmetrie, so erhalten wir folgenden Ausdruck für das Linienelement:

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{1-\alpha a^2} - \sqrt{1-\alpha r^2}\right)^2 dt^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - dr^2\left(\frac{1}{1-\alpha r^2}\right). \tag{2}$$

Darin bedeuten a den Kugelradius und

$$\alpha = \frac{8\pi T_4^4}{3}.$$

Der Druck hängt mit α und a zusammen durch die Relation

$$p = -T_i^i = \frac{3\alpha}{8\pi}\,\frac{\sqrt{1-\alpha r^2} - \sqrt{1-\alpha a^2}}{3\sqrt{1-\alpha a^2} - \sqrt{1-\alpha r^2}}. \qquad (i \neq 4) \tag{3}$$

Für $r = a$ verschwindet der Druck; damit er überall endlich bleibt, müssen wir bei gegebener Dichte α den Radius a der Kugel unterhalb einer gewissen Grenze halten, die sich aus (3) leicht berechnet:

$$a^2\alpha < \tfrac{8}{9}.$$

Dieses Resultat vergleichen wir mit den Aussagen der Newtonschen Theorie. Nach ihr gilt für das Gravitationspotential φ im Innern der Kugel von der Massendichte ϱ

$$\varphi = \frac{2\pi\varrho}{3} r^2. \tag{4}$$

Die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung

$$\varrho\varphi + p = \text{konst.}$$

liefert dann den Druck als Funktion des Radius

$$p = \frac{2\pi\varrho^2}{3}(a^2 - r^2). \tag{3a}$$

Nehmen wir an, daß in (3) $\alpha a^2 \ll 1$ bleibe, so erhalten wir durch Reihenentwicklung genau den Newtonschen Ausdruck.

An dieser Stelle können wir auch den in Ziff. 11 erwähnten physikalischen Unterschied zwischen kovarianten, kontravarianten und gemischten Tensoren klarstellen. Denken wir uns z. B. von vornherein die Flüssigkeit durch einen kontravarianten Tensor charakterisiert und dessen räumliche Komponenten gleich dem Druck, dessen zeitliche gleich der Energiedichte (unabhängig von r) gesetzt. Nun beziehen sich die Eigenschaften der Isotropie und der Inkompressibilität (T^{44} unabhängig von r) auf ein bestimmtes Koordinatensystem, nämlich das geodätische Ruhkoordinatensystem. Bei Übergang zu einem anderen Bezugsystem würde die Isotropie im allgemeinen verschwinden. Nun ist aber z. B. T^{11} gegen Koordinatentransformationen nicht invariant wegen

$$T^{11'} = T^{\alpha\beta}\frac{\partial x'^1}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^1}{\partial x^\beta} \neq T^{11}, \tag{5}$$

wohl aber T_1^1 wegen $T_i^k = 0\ (i \neq k)$:

$$T_1^{1'} = T_\alpha^\beta\frac{\partial x'^1}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^1} = T_1^1. \tag{6}$$

Wir müssen also zur physikalischen Charakterisierung den gemischten Tensor verwenden; denn wenn dieser in einem Koordinatensystem die spezielle Gestalt (1a) hat, so hat er sie in allen (auch nicht-stationären) Koordinatensystemen.

IV. Experimentelle Bestätigungen der Relativitätsmechanik.

23. Vorbemerkung. Wir geben im folgenden eine kurze Übersicht über die Theorien jener mechanischen Experimente, deren Resultat für die spezielle bzw. allgemeine Relativitätstheorie charakteristisch ist. Es scheiden also von vornherein in der folgenden Darstellung die sog. Effekte erster Ordnung aus; das sind im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie die Effekte, die linear sind in v/c, in der allgemeinen Relativitätstheorie alle Konsequenzen des Newtonschen Gravitationsgesetzes in seiner Anwendung auf die Mechanik des Himmels. Wir bringen jedoch auch die Theorie einiger optischer Experimente, und zwar aus folgendem Grunde: Bei unserem heutigen Stande des Wissens läßt sich die Optik weder einheitlich elektromagnetisch als Wellentheorie, noch auch einheitlich mechanisch als Korpuskulartheorie aufbauen. Demgemäß lassen sich die zu besprechenden Effekte einerseits wenigstens zum Teil aus der Wellentheorie des Lichtes ableiten mit Heranziehung der Formeln der Elektrodynamik der speziellen Relativitätstheorie — im Einzelfall sogar auch ohne relativistische Überlegungen (Strahlungsdruck); andererseits jedoch lassen sich die Erscheinungen mit der Hypothese beschreiben, daß die Strahlung aus massenpunktähnlichen Gebilden besteht, die sich mit Lichtgeschwindigkeit oder doch nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegen und denen entsprechende Formeln für Energie und Impuls zuzuordnen sind. Diese quasimechanischen Gebilde liefern, den Gesetzen der Relativitätsmechanik unterworfen, eine Reihe von unten näher besprochenen Effekten, die sich wenigstens in einem Falle (Comptoneffekt) nicht

ohne weiteres aus der Wellentheorie gewinnen lassen. Da für die Lichtquantenhypothese noch eine Reihe sonstiger experimenteller Stützen angeführt werden kann, scheint es uns berechtigt, die unten zu schildernden Effekte als Stützen für die Relativitätstheorie anzusehen, um so mehr, als sich beide Theorien (Wellen- und Korpuskulartheorie) in ihren Anwendungsgebieten vielfach überdecken und im besonderen die beiden optischen Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie (Rotverschiebung und Lichtstrahlkrümmung am Sonnenrand) wellentheoretisch mit dem gleichen Ergebnis abzuleiten sind. Mit einer Diskussion der experimentellen Resultate können wir uns hier nicht befassen, sondern verweisen zu diesem Zwecke auf die beiden Artikel von THIRRING und BECK in den Bänden IV und XII ds. Handb.

a) Experimentelle Bestätigungen der speziellen Relativitätstheorie.

24. Der Versuch von TROUTON und NOBLE. Dieser bereits vor Aufstellung der speziellen Relativitätstheorie durchgeführte Versuch sollte das Auftreten eines Drehmomentes an einem elektrisch geladenen Kondensator aufzeigen, der sich in gleichförmiger Translationsbewegung relativ zum „Äther" befindet. Der Versuch, der nach der Lorentzschen Elektronentheorie ein positives Ergebnis aufweisen sollte, endete negativ. Dieses negative Resultat ist nach der speziellen Relativitätstheorie ebenso selbstverständlich wie das negative Ergebnis des Michelsonschen Interferenzversuches, der gleichfalls ein Orientierungseffekt von zweiter Ordnung in v/c ist; dabei bedeutet v die Geschwindigkeit relativ zum Äther. Denken wir uns nämlich zunächst einen relativ zum Kondensator ruhenden Beobachter, so nimmt dieser ganz unabhängig von der Orientierung der Platten im Raum nur ein rein elektrostatisches Feld wahr, findet also keinerlei Veranlassung für das Auftreten eines Drehmomentes. Der gesamte Energieimpulstensor des Kondensators setzt sich aus einem mechanischen und einem elektromagnetischen Teil zusammen. Da der Kondensator nach den Darlegungen von Ziff. 14 ein nach außen abgeschlossenes, vollständiges statisches System darstellt, so heben sich die Spannungen des elektromagnetischen und des mechanischen Anteils gegenseitig gerade auf. Das System als Ganzes verhält sich gemäß Ziff. 14 nach außen wie ein Massenpunkt, der einer Translationsbewegung ohne Einfluß eines Drehmomentes ohne weiteres fähig ist. Ein Beobachter, der relativ zum Kondensator sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, wird dann nach den Ausführungen von Ziff. 14 gleichfalls keine Veranlassung zum Auftreten eines Drehmomentes gegeben finden. Nur wenn man, wie es der Auffassung der Äthertheorie entsprach, lediglich die Komponenten des elektromagnetischen Energieimpulstensors vom bewegten Bezugsystem aus berechnet, ohne die Änderung des mechanischen Energieimpulstensors zu berücksichtigen, so erhält man ein resultierendes Drehmoment. Der Versuch zeigte die Abwesenheit des Drehmomentes und bestätigte damit die Auffassung der Relativitätstheorie.

Zur Veranschaulichung der Behauptung, daß bei Berücksichtigung des elektromagnetischen Energieimpulstensors allein ein Drehmoment auftritt, soll die Diskussion der folgenden schematischen Anordnung dienen, deren Grundgedanke unseres Wissens auf LAUE[1]) und EPSTEIN[2]) zurückgeht. Wir betrachten einen im System K in der xy-Ebene ruhenden Stab, der mit einem Ende in den Koordinatenursprung hineinfällt und mit der x-Achse den Winkel α einschließt; an seinen Enden mögen in der Stabrichtung entgegengesetzt gleiche Kräfte

[1]) M. v. LAUE, Phys. ZS. Bd. 12, S. 1008. 1911 (Winkelhebel).
[2]) P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. Bd. 36, S. 779. 1911.

vom Betrage F wirken. Im System K bleibt der Stab in Ruhe, da sowohl die resultierende Kraft als auch das resultierende Drehmoment verschwindet.

Betrachten wir nun die Verhältnisse von dem zweiten Bezugssystem K' aus, das sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit v parallel der x-Achse bewegt. In K' herrschen dann die Kräfte

$$F_{x'} = F_x = F\cos\alpha\,, \qquad F_{y'} = F_y\sqrt{1 - v^2/c^2} = F\sin\alpha\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{1}$$

Die Projektionen des Stabes auf die neuen Koordinatenachsen haben jedoch im Gegensatze hierzu die Werte

$$l_{x'} = l_x\sqrt{1 - v^2/c^2}\,, \qquad l_{y'} = l_y. \tag{2}$$

Kraft- und Stabrichtung fallen also in K' nicht mehr zusammen, es wirkt somit in K' ein Drehmoment um die z'-Achse:

$$D_{z'} = l_{x'}F_{y'} - l_{y'}F_{x'} = -\frac{v^2}{2c^2}\,lF\sin 2\alpha\,. \tag{3}$$

Dieses Drehmoment würde nach der Äthertheorie einen Effekt zweiter Ordnung in v/c zur Folge haben; nach der Auffassung der Relativitätstheorie hingegen bewirkt dieses elektromagnetische Drehmoment keine beobachtbare Drehung, da es durch das Drehmoment der elastischen Kräfte, die sich genau so transformieren und ein entgegengesetzt gleiches Drehmoment hervorrufen, kompensiert wird. Denkt man sich die Kraft F durch elektrische Ladungen auf dem Stab verursacht, so hat man den schematischen Fall des Trouton-Nobleversuches vor sich. Die Erfahrung hat, wie bereits erwähnt, für die Relativitätstheorie entschieden[1].

25. Die Bewegung des freien Elektrons im statischen elektromagnetischen Feld. Wir hatten in Ziff. 5 hervorgehoben, daß die Abweichungen der relativistischen von der klassischen Mechanik des Massenpunktes von zweiter Ordnung in v/c sind. Zur Prüfung der neuen Dynamik muß man demgemäß sehr schnell bewegte Partikeln heranziehen, deren Geschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit einigermaßen vergleichbar ist, damit der Quotient v^2/c^2 nicht zu klein wird. Wir finden geeignete Probekörper in den Kathodenstrahlen sowie in den β-Strahlen der radioaktiven Elemente, an denen Versuche über die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse bis hinauf zu $v/c \sim 0{,}8$ angestellt wurden. Die Messung geschah durch Beobachtung der Ablenkung, die schnell bewegte Elektronen im statischen elektromagnetischen Felde erfahren. Es sind eine große Anzahl verschiedener Anordnungen geschaffen worden, um diese Ablenkung zu beobachten. Ohne auf experimentelle Einzelheiten einzugehen, begnügen wir uns an dieser Stelle mit einer Darlegung des gemeinsamen Prinzips aller Versuchsanordnungen.

Wir betrachten ein Elektron, das sich mit beträchtlicher Geschwindigkeit parallel der x-Achse bewegen soll. Senkrecht hierzu wirke ein homogenes magnetisches Feld (etwa in der y-Richtung) sowie ein homogenes elektrisches Feld (etwa in der z-Richtung). Beide Felder erteilen dem Elektron eine transversale Ablenkung; dabei ist zu beachten, daß der Absolutbetrag der Geschwindigkeit des Elektrons durch das Magnetfeld nicht geändert wird, da dieses keine Arbeit an dem Elektron leistet. Die Änderung des Absolutbetrages der Ge-

[1] Wir verweisen auf die bei M. v. LAUE durchgeführte, sehr instruktive Diskussion (Relativitätstheorie, Bd. I, 4. Aufl., S. 263), welche das scheinbare Auftreten eines Drehmoments auf die Vernachlässigung der Wirkung zurückführt, die die zeitliche Änderung der Impulsdichte (Energieströmungsdichte) ausübt. Vgl. etwa auch W. PAULI (Zitat von Ziff. 2), S. 686.

schwindigkeit infolge des elektrischen Feldes ist für schnelle Elektronen von zweiter Ordnung in der angelegten Feldstärke

$$\Delta v = \sqrt{v_0^2 + \frac{e^2}{m^2}\mathfrak{E}_y^2\tau^2} - v_0 \approx \frac{e^2\mathfrak{E}_y^2}{2m^2 v_0}\tau^2.$$

Darin bedeutet τ die zum Durchlaufen des Beobachtungsraumes erforderliche Zeit. Wir können also für schnelle Elektronen bis auf Glieder zweiter Ordnung in $\frac{e\mathfrak{E}}{m}\tau$ den **Absolutbetrag der Geschwindigkeit konstant** setzen. Dadurch, und indem wir Produktglieder $\mathfrak{H}_z\mathfrak{E}_y$ ebenfalls vernachlässigen, reduzieren sich die Gleichungen (7) von Ziff. 4a auf folgende Gestalt:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ddot{x} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ddot{y} = e\left(\mathfrak{E}_y + \frac{1}{c}\dot{x}\mathfrak{H}_z\right). \tag{1b}$$

In der erwähnten Näherung stimmen aber diese Gleichungen mit den klassischen Bewegungsgleichungen für das Elektron überein, mit dem einzigen Unterschied, daß an Stelle von m der Ausdruck $\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mu$ tritt. Aus (1a) und (1b) kann man in bekannter Weise v und e/μ bestimmen und mit der beobachteten Ablenkung vergleichen. Sind die äußeren Felder so stark, daß man auch die höheren Potenzen von $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_z$ berücksichtigen muß, so läßt sich dies leicht nachträglich durch sukzessive Approximationen ausführen. Wir erkennen aus (1a) und (1b), daß auch für beliebige Felder bisher nur der Ausdruck für die „transversale Masse" der experimentellen Verifikation zugänglich war. Der Versuch hat eindeutig zugunsten der Relativitätstheorie entschieden[1]).

26. Die Bewegung eines Elektrons um ein geladenes Zentrum. Wir betrachten die Bewegung eines Elektrons um ein geladenes Zentrum und vernachlässigen die Reaktionskraft der Ausstrahlung. Dann gilt als Hamiltonsche Funktion des Elektrons

$$H = m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{m_0^2c^2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} - 1\right) - \frac{eE}{r} = \alpha_1, \tag{1}$$

wobei die potentielle Energie den aus der Elektrostatik bekannten Coulombschen Wert hat und E bzw. e die Ladung des Zentrums und des Elektrons bedeutet. Durch eine leichte Umformung erhalten wir hieraus die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 2m_0\left[\alpha_1\left(1 + \frac{\alpha_1}{2m_0c^2}\right) + \frac{eE}{r}\left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0c^2}\right) + \frac{e^2E^2}{2m_0c^2r^2}\right]. \tag{2}$$

Wie wir bereits in Ziff. 7 hervorgehoben haben, ist diese Gleichung ganz äquivalent einer Gleichung der klassischen Mechanik, nur mit dem Unterschiede, daß die Konstanten verändert sind und eine Störungsfunktion von der Gestalt $\frac{e^2E^2}{2m_0c^2r^2} = \varphi$ hinzutritt. Wir haben es also mit einer ebenen Bewegung unter dem Einfluß der Zentralkraft $\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3} = R$, zu tun. Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung (2) ließe sich leicht durch Separation der Variablen integrieren. Wir ziehen es jedoch vor, uns des bekannten Newtonschen Theorems der rotierenden

---

[1]) Vgl. Bd. XII (Artikel von THIRRING) und Bd. XXII (Artikel von GERLACH) dieses Handbuches.

Bahnen[1]) zu bedienen; nach diesem gilt als Bahngleichung einer unter der Zentralkraft $P(r) + \frac{\nu}{r^3}$ beschriebenen Bewegung in Polarkoordinaten r, φ

$$r = f(h\varphi), \tag{3}$$

wenn die Bahngleichung unter Einfluß der Zentralkraft $P(r)$

$$r = f(\varphi) \tag{4}$$

lautet. Dabei hängen die Konstanten h und ν mit dem Drehimpuls k der ungestörten, d. h. zur Zentralkraft $P(r) \sim 1/r^2$ gehörenden Bewegung folgendermaßen zusammen:

$$\nu = k^2(1 - h^2). \tag{5}$$

Wir lesen aus der Formel (3) ab, daß wir es im Falle $P(r) \sim \frac{1}{r^2}$ mit einer Ellipse zu tun haben, deren Perihel eine Drehung im Sinne der Bewegungsrichtung ausführt; die Winkelgeschwindigkeit der Periheldrehung verhält sich zu der des Elektronenumlaufs wie $(1 - h):h$.

Nach der bis vor kurzem üblichen Fassung der Quantentheorie haben wir es im Wasserstoffatom und im einfach ionisierten Heliumatom mit der hier geschilderten Bewegung zu tun. Das Auftreten einer Periheldrehung bewirkt das Erscheinen von neuen Spektrallinien (der Feinstruktur der Wasserstoff- bzw. Heliumfunkenlinien). Nach den neuen theoretischen Ansätzen[2]) haben wir es nicht mehr mit derartigen Bewegungen im eigentlichen Sinne zu tun; nichtsdestoweniger führen wir die Erscheinungen der Feinstruktur als Bestätigung der speziellen Relativitätstheorie an, da auch in der neuen Quantenmechanik eine Hamiltonsche Funktion, in formaler Analogie zur relativistischen gebildet, für die Erscheinungen charakteristisch ist.

27. Die Lichtquantenmechanik der speziellen Relativitätstheorie. a) Der Strahlungsdruck. Den Lichtquanten ordnen wir nach dem in Ziff. 25 Gesagten eine Energie vom Betrage E und einen Impuls $\mathfrak{G}$ zu, der parallel der Geschwindigkeit des Lichtquants gerichtet ist und dessen Betrag mit der Energie nach der für Massenpunkte gültigen Formel $|\mathfrak{G}| = \frac{E}{c}$ zusammenhängt. Trifft ein solches Lichtquant unter dem Einfallswinkel α auf einen Spiegel und wird es dabei reflektirt, so wird auf den Spiegel der Impuls $2\frac{E}{c}\cos\alpha$ übertragen, ganz im Einklang mit den Formeln der Elektrodynamik, nach denen der bei der Reflexion einer ebenen Welle von der Energiedichte W ausgeübte Strahlungsdruck gleich $2W\cos\alpha$ ist. Die Relation zwischen reflektierter Energie und übertragenem Impuls $\frac{E}{|\mathfrak{G}|} = \frac{c}{2\cos\alpha}$ würde unrichtig, wenn wir nach klassischer Mechanik rechnen; an ihre Stelle träte die Relation $\frac{E}{|\mathfrak{G}|} = \frac{c}{4\cos\alpha}$. Dies hat seinen Grund darin, daß in der klassischen Mechanik Energie und Impuls eines Massenpunktes im Zusammenhang $\frac{E}{|\mathfrak{G}|} = \frac{v}{2}$ stehen[3]).

b) Der Dopplereffekt und die Aberration. Wir betrachten Energie und Impuls eines Lichtquants von einem zweiten Bezugsystem aus, das sich mit der Geschwindigkeit v unter dem Winkel α gegen die Bewegungs-

[1]) Vgl. Kap. 7, Ziff. 6 ds. Bd. des Handb.
[2]) Vgl. etwa M. BORN, Vorlesungen über Atomdynamik, Berlin 1925.
[3]) Vgl. darüber M. PLANCK, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 4. Aufl., S. 65.

richtung des Lichtquants verschiebt. Der Beobachter wird dann nach den Formeln (7) und (7a) von Ziff. 4 dem Lichtquant eine Energie

$$E' = E\,\frac{1-(v/c)\cos\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1a}$$

und einen Impuls $\mathfrak{G}'$ mit den Komponenten

$$\mathfrak{G}'_x = \frac{\mathfrak{G}_x-(v/c^2)E}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \mathfrak{G}'_y = \mathfrak{G}_y, \tag{1b}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}'_x &= \frac{E'}{c}\cos\alpha' = \frac{E}{c}\,\frac{\cos\alpha - v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ \mathfrak{G}'_y &= \frac{E'}{c}\sin\alpha' = \frac{E}{c}\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1c}$$

zuschreiben (Energie und Impuls transformieren sich als ein Vierervektor!). Setzen wir nun, wie aus anderen Erfahrungstatsachen hinreichend begründet ist, die Energie eines Lichtquants seiner Frequenz proportional

$$E = h\nu \tag{2}$$

(h Plancksche Konstante), so erkennen wir aus (1a), daß sich die Frequenz des Lichtquants verändert hat im Verhältnis

$$\nu' = \nu\,\frac{1-(v/c)\cos\alpha}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{3}$$

Dies ist genau die relativistische Formel für den Dopplereffekt, wie sie aus der Wellentheorie abgeleitet wird. Ganz analog gewinnen wir aus (1c) durch Einsetzen von (2) und (3) für die Richtung α', in der sich das Lichtquant relativ zum zweiten Beobachter bewegt, die Formeln

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - v/c}{1-(v/c)\cos\alpha}, \tag{4a}$$

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha\,\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c)\cos\alpha}. \tag{4b}$$

Dies stimmt überein mit der gleichfalls aus der Elektrodynamik der Relativitätstheorie ableitbaren Formel für die *Aberration* des Lichtes. Es scheint sich also, was die Phänomene *Strahlungsdruck*, *Dopplereffekt* und *Aberration* anlangt, bei den Lichtquanten und bei der Wellentheorie um eine *gemeinsame kinematische Grundlage* zu handeln, die allen mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Gebilden in gleicher Weise zukommt.

c) *Der Comptoneffekt.* Trifft ein Lichtquant auf ein ursprünglich der Einfachheit halber als ruhend angenommenes Partikel, etwa ein Elektron, so wird es von diesem abgelenkt und im allgemeinen in seiner Frequenz (Energie) geändert. Dabei wird auch das Elektron in Bewegung gesetzt. Die Gesetze dieser Wechselwirkung lassen sich einfach gewinnen, wenn man *Energie- und Impulssatz* für das *System Lichtquant plus Elektron* auf die Zustände *vor und nach dem Stoß* anwendet:

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cos\Phi + \frac{h\nu}{c}\cos\varphi, \tag{5a}$$

$$0 = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\sin\Phi + \frac{h\nu}{c}\sin\varphi, \tag{5b}$$

$$h\nu_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 + h\nu. \tag{5c}$$

Hierbei ist m die Masse des Elektrons; φ bedeutet den Winkel zwischen der Richtung des einfallenden und gestreuten Lichtquants, Φ den zwischen der Geschwindigkeitsrichtung des Elektrons und des einfallenden Strahles. Es ist nach dem Impulssatz klar, daß die Geschwindigkeitsrichtungen des einfallenden, des gestreuten Lichtquants und des Elektrons in einer Ebene liegen müssen. Wir können dann aus (5a, b, c) die Frequenz des gestreuten Lichtquants als Funktion des Streuwinkels φ ausdrücken und erhalten so

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{mc^2}(1 - \cos\varphi)} \tag{6}$$

Die relative Frequenzänderung $(\nu - \nu_0)/\nu_0$ wird um so größer, je größer die Frequenz des einfallenden Lichtquants und der Streuwinkel ist.

Durch geeignete Übertragung quantentheoretischer Gesichtspunkte kann man auch einen Ausdruck für die Intensität der gestreuten Strahlung als Funktion des Winkels angeben:

$$J(\varphi) \infty \frac{1 + \frac{\cos^2\varphi}{2} + \frac{h\nu_0}{mc^2}\left(1 + \frac{h\nu_0}{mc^2}\right)(1 - \cos\varphi)^2}{\left[1 + \frac{h\nu_0}{mc^2}(1 - \cos\varphi)\right]^5}. \tag{7}$$

Diese Formeln sind für nicht zu harte Röntgenstrahlen gut bestätigt; für sehr hohe Frequenzen, bei denen allein der Unterschied der relativistischen gegen die klassischen Energieimpulsausdrücke auftritt ($h\nu_0/mc^2 \approx 1$), liegen bisher nur grobe Messungen vor, die im Einklange mit der Theorie stehen. Was die Versuche zur wellentheoretischen Deutung des Comptoneffektes anlangt, bei denen gleichfalls mit den mechanischen Formeln der speziellen Relativitätstheorie für Energie und Impuls des Elektrons gearbeitet wird, so müssen wir uns hier mit einem Hinweis auf die einschlägige quantentheoretische Literatur begnügen[1]).

b) Experimentelle Bestätigungen der allgemeinen Relativitätstheorie.

28. Die Theorie der Planetenbewegung. Von den experimentellen Bestätigungen der allgemeinen Relativitätstheorie behandeln wir in erster Reihe die Bewegung eines Massenpunktes um ein festes Gravitationszentrum. Die Integration der Feldgleichungen liefert in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ für die Komponenten des metrischen Feldes im leeren Raum folgende Werte:

$$ds^2 = e^{w}dt^2 - e^{-w}dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2), \tag{1}$$

wobei m die Masse des Zentrums und

$$1 - \frac{2m}{r} = e^{w}, \qquad \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} = e^{-w}.$$

Aus ihnen bilden wir nun die Differentialgleichungen für die Geodätischen und erhalten nach Ziff. 20, Gleichung (4), mit $w' = dw/dr$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{w'}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - re^{w}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{2w}w'\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0, \tag{2a}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{ds}\frac{dr}{ds} = 0, \tag{2b}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + w'\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0. \tag{2c}$$

[1]) Vgl. etwa den zusammenfassenden Bericht von G. WENTZEL, Phys. ZS. Bd. 26, S. 436. 1925.

Die Differentialgleichung für die Bahngleichung gewinnen wir durch Elimination der Zeit und der Eigenzeit aus (2a, b, c) unter Zuhilfenahme von (1). Ganz analog zur klassischen Mechanik führen wir auch hier den reziproken Radius $u = \frac{1}{r}$ als abhängige Veränderliche ein und erhalten dann nach einiger Rechnung folgende Gleichung, in der h^2 die Flächenkonstante vorstellt

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3 m u^2. \tag{3}$$

Die entsprechende Gleichung in der Newtonschen Theorie lautet[1])

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{P(u)}{h^2 u^2} = \frac{m}{h^2} \tag{3a}$$

Wir können also den Sachverhalt so darstellen, als ob (in dem gewählten Koordinatensystem) die Newtonsche Kraft eine Störung durch eine zweite Zentralkraft erfährt, die mit der vierten Potenz des Radius abnimmt. Wir erinnern daran, daß wir die Änderung der Bewegungsgleichung durch die spezielle Relativitätstheorie bei Bewegung um ein festes geladenes Zentrum durch eine Störungskraft proportional r^{-3} darstellen konnten.

Die Differentialgleichung (3) für die Bahnkurve läßt sich durch elliptische Funktionen[2]) streng integrieren; wir geben hier nur das völlig ausreichende Resultat einer Näherungsrechnung an. Durch sukzessive Approximation erhält man, indem man von der ungestörten Ellipse mit der Exzentrizität ε ausgeht,

$$u = \frac{m}{h^2}\left\{1 + \varepsilon \sin\left[(\varphi - \varphi_0)\left(1 - \frac{3m^2}{h^2}\right)\right]\right\}. \tag{4}$$

Wenn φ um einen vollen Umlauf gewachsen ist, hat sich der Ort minimaler Entfernung vom Zentrum um den Winkel $\frac{6\pi m^2}{h^2}$ in der Bewegungsrichtung verschoben. Wir haben es also mit einer Periheldrehung im Sinne der Bewegungsrichtung zu tun. Bei Anwendung spezieller astronomischer Daten liefert (4) für den Planeten Merkur die bei ihm beobachtete Drehung des Perihels[3]).

29. Die Lichtquantenmechanik der allgemeinen Relativitätstheorie. a) Die Lichtstrahlkrümmung. Die Lichtstrahlkrümmung am Sonnenrand wurde von Einstein nach der Wellentheorie berechnet, sie ergibt sich jedoch mit dem gleichen Betrage in einfacher Weise aus der Lichtquantenmechanik; wenn wir in die Bewegungsgleichungen (2a, b, c) von Ziff. 28 die Bedingung einführen, daß sich der betrachtete Massenpunkt mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, also auf einer Nullinie läuft: $ds^2 = 0$, $h^2 \to \infty$.

Wir erhalten dann

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3 m u^2. \tag{1}$$

Durch sukzessive Approximation ergibt sich als Lösung

$$u = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{m}{R^2}(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi). \tag{2}$$

R bedeutet darin die Minimalentfernung der ungestörten Bahn vom Zentrum. Führen wir statt der Polarkoordinaten rechtwinklige ein,

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

---

1) Siehe Kap. 7, Ziff. 6 ds. Bd. des Handb.

2) Vgl. etwa H. Weyl, Raum, Zeit, Materie.

3) Für die nähere Diskussion der Erfahrungstatsachen vgl. wieder den Artikel von Beck in Bd. IV dieses Handbuches.

so erhalten wir als Bahngleichung

$$x = R - \frac{m}{R}\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3}$$

Das zweite Glied der rechten Seite von (3) gibt die Abweichung von der Geraden infolge der Gravitationswirkung; der Winkel, den die gestörte Bahn in sehr großer Entfernung vom Zentrum mit der ungestörten einschließt, berechnet sich aus (3) zu

$$\varepsilon = \frac{4m}{R}. \tag{4}$$

Führt man dieselbe Rechnung in der Newtonschen Theorie aus, so ergibt sich nur die halbe Abweichung; dies ist merkwürdig, weil wir uns bei der obigen Rechnung mit den in m linearen Gliedern begnügt haben, Newtonsche und Einsteinsche Gravitationstheorie aber in erster Näherung übereinstimmen (vgl. Ziff. 18). Die Erklärung liegt in den Bewegungsgleichungen (4) von Ziff. 20. Für Geschwindigkeiten, die mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind, also vor allem für Lichtquanten spielen dort die Glieder mit

$$\Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} (\alpha, \beta \neq 4)$$

neben den Gliedern $\Gamma^{\varepsilon}_{44} u^4 u^4$ eine gleichberechtigte Rolle und ergeben eben die erwähnte Verdoppelung der Winkelabweichung. Man kann den Sachverhalt auch so ausdrücken, daß die doppelte Lichtstrahlenkrümmung $\frac{4m}{R}$ statt $\frac{2m}{R}$ einen experimentellen Beweis für die Nichteuklidizität des Streckenraumes darstellt.

b) Die Rotverschiebung der Spektrallinien. Die Tatsache, daß Spektrallinien, die auf Orten höheren Gravitationspotentials emittiert werden, beobachtet von Orten niederen Gravitationspotentials, nach Rot verschoben sind, hat EINSTEIN ganz allgemein als Folgerung des Äquivalenzprinzips über den Gang von Uhren abgeleitet. Die gleiche Tatsache wurde von LAUE[1]) auf Grund der Maxwellschen Gleichungen bewiesen; sie ergibt sich auch sofort als anschauliche mechanische Konsequenz aus dem Äquivalenzprinzip, wenn wir die Lichtquantenhypothese zugrunde legen. Die Arbeit, die geleistet werden muß, um die Energie E vom Potential Φ_1 auf das Potential Φ_2 zu bringen, beträgt

$$\Delta E = E(\Phi_2 - \Phi_1). \tag{5}$$

Dies ist eine einfache Folgerung aus der Tatsache, daß jeder Energie träge und schwere Masse zukommt. Beim Lichtquant geht diese Arbeit auf Kosten seiner Energie, deren Änderung demgemäß $\Delta E = E\Delta\Phi$ beträgt. Für die der Energie proportionale Frequenz eines Lichtpunkts, die am Orte mit dem Gravitationspotential Φ ν_0 beträgt, erhalten wir demgemäß an Orten verschwindenden Potentials

$$\nu = \nu_0(1 - \Phi). \tag{6}$$

Wir würden diese obige Betrachtung nicht als eine mechanische Stütze der allgemeinen Relativitätstheorie ansehen, wenn nicht das gleiche Resultat auf einer Reihe anderer Wege zu gewinnen wäre.

Wir erwähnen noch, daß man die Rotverschiebung auch aus den Gleichungen der Quantenmechanik ableiten kann, indem man dort in die Hamiltonsche Funktion die Komponenten des metrischen Feldes (im speziellen) einführt[2]).

[1]) M. v. LAUE, Phys. ZS. Bd. 21, S. 657. 1920.
[2]) Vgl. etwa J. KUDAR, Phys. ZS. Bd. 26, S. 334. 1925.

4974

Sachverzeichnis.

n 612.
chen 228.
mpler von REYE
ler 524.
che Invariante 148.
de 151.
formation 150.
te partielle Differ-
gleichung 125.
exzentrische 316.
re 316.
316.
Bewegungsglei-
en 71.
ion 71.
ene des symmetri-
Kreisels 397, 405.
sprinzip 604.
er Kraft 235.
Kraftschraube 244.
beliebigen Kraft-
s am starren Kör-
2.
s Gleichgewicht
53.
en Fallmaschine
en 513.
gkeitsmoment 256.
r Kontinuität 37.
hwerkraft 4.
durchdringlichkeit
n eindeutigen Ge-
es. 2.
reichenden Grunde
LTZMANN 9, 23.
er Erhaltung der
3.
llgemeine, der Me-
enntnis 6.
chanik 1.
aktmechanik 25.
en Gesetz 336.
ch 541.
leunigung 187.
nität, Delaunaysche
nte 146.

Ballistik 311, 337.
Ballistische Hauptgleichung 310.
Barygyroskop 456.
Bedingt periodische Bewegung 142.
Befreiungsprinzip 26.
Beharrungsregler 524.
Berührungstransformation 99.
Beschleunigung 183, 184, 185.
Beschleunigungskomponenten 204.
Beschleunigungspol 201.
Bewegte Achsenfläche 228.
—, Polkurve 194, 204.
Bewegung, bedingt periodische 142.
—, ebene 192, 383.
—, gebundene 229.
—, geradlinige 179.
—, gleichförmige 181.
—, intermediäre 154.
—, komplanare (koplanare) 383.
—, krummlinige 184.
—, mehrfach periodische 135.
—, mittlere 138, 140.
—, periodische 136.
—, projizierte 184.
—, rein periodische 142.
—, resultierende 185.
—, sphärische 231.
—, ständige 476.
—, umgekehrte 194.
—, ungleichförmige 182.
—, zwangläufige 230.
Bewegungsenergie 9, 53, 341, 378.
Bewegungsgesetze 5.
Bewegungsreibung 485.
Bewegungsschraube 211, 227, 239.
Biegungsmoment 278.
Billardkugel 437.
Bindung, kinetische 453.
Bobilliersche Satz der Kinematik 198.
Bogenschuß 309.
Bohlinsches Näherungsverfahren 165.

Bohnenbergerscher Kreisel 391.
Bohrlochneigungsmesser 348.
Bohrreibung 485, 493.
Bohrsches Korrespondenzprinzip 138, 148.
Boltzmannsches Axiom 9, 23.
— Prinzip 30.
Brachistochrone 329.
Bravaissches Pendel 338.
Brennan 562.
Bremsregelung 525.

Cardangehänge, Cardangelenk 400, 459.
Christoffelsche Drei-Indizes-Symbole 601.
Comptoneffekt 613.
Coriolisbeschleunigung 223.
Corioliskraft 330.
Coulombsche Reibungsgesetze 485, 493.
Cremonaplan 303.
Culmannsches Zentralellipsoid 260.

Dämpfung 325, 329, 478.
Dämpfkreisel 549.
D'Alembertsches Prinzip 23, 39, 51, 81.
Dekrement, logarithmisches 325.
Delaunaysche Bahnelemente 146.
— Methode 173.
Deviationsmoment 256, 441.
Diabolospiel 392.
Differentialprinzipe der Dynamik 45.
Dispersionstheorie 176.
Dissipationsfunktion 61, 477, 491.
Div 602.
Doppelpendel 465.
Dopplereffekt 612.
Draht 18, 21, 27.
Drall 377.
Drehachse 208.
—, freie 395, 398.
—, konjugierte 218.
Drehbeschleunigung 200, 208.
Drehenergie 378.

Drehimpuls 9, 340, 375, 380.
Drehimpulssatz 9, 38, 340, 379, 591.
Drehkreuz 216.
Drehleistung 382.
Drehpaar 216.
Drehschnelle 195, 208.
Drehschwingungen 508.
Drehung 194, 207.
—, permanente 395, 398.
Drehwinkel 193, 208.
Drehzahlen, kritische 534.
Dreieckfachwerk 301.
Drei-Indizes-Symbole von Christoffel 601.
Dreikörperproblem 156, 346.
Dreikreiselkompaß 548.
Dyname 247.
Deformationstensor 10.

Ebene Bewegung 192, 383.
Ebene, unveränderliche (invariable) 341, 393.
Ei, tanzendes 434.
Eigendrehgeschwindigkeit des Kreisels 397, 406.
Eigenmasse 602.
Eigentliche Entartung 142.
— Winkelvariable 142.
Eigenzeit 582.
Eimuel 126.
Eindeutige Bewegungsintegrale 133.
Eindeutigkeit der Prinzipe 64.
Einflußlinie 282.
Einflußfläche 282.
Einflußzahl, Maxwellsche 294.
Eingeprägte Kraft 14, 307.
Eingeprägtes Moment 39.
Einrad 556.
Einschienenbahn 550.
Einsteinsches Relativitätsprinzip 37, 39, 40, 578.
Ejektionsbahn 361.
Elastische Linie 288, 296.
— Nachwirkung 13.
Elementarbewegung 207.
Elementarschiebung 207.
Elementarschraubung 211, 227.
Elliptizität des symmetrischen Kreisels 407.
Energie der Bewegung 9, 53, 341, 378.
— der Lage 54, 382.
—, kinetische 9, 53, 341, 378.
—, potentielle 54, 382.
—, relativistische 583.
—, Trägheit der 592.
Energiefläche 133.
Energieimpulstensor 590, 595, 602.
Energieintegral 57, 96.
Energieprinzip 31, 33.
Energiesatz 9, 57, 96, 341, 382, 583, 590.
Energieströmungsdichte 590.
Entartung 141, 142.
Entwicklung der Bewegungsintegrale nach Potenzen eines Parameters 154.
Eötvössche Wage 336.
Epizykloidische Präzessionsbewegung 395.
Ersatzmassen 504.
Ersatzpunkte 504.
Erstarrungsprinzip 16.
Erzeugende der kanonischen Transformation 98.
Euler-Maupertuissches Prinzip 85.
Eulersche Gleichungen des starren Körpers 381.
— Winkel 400.
Exzentrische Anomalie 316.

Fachwerk 297.
Faden 18, 21, 27, 33.
Fall 308, 313, 336.
Fallmaschine, Atwoodsche 338.
Federregler 331, 524.
Feldgleichungen der Gravitation 602.
Figurenachse des symmetrischen Kreisels 397, 406.
Flachregler 524.
Flachschuß 309.
Flächenbeschleunigung 189.
Flächengeschwindigkeit 189, 314.
Flächensatz 314, 340, 341.
Fliehkraft 330.
Fliehkraftregler 330, 524.
Flugzeug 566.
Flüssigkeit, ideale 13.
—, ideale inkompressible 29.
—, inkompressible 12, 589.
— mit innerer Reibung 13.
Flüssigkeitskugel, inkompressible 607.
Flüssigkeitsreibung 486.
Foucaultsches Pendel 338.
Fouriersches Prinzip 24, 50.
Freie Drehachse 395, 398.
Freiheitsgrad 52, 229.
Frequenz 138, 140.
Frequenzmesser 575.
Führungsbewegung 330, 440.
Fundamentaltensor, metrischer 601.
Fundamentalschwingungen 510.

Galileitransformation 4.
Galileisches Relativitätsprinzip 4.
— Trägheitsgesetz 7, 341.
Gauß-Kamerlingh Onnessches Pendel 449.
Gaußsches Prinzip 30, 32, 62.
Gaußsche Variation 68.
Gebundene Bewegung 229.
Gegenwirkungsprinzip 7, 8, 25.
Gelenkdruck 503.
Gelenkkette 459.
Gelenkparallelogramm 216.
Gelenkpolygon 271.
Gelenkviereck 197.
Generalisierte Geschwindigkeitskomponenten 52.
— Impulse 56, 94.
— Koordinaten 52.
— Kräfte 54.
Geodätische Linie 332, 602, 604.
— Weltlinie 605.
Geradeste Weltlinie 605.
Geradlaufapparat 544.
Geradlinige Bewegung 179.
Gerberträger 281.
Geschoßbewegung 309, 337, 428.
Geschwindigkeit 181, 182, 184, 185.
Geschwindigkeitskomponenten 185, 203.
—, generalisierte (verallgemeinerte) 52.
Geschwindigkeitskräfte 477.
Geschwindigkeitsmotor 228, 249, 374.
Geschwindigkeitsplan 190.
Geschwindigkeitsregler 525.
Geschwindigkeitsschraube 210.
Geschwindigkeits-Weg-Diagramm 183.
Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm 182.
Gespann 24.
Gewichtsregler 524.
Gleichförmige Bewegung 181.
Gleichgewicht 14, 45, 250, 267.
—, statisches 252, 253.
Gleitbewegung 388, 438.
Gleitenergie 378.
Gleitflug 568.
Gleitleistung 382.
Gleitreibung 485.
Glocke und Klöppel 468.
Graphostatik, ebene 266.
—, räumliche 275.
Gravitation, Feldgleichungen der 602.
Grenzentartung 142.
Grundbewegungen 207.
Grunddreieck 207.
Gyralkraft 441.
Gyroskop 453.
Gyroskopische Glieder 465.
— Kette 474.
— Koppelung 473.
— Kraft 473, 478.

Gyroskopische Stabilisierung 481.
Gyrostat 483.

Haftreibung 485.
Hamiltonsche Funktion 94, 308, 606.
Hamiltonsches Prinzip 34, 76, 77, 84, 92, 118, 586.
Hamilton-Jacobische Differentialgleichung 119, 127, 587, 606.
— — Theorie 91, 587, 606.
Harmonischer Oszillator 139, 168.
Hauptachse 260.
Hauptebene 260.
Hauptkraftkreuz 240.
Hauptpunkte 461.
Hauptstrecken 461.
Hauptträgheitsmomente 260.
Hauptträgheitsradien 260.
Hart 29.
Hebelgesetz 21, 233.
Herpolhodie 394, 194, 204.
Hertzsches Prinzip 30, 66, 87.
Hilbertsches Prinzip 118.
Hilbertscher Unabhängigkeitssatz 123.
Himmelskörper als Kreisel 429.
Hodograph 190, 204.
Holonom 46.
Homologe Kreisel 410, 432.
Hookesches Gelenk 459.
Howellapparat 544.
Hurwitz-Routhsche Bedingungen 481.
Hydrodynamik, relativistische 599.
Hyperbelbewegung 588.

Impuls (9), 306, 340, 375, 380.
—, generalisierter 56, 94.
—, kanonischer 94.
—, relativistischer 582.
—, verallgemeinerter 56, 94.
Impulsbahn 396, 410.
Impulsion 460.
Impulsmoment 9, 340, 375, 380.
Impulsmotor 375.
Impulssatz (9), 306, 340, 379, 590.
Impulsströmung 590.
Indifferentes Massensystem 255.
Indikator 574.
Infinitesimale Transformation 109.
Inkompressible Flüssigkeitskugel 607.
Integrale der kanonischen Gleichungen 112.
Integrale der Bewegung, eindeutige 133.
Integralfläche 134.
Integralinvarianten 102.
Integralprinzipe der Dynamik 76, 82, 117.
Interferenzregler 534.
Intermediäre Bewegung 151.
Invariable Ebene 341, 394.
Invarianz, adiabatische 148.
Isodromregelung 525, 532.
Isotomeograph 342.
Isozyklische Systeme 474.

Jacobische Identität 107.
Jacobisches Prinzip 40, 86.
Jacobi-Hamiltonsche Differentialgleichung 119, 127, 587, 606.
— — Theorie 91, 587, 606.
Jourdainsches Prinzip 68.

Kamerlingh Onnessches Pendel 449.
Kanonische Bahnelemente 144.
— Gleichungen 95, 587.
— Impulse 94.
— Koordinaten 94.
— Transformationen 97, 104.
— Transformationsgruppe 112.
Kanonisch konjugierte Konstante 120.
Kapillarität 29.
Katarakt 532.
Kegelpendel 335, 416.
Kelvin-Taitsche Gleichungen 472.
Keplerbewegung 315, 366, 143.
—, relativistische 611, 614.
Keplersche Gesetze 314, 315, 316, 345.
— Gleichung 316.
Kern 264, 287.
Kernfläche 264.
Kette 33 (s. auch Gelenkkette 459).
—, gyroskopische 474.
Kinematisch bestimmt 207.
— überbestimmt 207.
— unbestimmt 207
Kinetische Bindung 453.
Kinetisches Potential 55.
Kinetostatik 381, 497.
Kinosthenische Koordinaten 473.
Kleinsche Stellungsparameter 402.
Knotenachse 400.
Knotenpunkte eines Fachwerkes 207.
Kollermühle 551.
Kompaßkreisel 458, 545.
Komplanare (komplane) Bewegung 192, 383.
Komplex 239.
Komplexkegel 261.
Konjugierte Drehachse 218.
— Polbewegung 403.
Kontinuierliche Transformationsgruppe 109.
Kontinuitätsgleichung, relativistische 591.
Kontinuitätshypothese 8.
Koordinaten, generalisierte 52.
—, kanonische 94.
—, kinosthenische 473.
—, verallgemeinerte 52.
—, verborgene 473.
—, winkelartige 136.
—, zyklische 56, 96.
Koppelung, gyroskopische 473.
Körper, starrer 11, 14, 30, 207, 373, 389.
Korrespondenzprinzip 138, 148.
Kraft 3, 4, 5, 9, 33, 233.
—, eingeprägte 11, 307.
—, generalisierte 54.
—, gyroskopische 473, 478.
—, Lagrangesche 54.
—, verallgemeinerte 54.
—, verlorene 23, 51.
Kräftepaar 15, 234.
Kräfteplan eines Fachwerkes 303.
—, dynamischer 503.
Kraftkreuz 240.
Kraftmaschine 249, 379.
Kraftschraube 239, 244.
Kreisel 391.
—, abgeplatteter 415.
—, aufrechter 412.
—, Bohnenbergerscher 391.
—, Einfluß der Reibung 404, 422.
—, geführter 440, 455.
—, gehobener 415.
—, gesenkter 415.
—, gestreckter 415.
—, hängender 414.
—, homologer 410, 432.
—, kräftefreier 392, 452.
—, — symmetrischer 397.
—, Maxwellscher 391.
—, perimetrischer 444.
—, Prandtlscher 391.
—, schneller 418, 443.
—, schwerer 391, 453.
—, schwerer symmetrischer 406.
—, schwerer unsymmetrischer 424.
—, symmetrischer 391.
Kreiseldeklinatorium 457.
Kreiselfunktion 408.

Kreiselinklinatorium 456.
Kreiselinstrumente 390.
Kreiselkompaß 458, 545.
Kreisellot 454, 550.
Kreiselmoment 441, 443.
Kreiselpendel 454, 550.
Kreiselspitze 406, 410.
Kreuzgelenk 459.
Kritische Drehzahlen 534.
Krümmungsskalar 602.
Krümmungstensor von Riemann-Christoffel 601.
Krummlinige Bewegung 184.
Kugel, rollende 437.
Kugelgelenk 459.
Kugelkreisel, kräftefreier 398.
—, schwerer 409, 410.
Kurbelschleifengetriebe 224.
Kurbelviereck 506.
Kurvenflug 571.
Kurvenkreisel 444.
Kurvenzeiger 551.
Kurzperiodische Störungen 158.

Lagekräfte 477.
Lagrangesche Faktoren 47, 49, 307.
— Funktion 55, 586, 606.
— Gleichungen erster Art 52.
— — zweiter Art 54, 57, 58, 88.
— — für nichtholonome Systeme 60, 90.
— Klammerausdrücke 104.
— Kraft 54.
— Massenpunkte im Dreikörperproblem 354, 370.
— Multiplikatoren 47, 49, 307.
— Zentralgleichung 10, 71.
Lagrangescher Integralsatz der kanonischen Gleichungen 108.
Lagrangesches Prinzip 34.
Laplacesche Stabilität 369.
Laplacescher Stabilitätsbeweis 158.
Legendresche Transformation 95.
Leistung 10, 341, 381.
Leistungsprinzip 341, 382.
Leistungsregler 525.
Librationsbewegung 136, 327.
Librationsgrenzen 136.
Librationspunkte des Dreikörperproblems 360.
Librationszentrum 136.
Lichtstrahlkrümmung, relativistische 615.
Limitationsbewegung 136, 328.
Linie, elastische 288, 296.
—, geodätische 332, 602, 604.
Linienelement, vierdimensionales 581.
Liouvillebewegung 319.
Liouvillescher Satz 104.
Logarithmisches Dekrement 325.
Longitudinale Masse 583.
Lorentzkraft 55.
Lorentztransformation 580.

Mac Cullaghbewegung 392.
Mac Cullaghellipsoid 261, 393.
Magnetisches Massensystem 255.
Masse 3, 7.
—, longitudinale 583.
—, schwere 604, 605.
—, träge 604, 605.
—, transversale 583.
—, veränderliche 522.
Massenausgleich 512.
Massenmittelpunkt 254, 283.
Massenmomente 254.
Massenpunkt 25, 306, 602.
Massenpunkte, Lagrangesche, im Dreikörperproblem 354, 370.
Massensystem, indifferentes 255.
—, magnetisches 255.
Mathematisches Pendel 326.
Maupertuis-Eulersches Prinzip 85.
Maximalmomentenkurve 282.
Maxwellsche Einflußzahl 294.
Maxwellscher Kreisel 391.
Mehrfachpendel 465.
Mehrfach periodische Bewegungen 135.
Mehrkreiselkompaß 548.
Methode, adiabatische 151.
— der kleinen Schwingungen 369, 474.
— der säkularen Störungen 157.
— von Delaunay 173.
— von Ritter 242.
Metrischer Fundamentaltensor 601.
Minkowskische Gleichungen 581.
Mittlere Anomalie 316.
— Bewegung 138, 140, 316.
— Entfernung 316.
Mohrscher Trägheitskreis 287.
Moment einer Kraft 234, 277.
— eines Drehpaares 216.
— eines Kräftepaares 235.
— eines Motors 248.
—, planares lineares 255.
—, polares lineares 254.
—, quadratisches 256, 264, 265, 286.
Moment, statisches 234, 255, 277.
Momentanachse 209, 211, 228.
Momentanpol 193, 204.
Momentenfläche 278.
Momentensatz 9, 38, 340, 379, 591.
Momentvektor 234.
Motor 228, 247, 248, 374.
Motoraffinor (Motortensor) 249, 378.
Motorfeld 568.
Muffenkraft 525.
Muffenregler 524.

Nachwirkung, elastische 13.
Newtonsches Grundgesetz 3, 8, 306.
Newtonsche Mechanik 37.
Nicht abgeschlossene Systeme 174.
Nichtboltzmannsche Mechaniken 38.
Nichteuklidizität des Strahlenraumes 616.
Nichtexistenz eindeutiger Bewegungsintegrale 135, 151, 155.
Nichtholonom 46.
Nichtholonome Systeme 60, 74, 82, 89.
Nichtklassische Mechaniken 35.
Nichtnewtonsche Mechaniken 37.
n-Körperproblem 342, 364.
Normalbeschleunigung 186, 199, 208.
Nullebene 238.
Nullinie 238.
Nullpunkt 238.
Nullstrahl 238.
Nullsystem 238.
Nutation 417, 420, 431.
Nutationsgeschwindigkeit 420.
n-Zentrenbewegung 322.

Obryapparat 544.
Ölbremse 532.
Orthogonale Geschwindigkeit 195.
Oszillator, harmonischer 139, 168.
Oszillograph 575, 577.

Pallograph 575.
Parallelepiped der Geschwindigkeiten 185.
Parallelismus, Tendenz zum gleichstimmigen 443.
Parallelogramm der Beschleunigungen 186.
— der Geschwindigkeiten 185.
— der Kräfte 5, 36, 233.

Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten 314.
Pendel 136, 184, 136.
—, [illegible] 338.
—, ebenes 136.
—, Foucaultsches 338.
—, Kamerlingh Onnessches 449.
—, körperliches 184.
—, mathematisches 136.
—, physikalisches 184.
—, punktförmiges 136.
—, sphärisches 333, 426.
Pendelkörper 434, 590.
Pendellänge, reduzierte 385.
Perihelbewegung 317, 615.
[illegible] Kreisel 444.
Periodische Bewegung 140.
Periodizitätsmoduln der Wirkungsfunktion 147.
Perizykloidische Polarbewegung 395.
Permanente Drehung 395, 400.
Phasenbahn 141.
Phasenintegrale 159.
Phygoidbewegung 540.
Planares lineares Moment 255.
Trägheitsmoment 256.
Planbewegung 194, 303.
Planetenbewegung 141, 189, 418, 418, 606.
—, relativistische 614.
Plangröße 214.
Plastizität 11.
Poincarétransformation 106.
Poinsotbewegung 393.
—, konjugierte 403.
Poinsotellipsoid 264, 393.
Poissonsche Klammerausdrücke 108.
—, Stabilität 588.
Poissonscher Integralsatz der kanonischen Gleichungen 108.
Pol des Drehungsgebietes 190.
Pol der Relativbewegung 216.
Polares lineares Moment 254.
Trägheitsmoment 256.
Polarkoordinaten 187.
Polbahn (193), 194, 408.
—, [illegible] 398, 402.
Polbeschleunigung 200.
Polfigur 207.
Polhodie 394, 194, 208.
Polkegel 396.
Polkurven 193, 394, 409.
Polkurve, bewegte 194, 204.
—, ruhende 194, 204.
Polkurventangente 198.
Polstrahlen 207.
Polwechselgeschwindigkeit 199.
Polygonalmethode 303.
Potential 54, 382.
—, kinetisches 55.
Potentielle Energie 54, 382.
P-Plan 203.
Prandtlscher Kreisel 391, 405.
Präzession, pseudoreguläre 419.
—, reguläre 397, 414, 435, 440.
Präzessionsachse 397.
Präzessionsgeschwindigkeit 397, 406, 420.
Präzessionskegel 397.
Prinzip der Dynamik 43.
Prinzip der geradesten Bahn 31, 60, 87.
der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung 7, 8, 25.
— der kleinsten Wirkung 33, 83, 85, 86, 110, 598.
— der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit 40.
der virtuellen Arbeiten 10, 17, 46.
— der virtuellen Verrückungen 45, 46.
des kleinsten Zwanges 30, 32, 62.
— von Boltzmann 39.
von d'Alembert 23, 39, 51, 81.
von Fourier 24, 50.
von Gauss 30, 32, 62.
von Hamilton 34, 76, 77, 84, 92, 118, 586.
von Hertz 30, 66, 87.
— von Hilbert 118.
— von Jacobi 40, 86.
— von Jourdain 68.
von Lagrange 34.
— von Voss 83.
Projizierte Bewegung 184.
Pseudoreguläre Präzession 419.
Pumpenregler 534.
Punktförmiges Pendel 326.
— Raumpendel 333.
Punkthaufen (Punktsystem) 12, 315, 340.
Punkttransformation 99.

Quadratische Momente 250, 264, 265, 280.
Quasistationäre Bedingungen 148.
Quasikoordinaten 58.
Quasiperiode 141.
Querachse 400.
Querkraftlinie 278.

Rad, rollendes 434, 553.
Radialbeschleunigung 189.
Radialgeschwindigkeit 188.
Raum und Zeit 3.
Raumpendel, körperliches (physikalisches) 412, 416, 426.
—, punktförmiges 333.
Reaktionskraft 12, 14, 17, 307.
Reaktionsmotor 379.
Reduktion der Ordnung der kanonischen Gleichungen 115.
— des allgemeinen Kraftsystems 235.
Reduzierte Pendellänge 385.
Regelung 523.
—, direkte 529.
—, indirekte 531.
Registrierapparate 572.
Regler 523.
Reglermoment 525.
Reguläre Präzession 397, 414, 435, 440.
Reibung 484, 61.
Reibungskegel 489.
Reibungswinkel 489.
Reibungszahlen 488.
Reifen, rollender 434, 553.
Rein periodische Bewegungen 142.
Relativbeschleunigung 223.
Relativbewegung 219, 330.
Relativgeschwindigkeit 220.
Relativistische Hydrodynamik 509.
Relativität der Bewegung 179.
Relativitätsprinzip, Einsteinsches 37, 39, 40, 578.
—, Galileisches 4.
Resonanz 325, 572.
Resultierende Bewegung 185.
— Beschleunigung 186.
— Geschwindigkeit 185.
— Kraft (5), 233.
— Kraftschraube 245.
— Winkelgeschwindigkeit 214.
Reversionspendel 386.
Reyescher Achsenkomplex 261.
Rheonom 46.
Riemann-Christoffelscher Krümmungstensor 604.
Riemenreibung 490.
Riffelbildung 560.
Rittersche Methode 242.
Rollbewegung 231, 386, 438.
Rollreibung 488, 493.
Rolltensor 439.
Rotation s. Drehung.
Rotations- s. Dreh-.
Rotationsbewegung (im Gegensatz zu Librationsbewegung) 156, 327.

Rotverschiebung, relativistische 616.
Routh-Hurwitzsche Bedingungen 481.
Routhsche Funktion 469.
Rückführung 325.
Ruhende Achsenfläche 228.
— Polkurve 194, 204.
Ruhmasse 584.
Rutherfordbewegung 317.

Säkulare Störung 157.
Schale 29.
Schiebung 207.
Schienendruck 336.
Schienenfahrzeug 559.
Schiff 565.
Schiffskreisel 548.
Schiffsschwingungen 565.
Schleifkurbelgetriebe 224.
Schleudermoment 442, 443.
Schlickscher Massenausgleich 512.
— Schiffskreisel 548.
Schlußlinie 279.
Schmiermittelreibung 486, 488.
Schnittreaktionen 499.
Schraubenachse 211, 228.
Schraubenparameter 228.
Schraubentheorie 244.
Schraubung 211, 227, 239.
Schrotung 229.
Schubkurbelgetriebe 206, 503.
Schüttelschwingungen 561.
Schwerebene 255.
Schwere Masse 604, 605.
Schwerpunkt 254, 283.
Schwerpunktsatz 9, 340, 341, 379.
Schwerpunktswage 513.
Schwimmstabilität 565.
Schwingungen, Methode der kleinen 369, 474.
Schwingungsbewegung 323, 327, 508, 561.
Schwingungsdauer 327.
Schwingungsmittelpunkt 386.
Schwung 377.
Schwungbahn 396, 410.
Schwungellipsoid 394.
Schwungradberechnung 517.
Seil 18, 21, 27, 33.
Seileck 267.
Seilkette 275.
Seilkurve 280.
Seilpolygon 267.
Seilreibung 490.
Seismograph 575.
Seitenbewegung 184.
Seitengeschwindigkeit 185.
Selbsthemmung 494.
Selbstsperrung 494.
Semikonvergenz der Störungsrechnung 152.
Separation der Variabeln 122.
Separationskoordinaten 141.
Singuläre Lagen 65.
Skalare Mechanik 36.
Skleronom 46.
Spannungen in der Relativitätsmechanik 590, 597.
Spannungstensor 8, 590.
Sphärische Bewegung 231.
Sphärisches Pendel 333, 426.
Spielkreisel 431.
Spurbahn (194), 394, 409.
Spurkegel 396.
Stabilisierung, gyroskopische 481.
Stabilität der Bewegung 368, 479.
— des Flugzeuges 569.
— des Gleichgewichts 251.
—, Laplacesche 369.
—, Poissonsche 369.
Stabpendel 501, 507.
Stabvertauschung 302.
Ständige Bewegung 476.
Starrheitspunkt 157.
Starrer Körper 11, 14, 30, 207, 373, 589.
Statisch bestimmt 298.
— unbestimmt 298.
Statisches Moment 234, 255, 277.
Stellkraft 525.
Stampfzeiger 551.
Störung bei Grenzentartung 169.
—, eines eigentlich entarteten Systems 161.
— eines nicht entarteten Systems 159.
— eines zufällig entarteten Systems 164.
—, kurzperiodische 158.
—, säkulare 157.
—, unperiodische 176.
Störungstheorie 131, 151, 346, 358.
Stoß 345, 365, 380, 594, 61.
Strahlungsdruck 612.
Stroboograph 574.
Stützkraft 15.
Stützkreisel 550.

Tachograph 574.
Tachometer 574.
Tangentialbeschleunigung 186, 199, 208.
Tautochrone 328.
Tendenz zum gleichstimmigen Parallelismus 443.
Torsiograph 576.
Torsionsdynamometer 575.
Torsionsindikator 575, 576.
Torsionsschwingungen 508.
Träge Masse 604, 605.
Trägheit der Energie 592.
Trägheitsarm 256.
Trägheitsellipsoid 260.
Trägheitsfläche 259.
Trägheitsgesetz, Galileisches 7, 341.
Trägheitskraft 51, 330.
Trägheitskreis, Mohrscher 287.
Trägheitsmoment 250, 286.
—, axiales 256.
—, planares 256.
—, polares 256.
Trägheitsmotortensor 378.
Trägheitsradius 256.
Trägheitstensor 376.
Transformation, adiabatische 150.
—, infinitesimale 109.
—, kanonische 97, 104.
—, Legendresche 95.
—, Poincarésche 169.
Transformationsgruppe, kanonische 112.
—, kontinuierliche 109.
Transitive Mechanik 36.
Translation 207.
Transversale Masse 583.
Trennende Polbahn 396, 402.
Trockene Reibung 486.

Übergangsmoment 289, 292.
Umgekehrte Bewegung 194.
Unabhängigkeit der Axiome 35.
Unabhängigkeitssatz der Variationsrechnung 123.
Uneigentliche Winkelvariable 142.
Unempfindlichkeitsgrad 526.
Ungleichförmige Bewegung 182.
Ungleichförmigkeitsgrad 519, 526.
Ungleichungen als Nebenbedingungen 41, 49.
Uniformisierende Veränderliche 136.
Unperiodische Störung 176.
Unveränderliche Ebene 341, 393.
Ursache 3.

Variation der Konstanten 151.
— der Zeit 79.
Variierte Bewegung 73.
Vektorielle Mechanik 36.
Verallgemeinerte Geschwindigkeitskomponenten 52.
— Impulse 56, 94.
— Koordinaten 52.
— Kräfte 54.
Verborgene Koordinaten 473.
Verlorene Kraft 51.
Verrückungen, virtuelle 47.
Verschiebungssatz 14.